

О СДВИГЕ ЧАСТОТЫ ПРИ РАССЕЯНИИ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ
НА ЭЛЕКТРОНАХ В СТАТИЧЕСКОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В. Р. Халилов и Б. В. Холомай

Методами классической электродинамики рассмотрена задача об излучении электрона в магнитном поле и поле электромагнитной волны, бегущей вдоль направления вектора напряженности магнитного поля. Показано, что если выбрать напряженности полей электромагнитной волны конечной длительности (пакет волн), то возникает сдвиг в частотах излучения электрона, предсказанный другими авторами. При учете магнитного поля величина сдвига может быть существенно большей по сравнению с оценкой, полученной в статье [2].

1. Ранее рядом авторов [1] было показано, что если при рассмотрении эффекта Комптона пользоваться точными решениями квантовых уравнений для электрона в поле плоской электромагнитной волны, полученными Волковым [3], то частота рассеянного фотона отличается от обычной комптоновской. Разность частот, пропорциональная параметру $V_0^2 = (eE_0/mc\omega)^2$ (E_0 — амплитуда электрического поля волны, ω — частота), как предполагается, обязана тому факту, что классическая волна состоит из бесконечного «числа фотонов», благодаря чему появляются эффекты интенсивности, приводящие, в частности, к изменению массы электрона на величину V_0^2 . Понятно, что это изменение в свою очередь приводит к сдвигу частоты рассеянного фотона. Однако в классической теории, в аналогичной задаче, в случае рассеяния бесконечной монохроматической волны на электроны, сдвига частоты не возникает. В статье [2] было показано, что сдвиг частоты в рассеянной волне будет, если взять волну конечной длительности (пакет волн) и связать с моментом ее включения. В момент включения электрон приобретает среднюю скорость в направлении распространения волны, благодаря чему частота рассеянной волны оказывается сдвинутой из-за эффекта Доплера.

На наш взгляд, сдвиг частоты рассеянного фотона в квантовой теории также обязан моментам включения и выключения электромагнитной волны. Действительно, интегрирование соответствующих матричных элементов по временному интервалу, пусть даже бесконечному, фиксирует моменты включения волны.

Использование точных квантовых и классических решений для электрона в плоской волне приводит к изменению спектра рассеянной волны. Оказывается, что частота рассеянного фотона (или волны) кратна частоте начальной плоской волны $\omega' = l\omega(1 - V_0^2(1 - \cos\theta)/2\alpha^2)$, т. е. (по квантовой интерпретации) возможно множественное поглощение фотонов из волны с излучением одного более жесткого. Интересно, что если вычислить частоту рассеянного фотона для такого процесса в обычной теории рассеяния, т. е. суммируя диаграммы Фейнмана [4], то при правильном учете члена $(e^2/c^2)AA^*$ также возникает добавка, характеризующая сдвиг частоты рассеянного фотона, адекватная полученной в классической теории при соответствующем переходе к классическому пределу [4].

Интересная ситуация возникает при рассмотрении комбинационного рассеяния пакета волн электроном, находящимся во внешнем магнитном

поле. В этом случае величина сдвига может быть существенно большей по сравнению с полученной в [2] из-за появления резонанса в рассматриваемой системе.

2. Уравнение движения. Рассмотрим задачу о движении электрона в магнитном поле и поле плоской электромагнитной волны. Пусть векторы напряженности электрического и магнитного полей волны заданы в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_0 e^{-\gamma|\omega|\xi} \{ \mathbf{e}_1 \cos \omega\xi + g \mathbf{e}_2 \sin \omega\xi \}, \\ \mathbf{H} &= [n\mathbf{E}] \end{aligned} \quad (1)$$

(γ — параметр обрезания, $g = \pm 1$ — псевдоскаляр, характеризующий круговую поляризацию волны), т. е. $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ стремятся к нулю при $\xi = t - z/c \rightarrow \pm\infty$. В данном случае нас не интересует вопрос, насколько наш выбор $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ соответствует экспериментальной ситуации при $\xi \rightarrow 0$. Существенным является лишь то, что в амплитудах напряженностей электрического и магнитного полей волны имеется параметр обрезания, учитывающий моменты включения волны на бесконечности.

Уравнения движения заряда в полях (1) и однородном и постоянном магнитном поле $\mathbf{H} = \{0, 0, H\}$ записываются в виде

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \frac{e}{mc^2} [\mathcal{E} - c(n\mathbf{P})] \mathbf{A}' - \frac{en}{mc} (\mathbf{P}\mathbf{A}) + \frac{eH}{mc} [\mathbf{P}n], \\ \dot{\mathcal{E}} &= -\frac{e}{m} (\mathbf{P}\mathbf{A}'), \end{aligned} \quad (2)$$

где точкой обозначено дифференцирование по собственному времени. Здесь $m\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{P}$; $mc^2 t = \mathcal{E}$.

Решения системы уравнений (2) даются формулами

$$\begin{aligned} x &= \frac{c\beta}{\omega_0} \cos \frac{\omega_0}{\omega} \chi + \frac{V_0 c \left(1 - g \frac{\omega_0}{\omega}\right) e^{-\gamma|\chi|}}{\omega\alpha\Delta} \frac{(\gamma \operatorname{sign} \chi \sin \chi + \cos \chi)}{1 + \gamma^2} + \\ &+ \frac{cV_0 \gamma \operatorname{sign} \chi e^{-\gamma|\chi|} (-\gamma \operatorname{sign} \chi \cos \chi + \sin \chi)}{\omega\alpha\Delta (1 + \gamma^2)}, \\ y &= \frac{c\beta}{\omega_0} \sin \frac{\omega_0}{\omega} \chi + \frac{cgV_0 \left(1 - g \frac{\omega_0}{\omega}\right) e^{-\gamma|\chi|}}{\omega\alpha\Delta} \frac{(-\gamma \operatorname{sign} \chi \cos \chi + \sin \chi)}{1 + \gamma^2} - \\ &- g \frac{cV_0 \gamma \operatorname{sign} \chi e^{-\gamma|\chi|} (\gamma \operatorname{sign} \chi + \cos \chi)}{\omega\alpha\Delta (1 + \gamma^2)}, \\ z &= -\frac{c\beta}{\omega\alpha} \frac{gV_0 e^{-\gamma|\chi|}}{\Delta^2} \left\{ \left[\gamma^2 - \left(1 - g \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \right] \sin \left(1 - g \frac{\omega_0}{\omega}\right) \chi + \right. \\ &+ \left. 2\gamma \left(1 - g \frac{\omega_0}{\omega}\right) \operatorname{sign} \chi \cos \left(1 - g \frac{\omega_0}{\omega}\right) \chi \right\} + \frac{cV_0^2 (1 - e^{-2\gamma|\chi|})}{4\omega\alpha^2 \gamma\Delta \operatorname{sign} \chi}, \end{aligned} \quad (3)$$

где введены следующие обозначения:

$$\omega_0 = \frac{e_0 H}{mca}, \quad \operatorname{sign} \chi = \begin{cases} 1 & \chi \geq 0 \\ -1 & \chi < 0 \end{cases}; \quad \chi = \omega\xi, \quad \Delta = \left(1 - g \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 + \gamma^2.$$

Интегралами движения в нашем случае будут являться следующие величины: $\alpha = \mathcal{E} - c(n\mathbf{P})/mc^2$, β (β связана с азимутальной скоростью электрона при выключении волны). $\beta = cV_\varphi$, где V_φ — проекция скорости заряда на орт $\mathbf{e}_\varphi$ сферической системы координат.

Очевидно, что если параметр обрезания γ стремится к нулю, то мы переходим к задаче, рассмотренной ранее в [5].

3. Излучение заряда. Постановка задачи об излучении заряда в полях такой конфигурации в смысле выбора характеристики интенсивности излучения существенно зависит от величины параметра γ . Действительно, если $\gamma \rightarrow 0$, то мы имеем суперпозицию постоянного магнитного поля и

бесконечной плоской волны. В этом случае имеет смысл рассматривать мощность излучения заряда, т. е. изменение его энергии в единицу времени. Полная излученная энергия за бесконечное время будет бесконечна.

В случае, когда $\gamma \neq 0$ ситуация несколько иная. На электрон, находящийся в магнитном поле, в течение конечного времени действует электромагнитная волна. Тогда ясно, что синхротронная часть излученной энергии, обусловленная движением электрона в магнитном поле, будет той же, что и при $\gamma = 0$ (т. е. для этой части по-прежнему имеет смысл рассматривать мощность излучения электрона).

Для характеристики другой части энергии излучения электрона, возникающей благодаря воздействию на заряд электромагнитной волны, мы введем интегральную величину, равную полной излученной энергии за все время действия электромагнитного импульса. Ясно, что при усреднении по бесконечному промежутку времени среднее значение этой величины (мощность излучения) будет стремиться к нулю.

Для характеристики поляризационных и спектрально-угловых свойств интенсивности излучения введем, как обычно, векторы-потенциалы поля излучения A_φ и A_θ по формулам [6]

$$\left. \begin{aligned} A_{[\varphi, \theta]} &= \frac{e^{ikr}}{r} \int e V_{[\varphi, \theta]} e^{i[\omega t - kR(t)]} dt, \\ A &= \frac{e}{r} \sum_{n, l} \{ i e_\varphi A_\varphi(n, l) + e_\theta A_\theta(n, l) \} e^{-i\omega_n t + i\Phi}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

В этих формулах V_φ и V_θ — проекции скорости заряда на орты e_φ и e_θ сферической системы координат соответственно, $R(t)$ — радиус-вектор заряда, определяемый формулами (3), а Φ — несущественный фазовый множитель, исчезающий при образовании квадрата модуля $|A|^2$.

Интенсивность поляризованного излучения определится тогда выражением [6]

$$dW = \frac{e^2}{4\pi c} \sum_{n, l} [e_2 A_\varphi - e_3 A_\theta]^2 \omega^2 d\Omega. \quad (5)$$

Здесь e_2, e_3 характеризуют различные поляризации поля излучения [6]. При этом под интенсивностью излучения мы будем понимать либо потери энергии в единицу времени ($\gamma \rightarrow 0$), либо полную энергию, теряемую электроном за все время присутствия электромагнитной волны. Подставляя решения (3) в (4) и учитывая, что $V_\varphi(\xi)$ и $V_\theta(\xi)$ определяются равенствами

$$\left. \begin{aligned} V_\varphi &= \frac{c}{\alpha} \frac{d\xi}{dt} \left\{ \alpha \beta \cos\left(\frac{\bar{\omega}_0}{\omega} \chi - \varphi\right) + \frac{g V_0 \left(1 - g \frac{\bar{\omega}_0}{\omega}\right) e^{-\gamma|\chi|}}{\Delta} \cos(\chi - g\varphi) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{g V_0 \gamma \operatorname{sign} \chi e^{-\gamma|\chi|} \sin(\chi - g\varphi)}{\Delta} \right. \\ V_\theta &= \frac{c}{\alpha} \frac{d\xi}{dt} \left\{ -\alpha \beta \cos \theta \sin\left(\frac{\bar{\omega}_0}{\omega} \chi - \varphi\right) - \frac{V_0 \left(1 - g \frac{\bar{\omega}_0}{\omega}\right) e^{-\gamma|\chi|} \cos \theta \sin(\chi - g\varphi)}{\Delta} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{V_0 \gamma \operatorname{sign} \chi}{\Delta} e^{-\gamma|\chi|} \cos \theta \cos(\chi - g\varphi) - U_s \sin \theta \right\}; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

для вектор-потенциалов поля излучения найдем соответственно

$$\left. \begin{aligned} A_{[\varphi, \theta]} &= \frac{e^{ikr}}{cr} \int e V_{[\varphi, \theta]} d\xi e^{i\omega' \xi - i\beta \frac{\omega'}{\bar{\omega}_0} \sin \theta \cos\left(\frac{\bar{\omega}_0}{\omega} \chi - \varphi\right)} \times \\ &\quad \times e^{-i \frac{\omega'}{\bar{\omega}_0} \frac{|V_0|}{\alpha} \frac{\sin \theta e^{-\gamma|\chi|}}{\sqrt{(1+\gamma^2)} \Delta} \cos(\chi - g\varphi - \lambda) + \frac{i g V_0 \beta \omega' e^{-\gamma|\chi|}}{\alpha \omega \Delta} (1 - \cos \theta) \cos\left[\left(1 - g \frac{\bar{\omega}_0}{\omega}\right) \chi - \varphi\right]} \times \\ &\quad \times e^{-i \frac{\omega'}{\bar{\omega}_0} \frac{V_0^2 (1 - \cos \theta)}{4 \alpha^2 \gamma \operatorname{sign} \chi} \frac{(1 - e^{-2\gamma|\chi|})}{\Delta}}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где

$$\lambda = \arctg \frac{\gamma \operatorname{sign} \chi \left(2 - g \frac{\tilde{\omega}_0}{\omega} \right)}{1 - g \frac{\tilde{\omega}_0}{\omega} - \gamma^2}, \quad \psi = \arctg \frac{\left[\gamma^2 - \left(1 - g \frac{\tilde{\omega}_0}{\omega} \right) \right]^2}{2\gamma \operatorname{sign} \chi \left(1 - g \frac{\tilde{\omega}_0}{\omega} \right)}.$$

Рассмотрим сначала предел формул (7) при $\gamma \rightarrow 0$. Тогда, используя соотношение, известное из теории бesselевых функций

$$e^{iz \cos \varphi} = \sum_k J_k(z) i^k e^{ik\varphi}, \quad (8)$$

получим

$$\left. \begin{aligned} A_\varphi &= \beta \frac{\partial F_{n,l}}{\partial \alpha} + \frac{gV_0}{\alpha \left(1 - g \frac{\tilde{\omega}_0}{\omega} \right)} \frac{\partial F_{n,l}}{\partial b}, \\ A_\theta &= \operatorname{ctg} \theta F_{l,n} + \frac{\omega \left(1 - g \frac{\tilde{\omega}_0}{\omega} \right)}{\omega' \sin \theta} G_{l,n}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Функции $F_{n,l}$ и $G_{n,l}$ даются в виде бесконечных сумм

$$\left. \begin{aligned} F_{n,l} &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-g)^s J_s(c) J_{l-s}(b) J_{s+gn}(a), \\ G_{n,l} &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-g)^s s J_s(c) J_{l-s}(b) J_{s+gn}(a). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Аргументы функций Бесселя при этом определяются формулами

$$a = \beta \frac{\omega'}{\tilde{\omega}_0} \sin \theta, \quad b = \frac{V_0}{\alpha} \frac{\omega'}{\omega} \frac{\sin \theta}{\left(1 - g \frac{\tilde{\omega}_0}{\omega} \right)}; \quad c = \frac{V_0}{\alpha} \frac{\omega'}{\omega} \beta \frac{1 - \cos \theta}{\left(1 - g \frac{\tilde{\omega}_0}{\omega} \right)}$$

и совпадают с полученными в [5] для случая излучения электрона в магнитном поле и поле плоской бесконечной волны. Однако частота излучения, являющаяся комбинацией частот ω и $\tilde{\omega}_0$, даже в пределе при $\gamma \rightarrow 0$ отлична от приведенной в работе [5] и равна

$$\omega' = (n\tilde{\omega}_0 + l\omega) \left[1 + \frac{V_0^2 (1 - \cos \theta)}{2\alpha^2 \left(1 - g \frac{\tilde{\omega}_0}{\omega} \right)^2} \right]^{-1}. \quad (11)$$

Наличие однородного магнитного поля приводит к появлению в (11) резонансного множителя, увеличивающего сдвиг частоты по сравнению со случаем рассеяния электромагнитной волны на свободных электронах. Отметим также, что наблюдение сдвига частоты при рассеянии электромагнитной волны на электроне в магнитном поле проще осуществить экспериментально, чем в случае рассеяния на свободных электронах, так как интенсивность синхротронного излучения ($e=0$) превосходит интенсивность излучения электрона в плоской волне [8]. Заметим, что при получении формул (1)–(11) мы считали, что γ стремится к нулю быстрее, чем $1 - g \frac{\tilde{\omega}_0}{\omega}$. Для реальных оценок можно взять величину

$\left(1 - g \frac{\tilde{\omega}_0}{\omega} \right) \sim 10^{-2} \div 10^{-3}$. Таким образом, если рассеяние электромагнитной волны происходит на электронах, движущихся в магнитном поле, величина сдвига частоты рассеянных фотонов может быть значительной.

Если интенсивность электромагнитной волны мала ($V_0 \ll 1$), основной вклад в излучение вдали от резонанса (при релятивистских скоростях электрона ($\beta \sim 1$)) дает обычное синхротронное излучение. Интенсивность излучения на частотах (11) пропорциональна V_0^{2l} и носит характер поправок к основным синхротронным членам. Однако максимум в излучении на этих частотах значительно сдвинут в сторону коротких длин волн. Например, для $l=1$

$$\omega' = \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2} \right)^2 \omega \left[1 + \frac{V_0^2 (1 - \cos \theta)}{2\alpha^2 \left(1 - g \frac{\bar{\omega}_0}{\omega} \right)^2} \right]^{-1}. \quad (12)$$

Множитель $(\mathcal{E}/mc^2)$ типичен в задаче рассеяния. Он характеризует сдвиг частоты рассеянной волны релятивистским движущимся источником (энергия электрона равна $\mathcal{E}$). Если электрон в момент включения электромагнитной волны покоился в начале выбранной системы координат, т. е. он «стартовал» из состояния покоя, то аргумент функции Бесселя $J_{g+\alpha n}^{(a)}$ по порядку величины равен b (более подробно об этом см. в [7]). В этом случае при небольшой расстройке частот $\omega \sim g\bar{\omega}_0 + \Delta$, интенсивности излучения на гармониках $n\bar{\omega}_0$ и $l\omega$ для значений $l=n$ по порядку величины равны друг другу. При этом, если $\frac{V_0^2}{\alpha^2 \left(1 - g \frac{\bar{\omega}_0}{\omega} \right)^2}$ все же много меньше

единицы, сдвиг частоты будет наиболее проявляться на низких гармониках при рассеянии назад $\theta = \pi$.

Заметим также, что вблизи резонанса (даже при $V_0 \ll 1$), возможно интенсивное излучение на высоких гармониках l , что в квантовой трактовке соответствует множественному поглощению фотонов из волны. При $H=0$, когда электрон свободен, такой эффект был невозможен; интенсивность излучения высоких гармоник при $V_0 \ll 1$ всегда подавлена.

Рассмотрим теперь излучение заряда в магнитном поле при воздействии на заряд коротких электромагнитных импульсов $\gamma \gg 1$. Из общих соображений ясно, что в этом случае резкие частотные линии будут наблюдаться лишь в чисто синхротронной части спектра. Формы линий излучения на комбинационных частотах должны иметь вид лорентцовых кривых. Действительно, для получения компонент вектор-потенциалов A_φ и A_θ в этом случае в формулах (6) можно провести разложение экспоненты по величине $e^{-i|\mathbf{r}|/\gamma^2}$. Получающиеся для A_φ^2 и A_θ^2 выражения довольно громоздки и неудобны для конкретного исследования. Отметим только, что в общем случае формулы для A_φ^2 и A_θ^2 разбиваются на две группы членов: «чисто» синхротронную часть с резкими частотными линиями $\omega' = n\bar{\omega}_0$ и часть, возникшую от рассеяния электромагнитной волны. Формы спектральных линий рассеянной волны даются лорентцовыми кривыми типа

$$\frac{f_1(\omega, \gamma)}{\gamma^2 \omega^2 + [\omega' - n\bar{\omega}_0 - \omega + g\bar{\omega}_0]^2}, \quad \frac{f_2(\omega, \gamma)}{[\gamma^2 \omega^2 + (\omega' - n\bar{\omega}_0 \pm \omega)^2]}, \quad \frac{f_3(\omega, \gamma)}{\left[\gamma^2 + \left(1 - g \frac{\bar{\omega}_0}{\omega} \right)^2 \right]}.$$

Энергия излучения на этих «гармониках» (разумеется, термин гармоники здесь в некотором смысле условный) пропорциональна V_0^2/γ^3 и имеет достаточно острый максимум вблизи точек $\omega' = n\bar{\omega}_0 \pm \omega$, $\omega' = n\bar{\omega}_0 + \omega - g\bar{\omega}_0$, т. е. вклад от этих членов существенно зависит от величины параметров V_0^2 и γ . В заключение найдем полную интенсивность излучения заряда в ограниченной электромагнитной волне ($H=0$). Для этого воспользуемся формулой

$$W = \frac{2e^4 \alpha^2}{3m^2 c^3} \int_{-T}^T \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{H}}{c} [\mathbf{r}'_i \mathbf{n}] \right)^2 \left(1 + \frac{z'_i}{c} \right) d\xi,$$

в которой положим $H=0$. $2T$ — интервал времени действия импульса. Вычисляя получающийся интеграл, найдем

$$W = \frac{2e^4 \alpha^2}{3m^2 c^3} \frac{E_0^2}{\gamma \omega} \left[1 - e^{-2\gamma \omega T} + \frac{V_0^2 (1 - e^{-4\gamma \omega T})}{4\alpha^2 (1 + \gamma^2)} \right]. \quad (13)$$

Получим мощность излучения заряда в единицу времени при $\gamma \rightarrow 0$. Тогда, устремив в формуле (13) γ к нулю и разделив получившееся выражение на $2T$, найдем

$$W = \frac{W(\gamma \rightarrow 0)}{2T} = \frac{2e^4 \alpha^2}{3m^2 c^3} E_0^2 \left(1 + \frac{V_0^2}{2\alpha^2}\right). \quad (14)$$

Формула (14) при соответствующих начальных условиях совпадает с полученной в [8].

Авторы благодарны И. М. Тернову за полезную дискуссию.

Литература

- [1] H. S. Brown, T. W. Kibble. Phys. Rev., 27, 218, 1963; А. И. Никишов, В. И. Ритус. ЖЭТФ, 46, 776, 1964; И. И. Гольдман. ЖЭТФ, 46, 1417, 1964.
- [2] T. W. Kibble. Phys. Rev., 138, 3, 1965.
- [3] D. M. Volkov. Zs. F. Phys., 94, 250, 1935.
- [4] J. Reiss, J. H. Eberly. Phys. Rev., 145, 1039, 1966; J. H. Eberly, J. Reiss. Phys. Rev., 151, 1059, 1966.
- [5] В. Г. Багров, В. Р. Халилов. Изв. вузов, физика, 2, 37, 1968.
- [6] Синхротронное излучение. Сб. статей под редакцией А. А. Соколова и И. М. Тернова. Изд. «Наука», 1966.
- [7] В. Р. Халилов, Б. В. Холомай. Вестн. МГУ, 1974.
- [8] И. М. Тернов, В. Г. Багров, А. М. Хапаев, К. С. Клоповский. Изв. вузов, физика, 9, 168, 1967.

Поступило в Редакцию 22 сентября 1971 г.