ФИЗИКА

УДК 535.42+537.86.22

СВОЙСТВА ВЕКТОРНЫХ ПАРАКСИАЛЬНЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ. II. НЕОДНОРОДНАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

PROPERTIES OF VECTORIAL PARAXIAL LIGHT BEAMS. II. THE NON HOMOGENEOUS POLARIZATION

S.S. Girgel

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Формализм для описания векторных параксиальных световых пучков распространен на пучки с неоднородной поляризацией. Найдены простые выражения для поляризации и плотности потока энергии электромагнитного поля векторных световых пучков с неоднородной поляризацией различных видов. Описаны несколько новых типов векторных параксиальных световых пучков. Установлено, что если любой параксиальный световой пучок с неоднородной поляризацией разложить на два когерентных циркулярно поляризованных пучка, то последние распространяются независимо, их потоки энергии разделяются и также независимы.

Ключевые слова: *параксиальные пучки, векторные пучки, световые пучки, поляризационные свойства, энергетические свойства, неоднородная поляризация.*

The formalism for the description of the vector paraxial light beams to the beams with nonhomogeneous polarization is propagated. Simple expressions for polarization and energy flux density of electromagnetic field of the vector light beams with nonhomogeneous polarization of various types were discovered. New types of the vector paraxial light beams are featured. It is proved, that if any paraxial light beam with the nonhomogeneous polarization is spread out into two coherent circular polarized beams and the former are spread independently, then their streams of energy are parted and they are independent.

Keywords: *paraxial beams, vector beams, light beams, polarizable properties, energy properties, nonhomogeneous polarization.*

Введение

Узко направленные световые пучки находят широкое применение в науке и технике [1]–[5]. В предыдущей работе [6] был предложен общий формализм для аналитического описания векторных параксиальных пучков. Этот формализм был применен для изучения векторных параксиальных пучков с однородной поляризацией. В настоящей работе этот формализм распространяется на векторные параксиальные пучки с неоднородной поляризацией.

1 Общий формализм для описания векторных параксиальных пучков

Общее электрическое поле векторных параксиальных пучков можно описывать функцией вида

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}e^{i(kz-\omega t)}, \quad (1.1)$$

где, однако, векторная амплитуда $\mathbf{E}$ не является постоянной, а зависит от координат *x*, *y*, *z*. Параксиальные пучки однозначно определяются поперечной частью $\mathbf{E}_\perp$ вектора электрического поля. Поэтому все векторные амплитуды поля произвольного параксиального светового пучка можно выразить через его поперечные компоненты электрического поля $\mathbf{E}_\perp$. Получаем пучки двух типов:

$$\mathbf{E}^{(1)}=\mathbf{E}_\perp^{(1)}+\frac{i}{k}\nabla_\perp\mathbf{E}_\perp^{(1)}\cdot\mathbf{e}_z;\quad \mathbf{H}^{(1)}=\frac{\varepsilon}{n}\mathbf{E}^{(2)}; \quad (1.2)$$

$$\mathbf{E}^{(2)}=\left[\mathbf{e}_z,\mathbf{E}_\perp^{(1)}\right]+\frac{i}{k}\nabla_\perp\left[\mathbf{e}_z,\mathbf{E}_\perp^{(1)}\right]\cdot\mathbf{e}_z;$$

$$\mathbf{H}^{(2)}=-\frac{\varepsilon}{n}\mathbf{E}^{(1)}. \quad (1.3)$$

Верхние индексы (1) и (2) здесь и далее означают пучки первого и второго типов. $\nabla_\perp=\mathbf{e}_x\partial_x+\mathbf{e}_y\partial_y$ – векторный поперечный оператор набла; $\mathbf{e}_z$ – единичный вектор в направлении оси *z* пучка, *n* – показатель преломления среды. Используются обозначения $k_0=\omega/c$, $n^2=\varepsilon\mu$, $k=k_0n$. Эти выражения могут описывать пучки как с однородной, так и с неоднородной поляризацией.

В (1.2)–(1.3) векторы электрических полей $\mathbf{E}^{(1)}$ и $\mathbf{E}^{(2)}$ взаимосвязаны: ($\mathbf{E}_\perp^{(2)}=[\mathbf{e}_z,\mathbf{E}_\perp^{(1)}]$). Такие пучки будем называть сопряженными друг другу.

Усреднённые по времени плотность энергии *w* и плотность потока энергии электромагнитного поля (вектор Пойнтинга) ***S*** [5], [7]

$$w=\frac{\varepsilon|\mathbf{E}|^2}{8\pi};\quad \mathbf{S}=\frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\left[\mathbf{E}^*\mathbf{H}\right] \quad (1.4)$$

для сопряженных пучков являются одинаковыми:

$$w^{(1)} = w^{(2)} = \frac{c\varepsilon}{8\pi nk}\left|\mathbf{E}_\perp\right|^2;$$
$$\mathbf{S}_\perp^{(1)} = \mathbf{S}_\perp^{(2)} =$$
$$= \frac{c\varepsilon}{8\pi nk}\cdot \mathrm{Im}\left(\mathbf{E}_\perp^{(1)*}\cdot\nabla_\perp \mathbf{E}_\perp^{(1)} + \mathbf{E}_\perp^{(2)*}\cdot\nabla_\perp \mathbf{E}_\perp^{(1)}\right). \quad (1.5)$$

Перейдем к поляризационным характеристикам пучков $\mathbf{E}^{(1)}$ и $\mathbf{E}^{(2)}$. Предварительно отметим, что $\mathbf{E}_\perp^{(1)}\mathbf{E}_\perp^{(2)} = 0.$ Это означает, что векторы $\mathbf{E}_\perp^{(1)}$ и $\mathbf{E}_\perp^{(2)}$ имеют одинаковую эллиптичность. Главные оси эллипсов поляризации векторов $\mathbf{E}_\perp^{(1)}$ и $\mathbf{E}_\perp^{(2)}$ при этом повернуты на 90°, а их направления вращения одинаковы. Поляризационные и энергетические характеристики сопряженных пучков аналогичны. Поэтому в дальнейшем будем ограничиваться, как правило, анализом только одного из двух сопряженных пучков.

Запишем выражения для вычисления поляризации параксиальных сопряженных векторных пучков типа $\mathbf{E}^{(1)}$ и $\mathbf{E}^{(2)}$. Всегда можно разложить произвольный вектор $\mathbf{E}_\perp$ по ортогональному базису ($\mathbf{E}_\perp = E_\mathbf{x}\mathbf{e}_\mathbf{x} + E_\mathbf{x}\mathbf{e}_\mathbf{y}$) и ввести комплексный параметр поляризации соотношением $\eta = \eta' + i\eta'' = \dfrac{E_y}{E_x}.$ Сейчас, согласно Федорову [7], можно ввести комплексный угол $(\psi' + i\psi'')$ соотношением $\eta = \mathrm{tg}\,(\psi' + i\psi''),$ тогда азимут эллипса поляризации световой волны относительно оси абсцисс равен ψ', а ее эллиптичность γ выражается как $\gamma = \mathrm{th}\,\psi''.$ При численных расчетах удобно пользоваться формулами [7]:

$$\mathrm{tg}\,2\psi' = \frac{2\eta'}{1-|\eta|^2}; \quad \mathrm{th}\,2\psi'' = \frac{2\eta''}{1+|\eta|^2}. \quad (1.6)$$

Если параметр η является константой, то имеем однородно поляризованные пучки. Такие пучки обладают поляризацией, однородной по сечению пучка, и изучались нами в [6].

В настоящей работе используется предложенный в [6] векторный формализм для описания поляризационных и энергетических характеристик векторных параксиальных световых пучков с неоднородной поляризацией.

2 Свойства векторных мод с неоднородной поляризацией

Обсудим теперь свойства параксиальных векторных световых пучков первого типа $(\mathbf{E}^{(1)}, \mathbf{H}^{(1)})$. Пусть некоторая волновая функция F удовлетворяет скалярному параболическому уравнению

$$\left(\nabla_\perp^2 + 2ik\,\partial_z\right)F = 0. \quad (2.1)$$

Тогда в качестве компонент E_x и E_y поперечного вектора $\mathbf{E}_\perp$ в (1.2) можно взять комбинации форм $\dfrac{\partial F}{\partial_x}$, $\dfrac{\partial F}{\partial_y}$ и, в более общих случаях, любые комбинации частных производных функции F по x и y: $\dfrac{\partial^{m+n}F}{\partial x^m \partial y^n}$, $m,n \in N$.

Рассмотрим сначала следующие простые комбинации:

$$\mathbf{E}_\perp^{(1)} = \partial_x F\cdot\mathbf{e}_x + a\cdot\partial_y F\cdot\mathbf{e}_y; \quad \mathbf{H}^{(1)} = \frac{\varepsilon}{n}\mathbf{E}^{(2)}; \quad (2.2)$$

$$\mathbf{E}_\perp^{(2)} = -a\cdot\partial_y F\cdot\mathbf{e}_x + \partial_x F\cdot\mathbf{e}_y; \quad \mathbf{H}^{(2)} = -\frac{\varepsilon}{n}\mathbf{E}^{(1)}, \quad (2.3)$$

где a – некоторая комплексная константа.

А) Пусть $a = 1,$ тогда полные векторы полей мод первого и второго типа равны:

$$\mathbf{E}^{(1)} = \nabla_\perp F + 2\partial_z F\cdot\mathbf{e}_z; \quad \mathbf{H}^{(1)} = \frac{\varepsilon}{n}[\mathbf{e}_z, \nabla_\perp F]; \quad (2.4)$$

$$\mathbf{E}^{(2)} = [\mathbf{e}_z, \nabla_\perp F]; \quad \mathbf{H}^{(2)} = -\frac{\varepsilon}{n}(\nabla_\perp F + 2\partial_z F\cdot\mathbf{e}_z). \quad (2.5)$$

Векторы $\mathbf{E}^{(1)}$, $\mathbf{H}^{(1)}$ в (2.4) характеризуют *TH*-моды, а $\mathbf{E}^{(2)}$, $\mathbf{H}^{(2)}$ – *TE*-моды. Если в качестве функции F взять фундаментальную гауссову моду (гауссиан), тогда получаем известные [8], [9] гауссовы *TE* и *TH*-моды. При этом вектор $\mathbf{E}^{(2)}$ пучка поляризован азимутально, а вектор $\mathbf{E}^{(1)}$ – радиально.

Усредненные по времени плотности энергии w и потока энергии $\mathbf{S}$ электромагнитного поля обоих сопряженных *TE* и *TH* пучков при этом соответственно равны:

$$w = \frac{\varepsilon\left|\nabla_\perp F\right|^2}{8\pi}; \quad \mathrm{S}_z = \frac{c}{n}w;$$

$$\mathbf{S}_\perp^{(1)} = \mathbf{S}_\perp^{(2)} = -\frac{c\varepsilon}{4\pi n}\mathrm{Re}\,\left(\nabla_\perp F\cdot\partial_z F\right).$$

Б) Мы полагали в (2.2) и (2.3) $a = 1$ и получили *TE* и *TH*-моды, не обязательно гауссовы.

Если же взять в (2.2) и (2.3) $a = -1$, либо $a = \pm i$, или a – произвольное комплексное число, то получаем новые типы параксиальных векторных световых пучков, которые, насколько известно автору, еще не исследовались.

3 Суперпозиции сопряженных пучков с неоднородной поляризацией

Возьмем теперь когерентную суперпозицию мод $\mathbf{E}^{(1)}$ и $\mathbf{E}^{(2)}$ в (1.2), (1.3), не конкретизируя явных выражений для $\mathbf{E}_\perp$. Получаем

$$\mathbf{E}_\perp^{(3)} = \eta_1\mathbf{E}_\perp^{(1)} + \eta_2\mathbf{E}_\perp^{(2)};$$
$$\mathbf{E}_\perp^{(4)} = \eta_1\mathbf{E}_\perp^{(2)} - \eta_2\mathbf{E}_\perp^{(1)};$$
$$\mathbf{H}^{(3)} = \frac{\varepsilon}{n}\mathbf{E}^{(4)}; \quad \mathbf{H}^{(4)} = -\frac{\varepsilon}{n}\mathbf{E}^{(3)}, \quad (3.1)$$

где η_1 и η_2 – некоторые комплексные постоянные коэффициенты. Продольные компоненты векторов поля вычисляются из уравнений

Максвелла в параксиальном приближении, например,

$$E_z^{(3)} = \frac{i}{k}\nabla_\perp \mathbf{E}_\perp^{(3)}, \quad H_z^{(3)} = \frac{\varepsilon}{n}E_z^{(4)}.$$

Для вычисления поляризации мод $\mathbf{E}^{(3)}$ введем параметр поляризации волн $\mathbf{E}^{(1)}$ и $\mathbf{E}^{(2)}$ отношением $\eta = \frac{E_y^{(1)}}{E_x^{(1)}} = \mathrm{tg}\psi$ и параметр η_k когерентного смешивания мод $\mathbf{E}^{(1)}$ и $\mathbf{E}^{(2)}$ отношением $\eta_k \equiv \frac{\eta_2}{\eta_1} = \mathrm{tg}\psi_k$. Пользуясь схемой Федорова [7], находим, что общий азимут поляризации световой моды $\mathbf{E}^{(3)}$ равен $\psi_{общ}^{(3)} = \psi' + \psi_k'$, а ее эллиптичность $\gamma_{общ} = \mathrm{th}(\psi'' + \psi_k'')$.

Перейдем к расчету энергетических характеристик пучков $\mathbf{E}^{(3)}$, $\mathbf{E}^{(4)}$. Вычисляя, находим, что усредненные по времени плотности энергии w и потоков энергии $\mathbf{S}$ электромагнитного поля сопряженных мод $\mathbf{E}^{(3)}$ и $\mathbf{E}^{(4)}$ соответственно равны:

$$w^{(3)} = w^{(4)} = w = \\ = \frac{\varepsilon}{8\pi}\left(|\eta_1|^2 + |\eta_2|^2\right)\left|\mathbf{E}_\perp^{(1)}\right|^2 \left(1 + \mathrm{th}\, 2\psi''\,\mathrm{th}\, 2\psi_k''\right); \quad (3.2)$$

$$\mathbf{S}_\perp^{(3)} = \mathbf{S}_\perp^{(4)} = \frac{c\varepsilon}{8\pi nk}\left(|\eta_1|^2 + |\eta_2|^2\right)\times \\ \times \mathrm{Im}\left\{\left(\mathbf{E}_\perp^{(1)*}\cdot\nabla_\perp \mathbf{E}_\perp^{(1)} + \mathbf{E}_\perp^{(2)*}\cdot\nabla_\perp\mathbf{E}_\perp^{(2)}\right) + \right. \quad (3.3) \\ \left. + i\,\mathrm{th}\, 2\psi_k''\left(\mathbf{E}_\perp^{(1)*}\cdot\nabla_\perp\mathbf{E}_\perp^{(2)} - \mathbf{E}_\perp^{(2)*}\cdot\nabla_\perp\mathbf{E}_\perp^{(1)}\right)\right\}.$$

Из мод $\mathbf{E}^{(1)}$ и $\mathbf{E}^{(2)}$ можно сконструировать циркулярно поляризованные моды $\mathbf{E}_{\perp\pm} = \mathbf{E}_\perp^{(1)} \pm i\mathbf{E}_\perp^{(2)}$, которые представляют особый интерес. Это означает, что тогда в (3.1) $\eta_k = \pm 1$. Легко убедиться, что $\mathbf{E}_{\perp\pm}^2 = 0$. Теперь разложим $\mathbf{E}_{\perp\pm}$ по циркулярному базису $(\mathbf{e}_+, \mathbf{e}_-)$. Получаем $\mathbf{E}_{\perp\pm} = \mathbf{e}_\pm E_\pm$, где $E_\pm = \sqrt{2}\,(E_x \mp iE_y)$. Здесь и далее векторы поляризации $\mathbf{e}_\pm$ и операторы дифференцирования $\partial_\pm$ в циркулярном базисе соответственно равны:

$$\mathbf{e}_\pm = \frac{\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}}; \quad \partial_\pm = \mathbf{e}_\pm \nabla_\perp = \frac{\partial_x \pm i\partial_y}{\sqrt{2}}. \quad (3.4)$$

Векторы циркулярного базиса удовлетворяют соотношениям [7]

$$[\mathbf{e}_\pm, \mathbf{e}_\mp] = \mp i\mathbf{e}_z, \quad [\mathbf{e}_\pm, \mathbf{e}_z] = \pm i\mathbf{e}_\pm,$$

$$\mathbf{e}_+\mathbf{e}_- = |\,\mathbf{e}_\pm|^2 = 1, \quad \mathbf{e}_\pm^2 = 0.$$

Целесообразно разложить вектор $\mathbf{E}_\perp^{(3)}$ по введенным циркулярным модам $\mathbf{E}_{\perp\pm}$. Получаем

$$\mathbf{E}_{\perp\pm}^{(3)} = \eta_+\mathbf{E}_{\perp+} + \eta_-\mathbf{E}_{\perp-} = \eta_+E_+\mathbf{e}_+ + \eta_-E_+\mathbf{e}_-. \quad (3.5)$$

Для того, чтобы характеризовать поляризацию пучков $\mathbf{E}_\perp^{(3)}$, естественно ввести для них параметр эллиптичности $\eta_c = \frac{\eta_- E_-}{\eta_+ E_+}$. Нетрудно убедиться, что эллиптичность γ и азимут ψ большой оси эллипса поляризации для пучка $\mathbf{E}_\perp^{(3)}$ относительно оси абсцисс соответственно равны:

$$\gamma = \frac{1 - |\eta_c|}{1 + |\eta_c|}; \quad \psi = \frac{1}{2}\arg(\eta_c). \quad (3.6)$$

Теперь усредненные по времени плотности энергии w и потока энергии $\mathbf{S}$ электромагнитного поля мод $\mathbf{E}_\perp^{(3)}$ соответственно равны:

$$w = \frac{\varepsilon}{8\pi}\left(\left|\mathbf{E}_{\perp+}\right|^2 + \left|\mathbf{E}_{\perp-}\right|^2\right); \quad S_z = \frac{c}{n}w; \quad (3.7)$$

$$\mathbf{S}_\perp^{(1)} = \frac{c\varepsilon}{4\pi nk}\cdot\mathrm{Im}\left(\mathbf{E}_{\perp+}^*\cdot\nabla_\perp\mathbf{E}_{\perp+} + \mathbf{E}_{\perp-}^*\cdot\nabla_\perp\mathbf{E}_{\perp-}\right). \quad (3.8)$$

Таким образом, мы видим, что если векторный параксиальный пучок с неоднородной поляризацией разложить на циркулярно поляризованные моды с противоположными направлениями вращения, то такие моды распространяются независимо, энергетические характеристики их разделяются и также независимы:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-; \\ w = w_+ + w_-; \quad (3.9) \\ \mathbf{S} = \mathbf{S}_+ + \mathbf{S}_-.$$

Такой вывод был получен нами ранее в [6] для однородно поляризованных мод. Вывод (3.9) для неоднородно поляризованных пучков не является тривиальным. Действительно, как видно из вышеизложенного, если эллиптически поляризованный пучок разложить, например, в когерентную сумму двух линейно поляризованных пучков, то такие пучки не являются независимыми и интерферируют. Вклады в общий поток энергии $\mathbf{S}$ обоих пучков в последнем случае не разделяются. Таким образом, циркулярно поляризованные моды являются, в некотором смысле, более фундаментальными, чем линейно поляризованные. Это обусловлено вращательной инвариантностью циркулярных мод относительно оси *z* пучка.

4 Суперпозиции TE и TH-мод

Обсудим сейчас свойства параксиальных векторных пучков $\mathbf{E}^{(3)}$ и $\mathbf{E}^{(4)}$ с неоднородной поляризацией, которые представляют собой когерентную линейную суперпозицию *TE* и *TH*-мод (2.4) и (2.5). Теперь в (3.2) и (3.3) полагаем $\left|\mathbf{E}_\perp^{(1)}\right|^2 = \left|\nabla_\perp F\right|^2$. При этом выражение (3.2) остается без изменений, а (3.3) существенно упрощается:

$$\mathbf{S}_\perp^{(3)} = -\frac{c\varepsilon}{4\pi n}\left(|\eta_1|^2 + |\eta_2|^2\right)\times \\ \times\mathrm{Re}\left((\nabla_\perp F^* - i\,\mathrm{th}\, 2\psi_k''\,[\mathbf{e}_z, \nabla_\perp F^*])\cdot\partial_z F\right). \quad (4.1)$$

Здесь при произвольном параметре смешивания $\eta_k = \dfrac{\eta_1}{\eta_2}$ получаются параксиальные векторные пучки, бóльшая часть которых еще не исследовалась.

Естественно первоначально взять $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = \pm i$, тогда $\eta_k = \pm i$. Поэтому $\mathrm{th}\, 2\psi_k'' = \pm 1$ и суперпозиция *TE* и *TH*-мод снова редуцируется к циркулярно поляризованным модам. При этом все выражения значительно упрощаются. Например:

$$\mathbf{E}_{\pm}^{(3)} = (\mathbf{e}_{\pm}\partial_{\mp} + 2\,\mathbf{e}_z\partial_z)F; \quad \mathbf{H}_{\pm}^{(3)} = \mp i\frac{\varepsilon}{n}\mathbf{E}_{\pm}^{(3)};$$

$$w_{\pm} = \frac{\varepsilon\left|\nabla_{\perp}F\right|^2}{8\pi}; \quad S_{z\pm}^{(3)} = \frac{c}{n}w_{\pm};$$

$$\mathbf{S}_{\perp\pm}^{(3)} = -\frac{c\varepsilon}{\pi n}\mathrm{Re}(\mathbf{e}_{\pm}\partial_{\mp}F^* \cdot \partial_z F).$$

Заключение

На базе предложенного в предыдущей работе автора [6] формализма исследованы физические свойства векторных параксиальных световых пучков с неоднородной поляризацией. Показано, что произвольный векторный параксиальный пучок однозначно определяется линейной комбинацией решений скалярного параболического уравнения.

Рассмотрены несколько типов таких пучков, включая *TE* и *TH*-моды. Исследованы также когерентные суперпозиции таких неоднородно поляризованных мод. Часть из них являются новыми и еще не исследованными.

Найдены простые выражения для поляризационных и энергетических характеристик векторных параксиальных световых пучков с неоднородной поляризацией. Для дальнейшего изучения их свойств необходима специализация найденных общих выражений на конкретные типы пучков.

Установлено, что если произвольный векторный параксиальный световой пучок разложить в когерентную сумму двух циркулярно поляризованных мод, то эти моды являются независимыми. Это означает, что они распространяются независимо друг от друга, их плотности энергии и плотности потока энергии разделяются и также являются независимыми. Этот парадоксальный, на первый взгляд, вывод обусловлен циркулярными поляризациями пучков и их параксиальностью.

Свойство независимости циркулярных мод может найти применение в оптических системах передачи и обработки информации, поскольку может увеличивать пропускную способность оптического канала.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бельский, А.М.* Оптика световых пучков / А.М. Бельский. – Мн. : БГУ, 2000. – 210 с.

2. *Гончаренко, А.М.* Гауссовы пучки света / А.М. Гончаренко. – Мн. : Наука и техника, 1977. – 144 с.

3. *Хаус, Х.* Волны и поля в оптоэлектронике / Х. Хаус. – М. : Мир, 1988. – 432 с.

4. *Вайнштейн, Л.А.* Электромагнитные волны / Л.А. Вайнштейн. – М. : Радио и связь, 1988. – 440 с.

5. *Борн, М.* Основы оптики / М. Борн, Е. Вольф. – М. : Наука, 1970. – 587 с.

6. *Гиргель, С.С.* Свойства векторных параксиальных световых пучков. I. Однородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 1 (6). – С. 20–24.

7. *Федоров, Ф.И.* Оптика анизотропных сред / Ф.И. Федоров. – Мн. : Изд-во АН БССР, 1976. – 380 с.

8. *Davis, L.W.* TM and TE electromagnetic beams in free space / L.W. Davis and G. Patsakos // Optics Letters. – 1981. – Vol. 8, № 1. – P. 22–23.

9. *Shimoda, Koichi*. Vectorial analysis of the Gaussian beams of light / Koichi Shimoda // J. Phys. Soc. Japan. – 1991.– Vol. 60, № 1. – P. 141–144.

Поступила в редакцию 13.01.12.