

## ИССЛЕДОВАНИЕ СЕЛЕКТИВНЫХ СВОЙСТВ ОТКРЫТЫХ НЕУСТОЙЧИВЫХ РЕЗОНАТОРОВ

Г. Н. Винокуров, В. В. Любимов и И. Б. Орлова

С учетом дифракции на краях зеркал получено приближенное решение задачи о колебаниях неустойчивого резонатора с круглыми и цилиндрическими зеркалами. Рассмотрена возможность улучшения селекции колебаний в неустойчивом резонаторе при плавном снижении коэффициента отражения на краях зеркал.

Настоящая работа посвящена исследованию селективных свойств открытых неустойчивых резонаторов оптического диапазона, которые в настоящее время привлекают все большее внимание [1-6]. Задача решается аналитически в дифракционном приближении. Аналитический способ решения задачи обладает определенным преимуществом по сравнению с лишенными наглядности итерационными машинными методами [2, 4, 5]. Он позволяет не только объяснить многие результаты численных расчетов, известных в литературе [2, 4, 5], но также определить способы улучшения селективных свойств резонатора и предсказать результаты того или иного изменения его параметров.

В первой части работы подробно обсуждается полученное ранее [6] решение задачи о собственных колебаниях резонатора с одинаковыми симметрично расположенными относительно его оси зеркалами, апертура которых имеет форму идеального круга с резким краем.

Во второй части проводится решение задачи в случае, когда зеркала резонатора обладают постепенно убывающим к краям коэффициентом отражения, т. е. краевые дифракционные эффекты оказываются значительно ослабленными.

В третьей части рассматривается решение задачи для резонатора с выпуклыми цилиндрическими зеркалами.

1. Приведем постановку задачи и основные результаты решения для зеркал с круговой апертурой [6], необходимые для дальнейшего обсуждения. Установившееся на зеркалах распределение поверхностного тока описывается в скалярной формулировке Гюйгенса—Френеля функцией  $f(\xi) = \cos(n\psi)u_n(\xi)$ , где  $n$  — целое число, азимутальный индекс колебаний, характеризующий осевую симметрию распределения тока,  $\psi$  — угловая,  $\xi$  — безразмерная радиальная координаты, а  $u_n(\xi)$  при  $|\sqrt{\gamma + \gamma^2 \xi^2}| \gg 1$  имеет асимптотическое представление в виде суперпозиции двух встречных бегущих волн  $W_1$  и  $W_2$ <sup>1</sup>

$$u_n(\xi) \sim \xi^{-1} \left[ \frac{\exp \frac{-i\pi(n+1)}{4}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2} + \frac{\nu}{2} + \frac{1}{4}\right)} W_1(\nu, \xi) + \frac{\exp \frac{i\pi(n+1)}{4}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2} - \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}\right)} W_2(\nu, \xi) \right], \quad (1a)$$

где

$$\left. \begin{aligned} W_1(\nu, \xi) &= (2\sqrt{\gamma + \gamma^2 \xi^2})^{\nu/2+1/4} e^{i\sqrt{\gamma + \gamma^2 \xi^2} \xi}, \\ W_2(\nu, \xi) &= (2\sqrt{\gamma + \gamma^2 \xi^2})^{-\nu/2-1/4} e^{-i\sqrt{\gamma + \gamma^2 \xi^2} \xi}. \end{aligned} \right\} \quad (1б)$$

<sup>1</sup> Более подробно постановка задачи и решение освещены в Приложении, а также в работе [6].

Собственные значения решения выражаются как

$$h = m^{-\nu-0.5}, \quad (2)$$

где  $m = 1 + 2\gamma + 2\sqrt{\gamma + \gamma^2}$  (при  $\gamma = L/2R$ ) — увеличение резонатора, параметр, определяющий отношение, в котором увеличивается линейный размер сечения пучка лучей при распространении света от одного зеркала до другого. Потери энергии

$$\Delta = 1 - m^{-2\text{Re}\nu}. \quad (3)$$

Комплексный параметр  $\nu$ , характеризующий частоту и дифракционные потери собственных колебаний, является корнем трансцендентного уравнения [8]

$$(2\pi N_{\text{экр.}})^{\nu-0.5} = 2 \ln m \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2} + \frac{\nu}{2} + \frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2} - \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}\right)} e^{i\varphi}, \quad (4)$$

$$\varphi = 2\pi p - 2\pi N_{\text{экр.}} + \frac{\pi}{2}(n+2), \quad N_{\text{экр.}} = \frac{N}{2} \left(m - \frac{1}{m}\right),$$

$N = a^2/\lambda L$ ,  $\Gamma$  — гамма-функция [9];  $p$  — целое число (см. (П. 10)).

Результаты численного решения уравнения (4) для низших симметричных ( $n=0, 2$ ) и антисимметричного ( $n=1$ ) колебаний приведены на рис. 1. Зависимость  $\text{Re}\nu$  и величины потерь от  $N_{\text{экр.}}$  представлены сериями пересекающихся кривых, имеющих минимумы при

$$N_{0\text{экр.}} = p + \frac{n}{4} + \frac{1}{2}, \quad \text{т. е. } \varphi = 0. \quad (5)$$

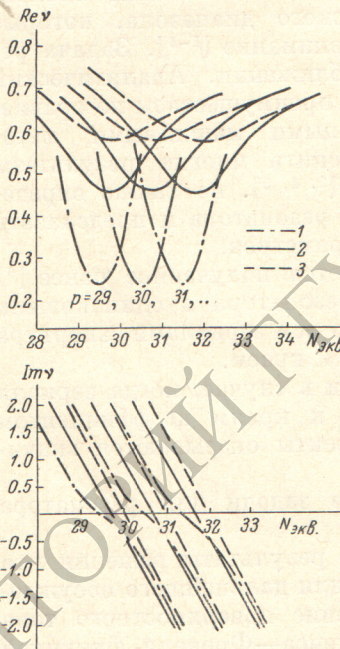


Рис. 1. Зависимость  $\text{Re}\nu$  и  $\text{Im}\nu$  от  $N_{\text{экр.}}$  для низших симметричных и антисимметричных колебаний,  $m=2$ .

1 —  $n=0$ , 2 —  $n=1$ , 3 —  $n=2$

пренебрежение возможно, если после одного полного прохода через резонатор в поперечном направлении амплитуды набегающих на край зеркала трансформированных волн оказываются существенно меньше, чем амплитуда основной волны.

Оценим величину модуля отношения амплитуды первой трансформированной волны к амплитуде основной на краю зеркала

$$\Phi = \left| \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{\nu_0}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{\nu_0}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{\nu_j}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{\nu_j}{2}\right)} \right|, \quad (6)$$

где

$$\nu_j = \nu_0 \pm \frac{2\pi j}{\ln m}, \quad j = 0, 1, 2 \dots$$

Численный расчет функции  $\Phi$  показывает, что при выполнении неравенства  $|\operatorname{Im} \nu| \ll \pi / \ln m$ , т. е. вблизи  $N_{\text{экр.}} = p + (n/4) + (1/2)$ , это отношение оказывается малым ( $|\Phi| \ll 1$ ). С увеличением  $|\operatorname{Im} \nu|$  величина  $\Phi$  возрастает и при  $|\operatorname{Im} \nu| = \pi / \ln m$  в силу известного свойства  $\Gamma$ -функции  $\Gamma(z) = \overline{\Gamma(\bar{z})}$  становится равной единице. Это означает, что основная и первая трансформированная волны сравниваются по амплитуде на краях зеркал, так что пренебрежение последней при построении решения оказывается недопустимым. Естественно предположить, что если решение строить с учетом первой трансформированной волны, то при дифракции основной волны на краю зеркала внутрь резонатора как с отраженной, так и с трансформированной волной будут возвращаться примерно равные доли энергии. Это должно, по-видимому, привести к замедлению роста потерь от  $N_{\text{экр.}}$  в области где  $|\operatorname{Im} \nu| = \pi / \ln m$ . При дальнейшем увеличении  $|\operatorname{Im} \nu|$  трансформированная волна становится преобладающей, так как  $|1/\Phi| \ll 1$  и можно ожидать, что величина потерь станет убывать по мере приближения  $N_{\text{экр.}}$  к положению соответствующего минимума  $\operatorname{Re} \nu$ . Такой подход позволяет объяснить результаты работы [5], где зависимость собственных значений, а следовательно, и величины потерь от  $N_{\text{экр.}}$ , полученные итерационным методом, носят осциллирующий характер. На рис. 2 показаны графики  $|h|$ , полученные в работе [5] для  $n=0, m=5$ , и точками нанесены результаты решения уравнения (4). Как видно, в области, где справедливо пренебрежение трансформированными волнами  $|\operatorname{Im} \nu| < \pi / \ln m$ , наблюдается хорошее согласие обоих решений.

Приведенное рассмотрение позволяет получить из уравнения (4) оценку общего числа колебаний низшего симметричного типа, которые существуют в резонаторе. На рис. 1 видно, что изменение величины  $N_{\text{экр.}}$  на единицу приводит к смене колебания (см. также [4-6]). Поэтому искомое число колебаний приблизительно можно указать, определив, на сколько единиц увеличивается  $N_{\text{экр.}}$  при изменении  $|\operatorname{Im} \nu|$  от нуля ( $N_0$ ) до  $2\pi / \ln m$  ( $N_2$ ). Полагая  $\operatorname{Im} \nu \approx 2\pi / \ln m$  и пользуясь асимптотическим представлением  $\Gamma$ -функции [6]:  $\ln \Gamma(z) \approx (z - 0.5) \ln z - z + \ln \sqrt{2\pi}$  при  $|z| \gg 1$  и  $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ), преобразуем уравнение (3) к системе уравнений относительно  $\operatorname{Re} \nu$  и  $\Delta N_{\text{экр.}} = N_2 - N_0$ , откуда при  $N_{\text{экр.}} > 10$  и  $2 \leq m \leq 5$  получаем искомое число колебаний «b» равным

$$b = [\Delta N_{\text{экр.}}] = [\Delta \ln (2\pi N_{\text{экр.}} / \ln m)]^2 \quad (7)$$

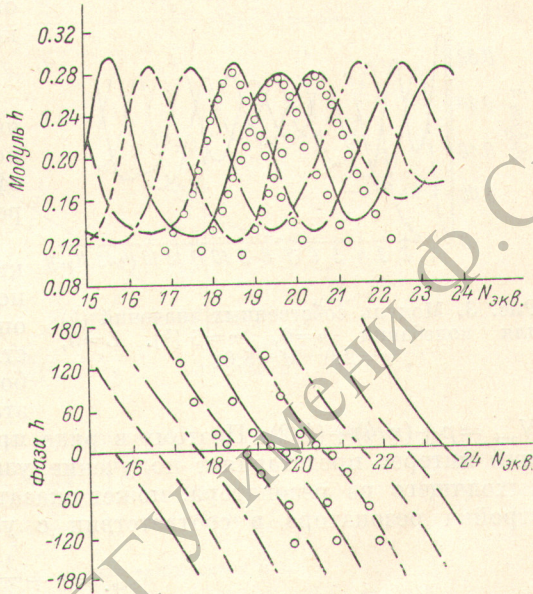


Рис. 2. Модуль и фаза собственных значений ( $h$ ) для низших симметричных типов колебаний ( $n=0$ ) при  $m=5$ .

Линиями нанесены результаты машинного решения, полученные в работе [5]. Точками нанесены результаты решения уравнения (3).

<sup>2</sup> Скобки здесь означают ближайшее целое число.

Это число хорошо согласуется с расчетами Зигмена и Миллера [5]. Точность оценки повышается с увеличением  $N_{\text{экв.}}$  и уменьшением  $m$ .

Из рис. 3 [5] видно, что верхняя огибающая модуля собственных значений представляет собой почти постоянный уровень, в то время как нижняя огибающая  $|h|$  имеет явно выраженный периодический характер. По-видимому, модуляция нижнего уровня зависит от фазового соотношения между основной и первой трансформированной волнами, входящими в распределение тока на зеркалах с близкими амплитудами, а постоянство верхнего уровня связано с тем, что вклад в решение трансформированных волн вблизи  $\max h$  (или  $\min \Delta$ ), как было указано, не велик. Положения минимальных значений нижней огибающей определяются соотношением

$$2\pi N_{\text{экв.}} = m^{c+0.5}, \quad c = 0, 1, 2, \dots, \quad (8)$$

полученным из условия, что разность фаз основной и первой трансформированной волн на краю резонатора равна  $(2c+1)\pi$ .

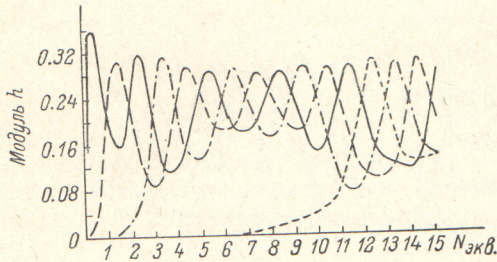


Рис. 3. Модуль собственных значений ( $h$ ) для колебания  $n=0$ ,  $m=5$  [5].  $L=0$ ,  $g=2.6$ ,  $M=5.0$ .

На рис. 3 видно, что при таких параметрах резонатора разность  $|h|$  соседних колебаний, определяющая селективные свойства резонатора, достигает наибольшей величины. Вообще говоря, эта разность максимальна при

$$N_{\text{экв.}} = p + \frac{1}{2} u. \quad (9)$$

2. В работах [1, 7] <sup>3</sup> было показано, что введение постепенно убывающего по сечению резонатора коэффициента отражения зеркал приводит в предельном случае ( $M \rightarrow \infty$ ) к существенному увеличению разности собственных значений колебаний резонатора, которые принимают вид  $h = 1/m^{c+0.5}$ ,  $c = 0, 1, 2, \dots$ . Таким образом, дальнейшее улучшение селективных свойств резонатора заключается в ослаблении дифракционного рассеяния на краях зеркал. Для практических целей, однако, наибольший интерес представляет не предельная задача, а случай постепенного уменьшения на конечном расстоянии коэффициента отражения зеркала вблизи края.

Предположим, что величина коэффициента отражения зеркал резонатора на поверхности круга радиуса  $M/2$  постоянна и равна единице, а за пределами этого круга довольно быстро спадает до нуля, и в этом смысле будем говорить о зеркалах с «нерезким» краем. При этом интегральное уравнение для радиальной составляющей тока на зеркалах принимает вид

$$h U_n(\xi) = \int_0^{\infty} K(\xi, \xi_1) \bar{\rho}(\xi_1) U_n(\xi_1) d\xi_1, \quad (10)$$

где <sup>4</sup>

$$\bar{\rho}(\xi) = \begin{cases} 0 \leq \rho(\xi) \leq 1 & \xi > M/2, \\ 1 & \xi \leq M/2. \end{cases} \quad (11)$$

<sup>3</sup> [1] § 78 и задачи № 6, 7 к главам III и IV.

<sup>4</sup> Поскольку мы рассматриваем общие закономерности влияния «перезких» краев зеркал на колебания резонатора, мы не заботимся о сохранении прежнего («резкий край») эффективного размера зеркал.

В зависимости от функции убывания отражательной способности зеркал вблизи краев дифракционные эффекты оказываются в той или иной степени ослабленными. Введем комплексный параметр  $B = \mathcal{R}e^{i\varphi}$ , характеризующий уменьшение коэффициента отражения поверхностной волны тока от края зеркал как <sup>5</sup>

$$R = R_0 \mathcal{R} e^{i\varphi_1}, \quad (12)$$

где  $R_0$  — коэффициент отражения набегающей на край зеркала волны тока в случае «резкого края». Связь  $B$  и  $\rho(\xi)$  рассмотрена ниже. Тогда уравнение (4) преобразуется к виду

$$(2\pi N_{\text{экр.}})^{\nu-0.5} \mathcal{R} = 2 \ln m \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2} + \frac{\nu}{2} + \frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2} - \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}\right)} e^{i\chi}, \quad \chi = \varphi - \varphi_1. \quad (13)$$

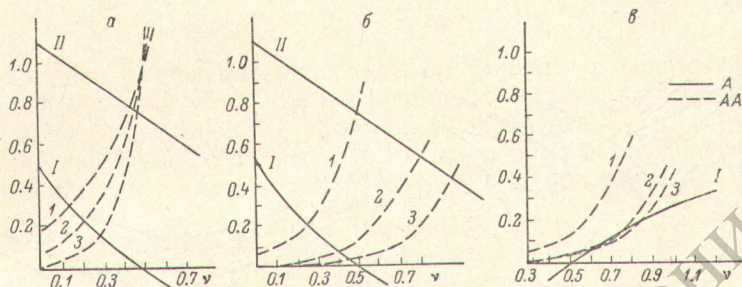


Рис. 4. Графическое решение уравнения (13) при вещественных  $\nu$ .

$$A - \pm 2 \ln m \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2} + \frac{\nu}{2} + \frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2} - \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}\right)} \begin{cases} I \text{ для } n=0, \\ II \text{ для } n=1. \end{cases}$$

Знак + относится к а, б, знак — относится к в.

$$AA - (2\pi N_{\text{экр.}})^{\nu-0.5} \mathcal{R} \begin{cases} \text{а: } 1 - N_{\text{экр.}} = 5.5, 2 - N_{\text{экр.}} = 30.5, 3 - N_{\text{экр.}} = 1000.5; \\ \text{б: } - N_{\text{экр.}} = 30.5, 1 - \mathcal{R} = 0.8, 2 - \mathcal{R} = 0.1, 3 - \mathcal{R} = 0.04; \\ \text{в: } N_{\text{экр.}} = 31.0, 1 - \mathcal{R} = 0.1, 2 - \mathcal{R} = 0.04, 3 - \mathcal{R} = 0.03. \end{cases}$$

Проанализируем зависимость от параметра  $\mathcal{R}$  вещественных решений этого уравнения ( $\chi=0$ ). Ранее было отмечено, что вещественные значения определяют при соответствующих размерах резонатора ( $N_{\text{экр.}} = p + (n/4) + (1/2)$ ) минимальную величину потерь низших типов колебаний резонатора, что позволяет отчасти (т. е. при указанных значениях  $N_{\text{экр.}}$ ) судить о степени дискриминации колебаний по потерям. На рис. 4 показано графическое решение уравнения (13) для вещественных  $\nu$ .

Как видно, корни уравнения для симметричного ( $\nu_c$ ) и антисимметричного ( $\nu_a$ ) колебаний, достаточно близкие по величине при  $\mathcal{R} = 1$  («резкий» край), начинают заметно различаться при уменьшении параметра  $\mathcal{R}$ . Если  $\mathcal{R}$  становится меньше некоторой величины  $\mathcal{R}_{\text{кр.}}$  (см. ниже), в симметричном решении ( $n=0$ ) уравнения (13) наряду с корнем  $\nu_{c1} < 0.5$ , соответствующим  $N_{\text{экр.}} = p + 1/2$ , появляются два новых корня  $\nu_{c2}, \nu_{c3} > 0.5$ , соответствующих  $N_{\text{экр.}} = p + 1$ . При дальнейшем уменьшении параметра  $\mathcal{R}$   $\nu_{c1}$  и  $\nu_{c2}$  стремятся с двух сторон к величине 0.5, а  $\nu_{c3}$  — в сторону больших значений  $\nu$ . Анализ уравнения (13) показывает, что  $\nu_{c3}$ , как и ранее (рис. 5, б), определяет минимальные значения потерь группы колебаний, сменяющих друг друга при изменении  $N_{\text{экр.}}$  на единицу. Посмотрим решение уравнения (13) в окрестности  $\nu=0.5$ . Пользуясь приближенным выражением  $\ln \Gamma(\nu) \approx \ln \Gamma(0.5) + \psi(0.5)(\nu-0.5)$ , где  $\psi(z) =$

<sup>5</sup> Способ решения на основе волноводных представлений описан в [1, 6]. Не следует путать коэффициент отражения зеркал с коэффициентом отражения поверхностной волны тока от краев зеркал.

логарифмическая производная Г-функции, представим уравнение (13) в виде

$$(2\pi N_{\text{экв.}})^{\nu-0.5} \approx -\frac{\ln m}{\mathcal{B}} (\nu - 0.5) e^{i\chi}. \quad (14)$$

Заменяя  $(2\pi N_{\text{экв.}})^{\nu-0.5}$  единицей при  $|\nu - 0.5| \ln 2\pi N_{\text{экв.}} \ll 1$  и решая уравнение (14) относительно  $\nu = \nu_1 + i\nu_2$ , получим

$$\left. \begin{aligned} \nu_1 - 0.5 &\approx -\frac{\cos \chi}{\ln m} \mathcal{B}, \\ \nu_2 &\approx \frac{\sin \chi}{\ln m} \mathcal{B}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Из (15) следует, что величина  $\nu_1$  в зависимости от  $N_{\text{экв.}}$  слабо осциллирует относительно уровня  $\nu_1 = 0.5$ , а  $\nu_2$  — относительно оси абсцисс

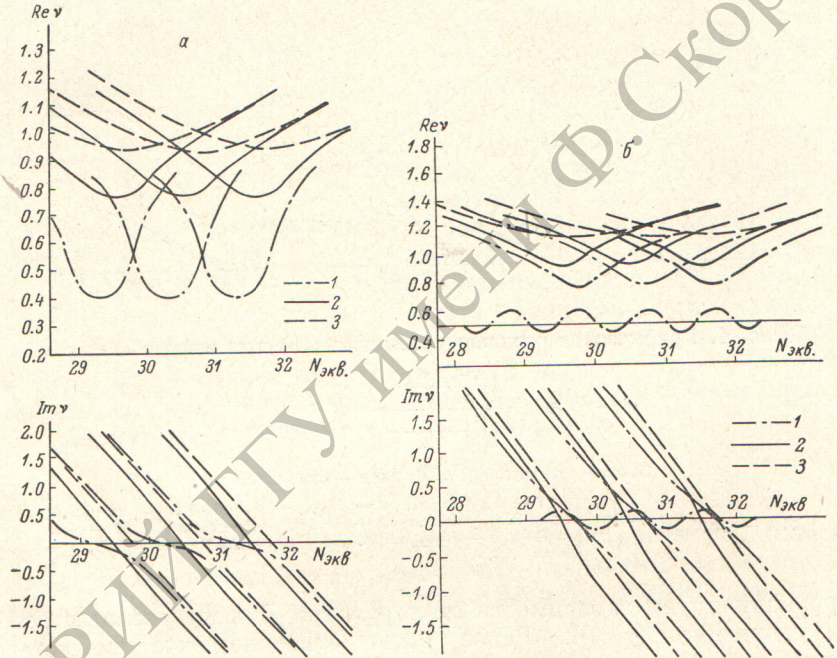


Рис. 5. Зависимость  $\text{Re } \nu$  и  $\text{Im } \nu$  для низших симметричных и антисимметричных колебаний от  $N_{\text{экв.}}$  при разных значениях  $\mathcal{B}$ ,  $m=2$ .

$a - \mathcal{B}=0.1$ ,  $b - \mathcal{B}=0.04$ ; 1 —  $n=0$ , 2 —  $n=1$ , 3 —  $n=2$ .

( $\nu_2=0$ ). При этом  $\max \nu_1$  и  $\min \nu_1$  ( $\nu_2=0$ ) совпадают соответственно с  $\nu_{c2}$  и  $\nu_{c1}$ . Таким образом, разность корней  $\nu_{c1}$  и  $\nu_{c2}$  (рис. 4) характеризует полный размах осцилляций низшего симметричного колебания по потерям (5) относительно уровня геометрических потерь ( $\Delta=1-1/m^2$ ). При уменьшении параметра  $\mathcal{B}$  этот размах уменьшается и величина потерь все более утрачивает зависимость от  $N_{\text{экв.}}$ , приближаясь к геометрическому значению.

На рис. 5, *a, б* представлены результаты полного численного решения уравнения (13). Как видно, в результате ослабления дифракционного рассеяния на краях зеркал от группы колебаний низшего симметричного типа отделяется одно колебание, значительно отличающееся по величине потерь. Другие колебания этого типа обладают значительно большими потерями, близкими к потерям колебаний высших типов симметрии ( $n=1, 2$ ).

Следует подчеркнуть, что для получения необходимых оценок степени разделения колебаний по потерям нет необходимости в полном численном решении уравнения (13) для комплексных  $\nu$ , достаточно иметь пред-

ставление о взаимном расположении его вещественных корней  $\nu_{c1}, \nu_{c2}, \nu_{c3}$ . Как уже говорилось, корни  $\nu_{c2}, \nu_{c3}$  появляются в решении при  $\mathcal{B} < \mathcal{B}_{кр.}$ . Из рис. 4 видно, что уменьшение параметра  $\mathcal{B}$  приводит сначала к сближению кривых I и III, затем к их касанию (при этом  $\nu_{c2} = \nu_{c3}$ ) и, наконец, к пересечению ( $\nu_{c2} < \nu_{c3}$ ). Значение параметра  $\mathcal{B}$ , соответствующее моменту касания кривых I и III, мы и обозначаем как  $\mathcal{B}_{кр.}$ . Величина  $\mathcal{B}_{кр.}$  может быть определена из системы уравнений

$$(2\pi N_{экр.})^{\nu-0.5} = -\frac{\ln m}{\mathcal{B}_{кр.}} (\nu - 0.5), \quad (16)$$

$$(2\pi N_{экр.})^{\nu-0.5} \ln 2\pi N_{экр.} = -\frac{\ln m}{\mathcal{B}_{кр.}}, \quad (17)$$

откуда

$$\mathcal{B}_{кр.} = -\frac{\ln m}{e \ln 2\pi N_{экр.}} \nu - 0.5 = \frac{1}{\ln 2\pi N_{экр.}}, \quad e = 2.71828\dots$$

Максимальное разделение колебаний по потерям в общем случае зависит от вида функции убывания коэффициента отражения зеркал у края и ширины зоны, на которой это убывание происходит.

Вычисляя коэффициент отражения от края зеркал набегающей на край волны тока (6), можно связать параметр  $\mathcal{B}$  с функцией  $\rho(\xi)$ . Так для

$$\rho(\xi) = e^{-\left(\xi - \frac{M}{2}\right) \frac{\beta}{L}} \quad \mathcal{B} = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2 4\pi N_{экр.} \left(m - \frac{1}{m}\right)}}; \quad (18)$$

для

$$\rho(\xi) = e^{-\left(\xi - \frac{M}{2}\right)^2 / 2\xi^2} \quad B = \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{4\pi N_{экр.} \left(m - \frac{1}{m}\right)}. \quad (19)$$

В формулах (18), (19)  $\beta$  определяет ширину зоны «нерезкости» края и предполагается, что  $\beta \ll M/2m$ . Обращаясь к уравнению (13), можно заметить, что в первом случае корень  $\nu_{c3} \rightarrow 1$  и максимальное разделение колебаний по потерям независимо от  $N_{экр.}$  определяется шириной зоны

«нерезкости»  $\beta \sim 1/\sqrt{m - \frac{1}{m} \ln m}$ . Во втором случае  $\nu_{c3} \rightarrow 1.5$  и необходи-

мая зона «нерезкости» оказывается  $\beta \sim 1/\sqrt{m - \frac{1}{m} \sqrt{\ln m}}$ . В случае, если функция  $\rho(\xi)$  приведет к зависимости параметра  $\mathcal{B}$  от  $1/N_{экр.}$  в степени больше единице и разность потерь колебаний низшего симметричного типа станет определяться величинами  $\nu=0.5$  и  $\nu > 1.5$ , селективные свойства резонатора практически не изменятся. Дело в том, что в этом случае определяющей станет разность потерь низшего симметричного ( $\nu \approx 0.5$ ) и низшего антисимметричного ( $\nu \approx 1.5$ ) колебаний, при этом эффективная зона «нерезкости» края может уменьшиться и стать зависящей от  $N_{экр.}$ . Однако в реальных резонаторах, где ход зависимости  $\rho(\xi)$  и размер зоны убывания отражательной способности зеркал невозможно проконтролировать, при оценках целесообразно ориентироваться на одну из указанных возможностей (18), (19). Причем функция (18) при заданной ширине участка «нерезкости» ( $\beta$ ) приводит к наименьшему ослаблению дифракционного эффекта и, следовательно, к наименьшему расщеплению колебаний по потерям.

Заметим, что введение убывающего у краев коэффициента отражения зеркал не единственный способ уменьшения краевых дифракционных эффектов. Известно, что такое же действие может иметь и зубчатая диафрагма, установленная перед зеркалом внутри резонатора [10]. Это вызвано тем, что на краю зеркала для волны тока, идущей от середины зеркала, и волны тока, идущей к середине зеркала, нарушается «условие отражения» [11].

Аналогичный эффект получится при отклонениях апертуры зеркала от идеального круга или при развороте зеркал. Во всех этих случаях можно ввести усредненный по азимутальной координате коэффициент отражения света от зеркал, убывающий в радиальном направлении. При этом зона «нерезкости» края определяется шириной кольца на поверхности зеркала, на которой проявляется отличие апертуры от идеального круга. Такие представления позволяют во многом объяснить и результаты решения задачи о колебаниях резонатора с выпуклыми цилиндрическими зеркалами [4, 6], если рассматривать квадратную диафрагму, как частный случай зубчатой диафрагмы.

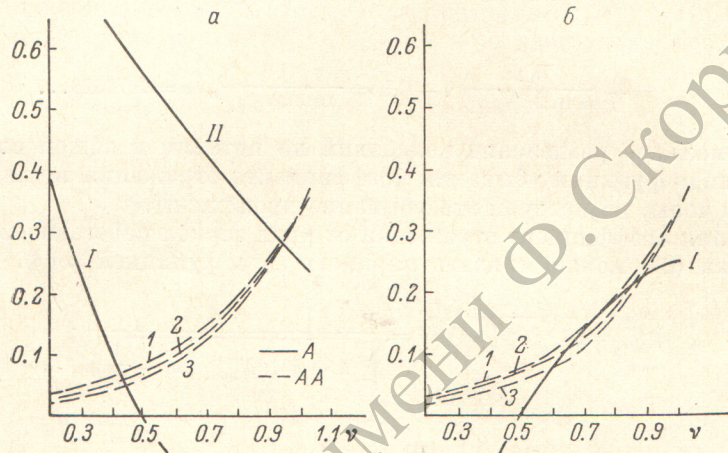


Рис. 6. Графическое решение уравнения (20) при вещественных  $\nu$ .

$$A - (\pm) \frac{\Gamma\left(\frac{\nu'}{2} + \frac{s}{4}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\nu'}{2} + \frac{s}{4}\right)} \quad \left\{ \begin{array}{l} I \text{ для } s=1, \text{ знак } + \text{ относится к а; } II \text{ для } s=3, \\ \text{знак } - \text{ относится к б.} \end{array} \right.$$

$$AA \frac{(2\pi N_{\text{экр.}})^{\nu'-1}}{2 \ln m} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{а: } 1 - N_{\text{экр.}} = 2.375, \quad 2 - N_{\text{экр.}} = 3.375, \quad 3 - N_{\text{экр.}} = \\ = 5.375; \text{ б: } 1 - N_{\text{экр.}} = 2.875, \quad 2 - N_{\text{экр.}} = 3.875, \quad 3 - \\ N_{\text{экр.}} = 5.875. \end{array} \right.$$

3. Решение задачи о колебаниях резонатора с выпуклыми цилиндрическими зеркалами было получено в работе [6]. Преобразованное с помощью известных соотношений  $\Gamma(2z) = (1/\sqrt{\pi}) 2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma(z+1/2) \Gamma(z+1/2) \times \Gamma[1/2-z] = \pi/\cos \pi z$  уравнение для  $\nu'$ , связанной с величиной  $\nu$  в [6] как  $\nu' = \nu + 0.5$ , имеет вид

$$(2\pi N_{\text{экр.}})^{\nu'-1} = 2 \ln m \frac{\Gamma\left(\frac{\nu'}{2} + \frac{s}{4}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\nu'}{2} + \frac{s}{4}\right)} e^{i\varphi}, \quad (20)$$

$$\varphi = 2\pi p - 2\pi N_{\text{экр.}} - \pi - \frac{s\pi}{4},$$

где  $s = \begin{cases} 1 & \text{для симметричного колебания,} \\ 3 & \text{для антисимметричного колебания.} \end{cases}$

Нетрудно видеть, что это уравнение сходно с полученным выше уравнением (13) для круглых зеркал с «нерезким» краем при  $\mathcal{B} \sim 1/\sqrt{N_{\text{экр.}}}$ .

На рис. 6 показано графическое решение уравнения (20) для вещественных значений  $\nu$ . Разделение колебаний по потерям происходит даже при резком крае и не слишком больших значениях  $N_{\text{экр.}}$ , причем «нерезкость» края, очевидно, может только усилить этот эффект. Как и в случае круглых зеркал, можно получить критическое значение параметра  $N_{\text{экр.}}$ ,



при котором от группы симметричных колебаний отделяется по потерям одно колебание низшего типа.  $N_{\text{экв. кр.}}$  определяется как корень уравнения

$$\left. \begin{aligned} g - 2 &= 2 \ln \frac{g}{0.47 \left(m - \frac{1}{m}\right)}, \\ g &= \ln 2\pi N_{\text{экв. кр.}} + \frac{1}{2} [\psi(0.5) + \psi(1)]. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Приведенные соображения позволяют объяснить картину разделения колебаний, наблюдавшуюся в работе [4] и вызывавшую недоверие ряда авторов [5, 7]. При  $m=3.3$  уравнение (20) имеет один вещественный корень при  $N_{\text{экв.}}=5.5$ , соответствующий величине потерь 67%, и два вещественных корня при  $N_{\text{экв.}}=6$ , соответствующие величинам потерь 78 и 88%, что хорошо совпадает с результатами работы [4] (рис. 7).

4. В заключение отметим, что разработанное ранее решение задачи о колебаниях неустойчивых резонаторов, зеркала которых имеют идеально «резкий» край не только находится в хорошем согласии с результатами машинных расчетов [2, 4, 5], но и позволяет объяснить эти результаты. Этот способ решения оказался эффективным и для оценки повышения селективных свойств резонаторов при плавном снижении коэффициента отражения зеркал на краях. Исходя из проведенного решения, можно сформулировать следующие основные выводы.

В неустойчивом резонаторе с круглыми зеркалами, имеющими «резкий» край, довольно большая группа колебаний низшего типа обладает близкими по величине потерями.

При использовании зеркал с «нерезким» краем и постепенном увеличении зоны «нерезкости» от этой группы можно отделить одно колебание с потерями, близкими к величине геометрических потерь [2]. При этом потери остальных колебаний сильно возрастают.

В случае резонатора с круглыми зеркалами ширина зоны «нерезкости», приводящая к отделению даже одного низшего колебания, оказывается существенно больше, чем это следует из работы [7] для всех колебаний. Оценка в работе [7] получена только на основании предположения, что для полного разделения по потерям всех колебаний, достаточно ослабления отражения волны от края зеркала в несколько раз. Поэтому в этой работе не обнаружено различия по отношению к «нерезкости» края между резонаторами с круглыми и цилиндрическими зеркалами. Проведенное же нами исследование показало, что необходимое ослабление дифракционных эффектов сильно зависит не только от размеров резонатора, но и от формы зеркал. Более того, полное разделение высших колебаний по потерям при небольшой ширине зоны «нерезкости» не достигается, если не предъявлять специальных требований к закону спада коэффициента отражения зеркал на краю.

Резонатор с цилиндрическими зеркалами обладает при больших значениях  $N_{\text{экв.}}$  лучшими селективными свойствами, чем резонатор с круглыми зеркалами. Так, отделение по потерям одного колебания низшего типа от остальных происходит даже в случае зеркал с идеально «резким» краем. Это позволяет объяснить качественное различие в результатах, полученных для резонаторов с цилиндрическими и сферическими зеркалами в работах [2, 4, 5].

В тех случаях, когда апертура зеркал отличается от идеального круга или каким-либо образом нарушена осевая симметрия системы зеркал,

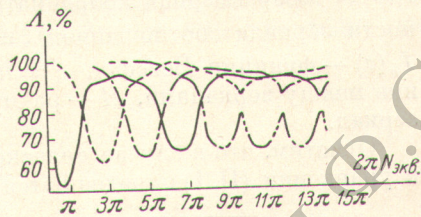


Рис. 7. Зависимость потерь колебаний низшего симметричного типа резонатора с цилиндрическими зеркалами от  $N_{\text{экв.}}$  [2].

благодаря частичной компенсации дифракционного рассеяния от разных участков края также можно достигнуть улучшения селективных свойств резонатора.

Выражаем благодарность Ю. А. Ананьеву и В. Е. Шерстобитову за полезное обсуждение результатов.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Функции  $u_n(\xi)$  для резонатора с одинаковыми круглыми выпуклыми зеркалами являются решениями интегрального уравнения [1]

$$hu_n(\xi) = e^{i\pi(n+1)/2} \int_0^{M/2} e^{\frac{i(1+2\gamma)}{2}(\xi_1^2 + \xi^2)} J_n(\xi, \xi_1) \xi_1 u_n(\xi_1) d\xi_1, \quad (\text{П. 1})$$

где  $\xi$  — безразмерная координата, связанная с радиусом  $r$  точки на поверхности зеркала соотношением  $\xi = r \sqrt{k/L}$ ,  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  — длина волны света,  $J_n(z)$  — функция Бесселя,  $\gamma = h/2R$ ;  $M = \sqrt{2\pi N}$ ,  $N = a^2/\lambda L$ ,  $L$  — расстояние между зеркалами,  $R$  — радиус кривизны зеркал,  $a$  — радиус апертуры зеркал.

Отметим, что в случае телескопического резонатора [3] величины  $\xi$ ,  $\gamma$ ,  $M$  в уравнении (П. 1) определяются соотношениями

$$\xi = \sqrt{\frac{2kR_1}{R_1^2 - R_2^2}} r, \quad \gamma = \frac{l^2}{R_1 R_2} \left( l = \frac{R_1 - R_2}{2} \right), \quad M = 2a \sqrt{\frac{2kR_1}{R_1^2 - R_2^2}}.$$

Решение уравнения (П. 1) строим в виде ряда функций, удовлетворяющих этому уравнению при  $M \rightarrow \infty$ . В этом случае можно показать, что функции  $u_n(\xi)$  удовлетворяют дифференциальному уравнению параболоида вращения

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{du}{d\xi} + \left[ -i4\sqrt{\gamma + \gamma^2} \left( \nu + \frac{1}{2} \right) + 4(\gamma + \gamma^2)\xi^2 - \frac{m^2}{\xi^2} \right] u_n(\xi) = 0, \quad (\text{П. 2})$$

решения которого, ограниченные на поверхности зеркал, выражаются через функцию Уиттекера [12]  $M^{-\frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}, \frac{n}{2}} (2i\sqrt{\gamma + \gamma^2}\xi^2)$ . Подставляя эти функции в (П. 1) при  $M \rightarrow \infty$ , получим собственные значения уравнения в виде:  $h = m^{-\nu+1/2}$ , где  $m = 1 + 2\gamma + 2\sqrt{\gamma + \gamma^2}$ .  $\text{Re } \nu$  в выражении для  $h$  определяет потери энергии между двумя последовательными отражениями световой волны от зеркал резонатора, а  $\text{Im } \nu$  определяет фазовый набег волны на один проход через резонатор. Легко видеть, что функции, у которых величины  $\nu$  отличаются на  $\pm i2\pi j/\ln m$  ( $j$  — целое число), имеют одинаковые по модулю собственные значения. Функции Уиттекера при  $|2\sqrt{\gamma + \gamma^2}\xi^2| \gg 1$  могут быть асимптотически представлены [12] в виде

$$M^{-\frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}, \frac{n}{2}} \approx \xi^{-1} \left[ \frac{\exp \frac{-i\pi(n+1)}{4}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2} + \frac{\nu}{2} + \frac{1}{4}\right)} W_1(\nu, \xi) + \frac{\exp \frac{i\pi(n+1)}{4}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2} - \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}\right)} W_2(\nu, \xi) \right], \quad (\text{П. 3})$$

где

$$W_1 = (2\sqrt{\gamma + \gamma^2}\xi^2)^{\frac{\nu}{2} + \frac{1}{4}} e^{i\sqrt{\gamma + \gamma^2}\xi^2}, \quad W_2 = (2\sqrt{\gamma + \gamma^2}\xi^2)^{-\frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}} e^{-i\sqrt{\gamma + \gamma^2}\xi^2}, \quad (\text{П. 4})$$

т. е. суперпозиции двух встречных бегущих волн  $W_1(\nu, \xi)$  — от центра к краям зеркал и  $W_2(\nu, \xi)$  — от краев зеркал к центру.

Основываясь на волноводных представлениях, использованных Вайнштейном при решении ряда задач [1], считаем, что набегая на край зеркала,

волна  $W_1(\nu, \xi)$  преобразуется в отраженную волну  $W_2(\nu, \xi)$  и трансформированные волны  $W_2(\nu_j, \xi)$  с

$$\nu_j = \nu \pm \frac{i2\pi j}{\ln m}, \quad j=1, 2, 3, \dots \quad (\text{П. 5})$$

Поэтому искомое решение уравнения (П. 1) будем строить в виде

$$u_n(\xi) = \sum_j a_j u_n(\nu_j, \xi), \quad (\text{П. 6})$$

где функции  $u_n(\nu_j, \xi)$  имеют асимптотическое представление (П. 3), а  $\nu_j$  определяется выражением (П. 5). Если в первом приближении пренебречь трансформированными волнами, то колебания вдали от оси резонатора могут быть описаны суперпозицией, набегающей на край зеркала волны  $W_1(\nu, \xi)$  и отраженной от этого края волны  $W_2(\nu, \xi)$  с коэффициентом отражения  $R_0$ . Связывая этот коэффициент с коэффициентами при  $W_1(\nu, \xi)$  и  $W_2(\nu, \xi)$  в асимптотическом выражении (П. 3), получим уравнение для комплексных собственных частот резонатора

$$R_0 e^{-\frac{i\pi(n+1)}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2} - \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2} + \frac{\nu}{2} + \frac{1}{4}\right)} = 1. \quad (\text{П. 7})$$

Подставляя в уравнение (П. 1)  $u(\nu, \xi) = W_1 + R_0 W_2$ , получим

$$\int_{-\frac{M}{2}}^{\infty} e^{\frac{i(1+2\gamma)}{2}(\xi_1^2 + \xi^2)} J_n(\xi, \xi_1) [W_1(\nu, \xi_1) + R_0 W_2(\nu, \xi_1)] d\xi_1 = 0. \quad (\text{П. 8})$$

Умножая уравнение (П. 8) на  $W_1(\nu_0, \xi)$  и интегрируя по  $\xi$  от 0 до  $M/2$ , выразим  $R_0$  в виде

$$R_0 = \left(\frac{M}{2}\right)^{2\nu-1} \frac{1}{\left(m - \frac{1}{m} \ln m\right)} e^{\frac{i}{2}\left(m - \frac{1}{m}\right)\left(\frac{M}{2}\right)^2} \quad (\text{П. 9})$$

с точностью до величины порядка  $O\left(1/\sqrt{m - \frac{1}{m} \frac{M}{2}}\right)$ . Окончательно уравнение (П. 7) примет вид

$$\frac{(2\pi N_{\text{экр.}})^{\nu-0.5}}{2 \ln m} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2} - \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2} + \frac{\nu}{2} + \frac{1}{4}\right)} e^{i2\pi N_{\text{экр.}} - \frac{i\pi}{2}(n+2)} = e^{i2\pi p}, \quad (\text{П. 10})$$

$$N_{\text{экр.}} = \frac{N}{2} \left(m - \frac{1}{m}\right).$$

#### Литература

- [1] Л. А. Вайнштейн. Открытые резонаторы и открытые волноводы. Изд. «Сов. радио», М., 1966.
- [2] A. S. Liegman, L. Agrathoon. J. Quant. Electron. QE-3, № 4, 156, 1967.
- [3] Ю. А. Ананьев, В. Е. Шерстобитов, Н. А. Свентицкая. ЖЭТФ, 55, 130, 1968.
- [4] R. L. Sandersen, W. Streifer. Appl. Opt., 8, 2129, 1969.
- [5] A. E. Siegman, H. Y. Miller. Appl. Opt., 2729, 1970.
- [6] Г. Н. Винокуров, В. В. Любимов, И. Б. Орлова, В. Ф. Петров. Тр. V Всесоюз. симпозиума по дифракции и распространению волн (Записки научных семинаров ЛОМИ им. Стеклова, стр. 72—81). Изд. «Наука», Л., 1971.
- [7] Ю. А. Ананьев, В. Е. Шерстобитов. Сб. «Квантовая электроника», № 3. Изд. «Сов. радио», М., 1971.
- [8] Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. Специальные функции. Изд. «Наука», М., 1968.
- [9] Г. Бейтмен, А. Эрдейн. Высшие трансцендентные функции, 2. Изд. «Наука», М., 1966.
- [10] Б. М. Яворский, А. А. Детлаф. Справочник по физике. М., 1966.
- [11] А. Зоммерфельд. Оптика. ИЛ, 1953.
- [12] Э. Т. Упштейкер, Дж. Н. Ватсон. Курс современного анализа, 2. Физматгиз, М., 1963.

Поступило в Редакцию 28 июня 1971 г.