937

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА:

алгебра и аналитическая геометрия на плоскости

ПРАКТИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО
для студентов экономических специальностей вуза

Гомель
ГГУ им. Ф. Скорины
2011

УДК 512 : 514.123.1(076)
ББК 22.1 я73
В 937

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук А. И. Рябченко;
кафедра алгебры и геометрии УО «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

В 937 **Высшая математика: алгебра и аналитическая геометрия на плоскости** : практическое руководство / А. В. Бузланов, Е. Н. Бородич, Р. В. Бородич, Т. В. Бородич; М-во образования РБ, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2011. – 48 с.
ISBN 978-985-439-591-3

В практическом руководстве рассматриваются теоретические проблемы алгебры и аналитической геометрии на плоскости : уравнение прямой на плоскости, матрицы, определители, системы линейных уравнений, векторы. Даются примеры, задания, вопросы для самостоятельного изучения и самоконтроля.

Адресовано студентам экономических специальностей вуза.

УДК 512 : 514.123.1(076)
ББК 22.1 я73

ISBN 978-985-439-591-3

Содержание

Введение

Математика – одна из самых древних наук. **Основные особенности математики – абстрактность, логическая строгость, исключительная широта её приложений.** Абстракция свойственна не только математике. Но если в других науках для доказательства утверждений исследователи постоянно обращаются к опыту, то в математике справедливость утверждения доказывается не проверкой его на примерах, а логическим путём рассуждений и строгих математических выкладок. Без применения математических методов была бы невозможна современная техника. Точные науки (астрономия, механика, физика, химия) развивают свои теории, используя математический аппарат, их прогресс был бы немыслим без математики. Наиболее значительным научным достижением было внедрение математических методов в экономическую науку. Эффективное управление экономическими процессами может быть осуществлено, только на основе применения точных математических методов во всех сферах народного хозяйства – от прогнозирования размещения полезных ископаемых до изучения спроса на товары широкого потребления и бытовые услуги, от изучения потребности в рабочей силе до планирования транспортных артерий, пассажирских перевозок и т. д. **Современный экономист, финансист, бухгалтер должен не только знать основы математики, но и хорошо владеть новейшими математическими методами исследования,** которые могут применяться в области его деятельности.

1 Аналитическая геометрия на плоскости

1.1 Цели и задачи аналитической геометрии

Целю курса является овладение основами высшей математики: основными понятиями, фактами и методами её разделов таких, как аналитическая геометрия, высшая алгебра, векторная и линейная алгебра, математический анализ и дифференциальные уравнения. Небольшое число часов, отводимое читаемому курсу, не позволит нам подробно и полно осветить материал этих разделов, но основные понятия, методы и приложения их отражены в лекциях. Для более глубокого овладения курсом «Высшая математика» советуем обратиться к соответствующей литературе.

Аналитическая геометрия отличается от элементарной геометрии главным образом своим методом. Элементарная геометрия доказывает свои теоремы с помощью чертежа, т. е. с помощью построения. Поэтому говорят, что **элементарная геометрия есть геометрия построений.** В аналитической геометрии при выводе её основных правил и формул первоначально также прибегают к построению – чертежу, но затем, опираясь на полученные правила и формулы, все геометрические задачи решаются с помощью вычислений. Поэтому говорят, что **аналитическая геометрия есть геометрия вычислений.**

Элементарная геометрия не имеет общего метода доказательства теорем, т. к. те построения, которые применяются для доказательства одной теоремы неприменимы для доказательства другой, и поэтому для каждой новой теоремы приходится отыскивать и новое построение при её доказательстве. **Аналитическая же геометрия обладает общим методом решения геометрических задач,** т. к. правила и формулы, с помощью которых решается данная, отдельно взятая задача, применимы и для решения целого ряда других весьма разнообразных геометрических задач. Этот метод, называемый **методом координат**, был введён в науку в 17 в. известным французским математиком и философом Рене Декартом. В основе метода координат лежит понятие системы координат.

1.2 Системы координат на плоскости

1.2.1 Прямоугольная система координат на плоскости

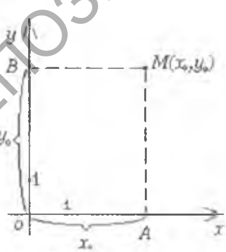


Рисунок 1.1

Две взаимно перпендикулярные оси Ox и Oy, имеющие общее начало O и одинаковую масштабную единицу (рисунок 1.1), образуют **прямоугольную (декартову) систему координат на плоскости.** Ось Ox называется **осью абсцисс,** ось Oy – **осью ординат,** а обе оси вместе – **осями координат**. Точка O пересечения осей называется **началом координат**. Плоскость, в которой расположены оси Ox и Oy, называется **координатной плоскостью** и обозначается Oxy.

Пусть M – произвольная точка плоскости. Опустим из неё перпендикуляры MA и MB на оси Ox и Oy. Точке M на плоскости ставят в соответствие два числа:

– **абсциссу x_0**, равную расстоянию от O до A, взятому со знаком «+», если A лежит правее O, и со знаком «–», если A лежит левее O;

– **ординату y_0**, равную расстоянию от точки O до B, взятому со знаком «+», если B лежит выше O, и со знаком «–», если B лежит ниже O.

Абсцисса и ордината точки M называются **прямоугольными (декартовыми) координатами точки M.** Запись $M(x_0; y_0)$ означает, что точка M имеет абсциссу, равную x_0, и ординату, равную y_0.

Введение прямоугольной системы координат на плоскости позволяет установить взаимно однозначное соответствие между множеством всех точек плоскости и множеством пар чисел, что даёт возможность при решении геометрических задач применять алгебраические методы.

1.2.2 Полярная система координат

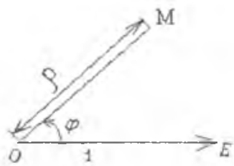


Рисунок 1.2

Полярная система координат состоит из некоторой точки O, называемой **полюсом**, и исходящего из неё луча OE – **полярной оси.** Кроме того, задаётся **единица масштаба** для измерения длин отрезков.

Пусть задана полярная система координат и пусть M – произвольная точка плоскости. Пусть ρ – расстояние от M до полюса O; φ – угол, на который надо повернуть против часовой стрелки полярную ось для совмещения с лучом OM (рисунок 1.2).

Полярными координатами точки M называются числа ρ и φ. При этом число ρ считается первой координатой и называется **полярным радиусом**, число φ – второй координатой и называется **полярным углом.** Точка M с полярными координатами ρ и φ обозначается $M(\rho; \varphi)$, причём $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$. Однако в ряде случаев приходится рассматривать углы, большие 2π, а также отрицательные углы, т. е. отсчитываемые от полярной оси по часовой стрелке. Полюсу O соответствует полярный радиус $\rho = 0$, а полярный угол для него не определён.

1.2.3 Связь между полярными и декартовыми координатами

Чтобы установить **связь между полярными координатами точки и её прямоугольными координатами,** будем предполагать, что начало прямоугольной системы координат находится в полюсе, а положительная полуось абсцисс совпадает с полярной осью. Пусть точка M имеет прямоугольные координаты x_0 и y_0 и полярные координаты ρ и φ (рисунок 1.3). Нетрудно доказать, что при любом расположении точки M, верны равенства

$$x_0 = \rho \cdot \cos\varphi, \;\; y_0 = \rho \cdot \sin\varphi. \tag{1.1}$$

Формулы (1.1) выражают прямоугольные координаты через полярные. Выражения полярных координат через прямоугольные следуют из формул (1.1):

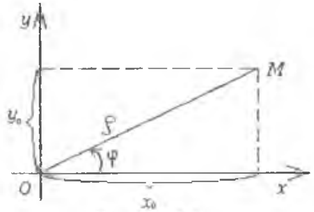


Рисунок 1.3

$$\rho = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}\ ,\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y_0}{x_0}. \qquad (1.2)$$

Заметим, что формула $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y_0}{x_0}$ определяет два значения полярного угла φ, т. к. $0 \le \varphi < 2\pi$. Из этих двух значений угла φ выбирают то, при котором удовлетворяются равенства (1.1).

Пример. Даны прямоугольные координаты: (2; 2). Найти её полярные координаты, считая, что полюс совмещён с началом прямоугольной системы координат, а полярная ось совпадает с положительной полуосью абсцисс.

Решение. По формулам (1.2) имеем:

$$\rho = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{2}{2} = 1.$$

Тогда $\varphi = \frac{\pi}{4}$ или $\varphi = \frac{5\pi}{4}$. Но так как $x > 0$ и $y > 0$, то данная точка находится в первой координатной четверти. Следовательно, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

1.3 Расстояние между двумя точками

Пусть задана прямоугольная система координат.

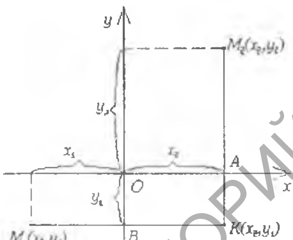


Рисунок 1.4

Теорема 1.1. Для любых двух точек $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$ плоскости расстояние d между ними выражается формулой

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ . \qquad (1.3)$$

Доказательство. Опустим из точек M_1 и M_2 перпендикуляры M_1B и M_2A соответственно на оси Oy и Ox и обозначим через K точку пересечения прямых M_1B и M_2A (рисунок 1.4). Возможны следующие случаи:

1) точки M_1, M_2 и K различны. Очевидно, что точка K имеет координаты $(x_2; y_1)$. Нетрудно заметить что $M_1K = |x_2 - x_1|$, $M_2K = |y_2 - y_1|$. Т. к. ΔM_1KM_2 прямоугольный, то по теореме Пифагора

$$d = M_1M_2 = \sqrt{M_1K^2 + M_2K^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ ;$$

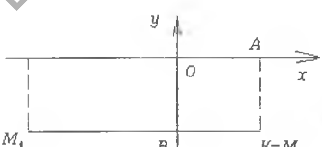


Рисунок 1.5

2) точка K совпадает с точкой M_2, но отлична от точки M_1 (рисунок 1.5). В этом случае $y_2 = y_1$ и $d = M_1M_2 = M_1K = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$;

3) точка K совпадает с точкой M_1, но отлична от точки M_2 В этом случае $x_2 = x_1$ и

$d = M_1M_2 = KM_2 = |y_2 - y_1| = \sqrt{(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$;

4) точка M_2 совпадает с точкой M_1. Тогда $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ и

$d = M_1M_2 = O = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

1.3.1 Деление отрезка в данном отношении

Пусть на плоскости дан произвольный отрезок M_1M_2 и пусть M – любая точка этого отрезка, отличная от точки M_2 (рисунок 1.6). Число λ, определяемое равенством $\lambda = \dfrac{M_1M}{MM_2}$, называется **отношением, в котором точка M делит отрезок M_1M_2.**

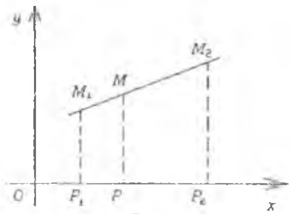


Рисунок 1.6

Теорема 1.2. Если точка $M(x; y)$ делит отрезок M_1M_2 в отношении λ, то координаты этой точки определяются формулами:

$$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \tag{1.4}$$

где $(x_1; y_1)$ – координаты точки M_1, $(x_2; y_2)$ – координаты точки M_2.

Доказательство. Докажем первую из формул (1.4). Вторая формула доказывается аналогично. Возможны два случая:

1) прямая M_1M_2 перпендикулярна оси Ox. Тогда $x_1 = x = x_2$ и поэтому

$$x = x_1 = \frac{x_1(1+\lambda)}{1+\lambda} = \frac{x_1+\lambda x_1}{1+\lambda} = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};$$

2) прямая M_1M_2 не перпендикулярна оси Ox (рисунок 1.6). Опустим перпендикуляры из точек M_1, M, M_2 на ось Ox и обозначим точки их пересечения с осью Ox соответственно P_1, P, P_2. По теореме о пропорциональных отрезках $\dfrac{M_1M}{MM_2} = \dfrac{P_1P}{PP_2} = \lambda$. Т. к. $P_1P = |x - x_1|$, $PP_2 = |x_2 - x|$ и числа $(x - x_1)$ и $(x_2 - x)$ имеют один и тот же знак (при $x_1 < x_2$ они положительны, а при $x_1 > x_2$ отрицательны), то

$$\lambda = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{|x-x_1|}{|x_2-x|} = \frac{x-x_1}{x_2-x},$$

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x), \qquad x + \lambda x = x_1 + \lambda x_2,$$

$$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}.$$

Следствие. Если $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ – две произвольные точки и точка $M(x; y)$ – середина отрезка M_1M_2, то

$$x = \frac{x_1+x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1+y_2}{2}. \tag{1.5}$$

Доказательство. Так как $M_1M = M_2M$, то $\lambda = 1$ и по формулам (1.4) получаем формулы (1.5).

1.4 Площадь треугольника

Теорема 1.3. Для любых точек $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ и $C(x_3; y_3)$, не лежащих на одной прямой, площадь S треугольника ABC выражается формулой

$$S = \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right|. \qquad (1.6)$$

Доказательство. Площадь $\Delta\ ABC$, изображённого на рисунке 1.7, вычисляем следующим образом:

$$S_{ABC} = S_{ADEC} + S_{BCEF} - S_{ABFD.}$$

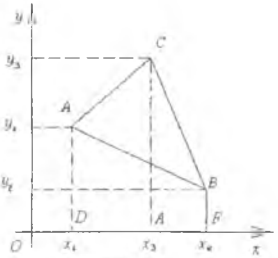


Рисунок 1.7

Вычисляем площади трапеций:

$$S_{ADEC} = DE \cdot \frac{AD + EC}{2} = \frac{(x_3 - x_1)(y_3 + y_1)}{2},$$

$$S_{BCEF} = EF \cdot \frac{EC + BF}{2} = \frac{(x_2 - x_3)(y_3 + y_2)}{2},$$

$$S_{ABFD} = DF \cdot \frac{AD + BF}{2} = \frac{(x_2 - x_1)(y_1 + y_2)}{2}.$$

Теперь имеем

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}((x_3 - x_1)(y_3 + y_1) + (x_2 - x_3)(y_3 + y_2) -$$

$$- (x_2 - x_1)(y_1 + y_2)) = \frac{1}{2}(x_3y_3 - x_1y_3 + x_3y_1 - x_1y_1 + x_2y_3 - x_3y_3 + x_2y_2 - x_3y_2 - x_2y_1 +$$

$$+ x_1y_1 - x_2y_2 + x_1y_2) = \frac{1}{2}(x_3y_1 - x_3y_2 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_1y_3) = \frac{1}{2}(x_3(y_1 - y_2) + x_1y_2 -$$

$$- x_1y_1 + x_1y_1 - x_2y_1 + y_3(x_2 - x_1)) = \frac{1}{2}(x_1(y_2 - y_1) - x_3(y_2 - y_1) + y_1(x_1 - x_2) - y_3(x_1 - x_2)) =$$

$$= \frac{1}{2}((x_1 - x_3)(y_2 - y_1) + (x_1 - x_2)(y_1 - y_3)) = \frac{1}{2}((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)).$$

Для другого расположения $\Delta\ ABC$ формула (1.6) доказывается аналогично, но может получиться со знаком «–». Поэтому в формуле (1.6) ставят знак модуля.

Вопросы для самоконтроля

1. Какая система называется прямоугольной?
2. Какая система называется полярной?
3. Укажите формулы, которые устанавливают связь прямоугольной и полярной систем координат.
4. Напишите формулу для определения расстояния между двумя точками на плоскости.
5. Сформулируйте признак деления отрезка в данном отношении.
6. Напишите формулы для определения координат точки, делящей данный отрезок в данном отношении.
7. Как находится площадь треугольника по известным вершинам?

2 Уравнение прямой на плоскости

2.1 Общее уравнение линии на плоскости

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат и некоторая линия L.

Определение 2.1. Уравнение вида $F(x, y) = 0$, связывающее переменные величины x и y, называется **уравнением линии** L (в заданной системе координат), если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на линии L, и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой линии.

Примеры уравнений линий на плоскости.

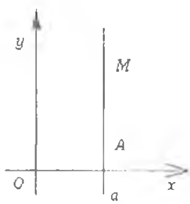


Рисунок 2.1

1 Рассмотрим прямую, параллельную оси Oy прямоугольной системы координат (рисунок 2.1). Обозначим буквой A точку пересечения этой прямой с осью Ox, $(a, 0)$ – её координаты. Уравнение $x = a$ является уравнением данной прямой. Действительно, этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки $M(a, y)$ этой прямой и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на прямой. Если $a = 0$, то прямая совпадает с осью Оу, которая имеет уравнение $x = 0$.

2 Уравнение $x - y = 0$ определяет множество точек плоскости, составляющих биссектрисы I и III координатных углов.

3 Уравнение $x^2 - y^2 = 0$ – это уравнение биссектрис всех координатных углов.

4 Уравнение $x^2 + y^2 = 0$ определяет на плоскости единственную точку $O(0, 0)$.

5 Уравнение $x^2 + y^2 = 25$ – уравнение окружности радиуса 5 с центром в начале координат.

2.2 Общее уравнение прямой на плоскости

Теорема 2.1. Каждая прямая на плоскости с прямоугольной системой координат определяется уравнением первой степени

$$Ax + By + C = 0, \tag{2.1}$$

где A и B одновременно не равны 0,
и, обратно, уравнение (2.1) при произвольных коэффициентах A, B и C (A и B одновременно не равны нулю) определяет некоторую прямую на плоскости.

Доказательство. Сначала докажем первое утверждение. Если прямая не перпендикулярна оси Ox, то она определяется уравнением первой степени $y = kx + b$ или $kx - y + b = 0$, т. е. уравнением вида (2.1), где $A = k$, $B = -1$, $C = b$. Если прямая перпендикулярна оси Ox, то согласно примеру 1 из п. 2.1 её уравнение имеет вид $x = a$ или $x - a = 0$, т. е. является уравнением вида (2.1) при $A = 1$, $B = 0$ и $C = -a$. Тем самым первое утверждение доказано.

Докажем обратное утверждение. Пусть дано уравнение (2.1), причём хотя бы один из коэффициентов A или B отличен от нуля. Если, например, $B \neq 0$, то уравнение (2.1) можно записать в виде

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

т. е. в виде уравнения с угловым коэффициентом (см. п. 2.2.1), которое определяет на плоскости прямую. Если же $B = 0$, то $A \neq 0$ и уравнение (2.1) имеет вид $x = -\frac{C}{B}$. Это уравнение прямой, параллельной оси Oy, как показано в примере 1 п. 2.1. Второе утверждение доказано.

Уравнение первой степени (2.1) называется **общим уравнением прямой на плоскости.**

2.2.1 Уравнение прямой с угловым коэффициентом

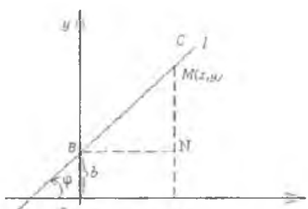


Рисунок 2.2

Пусть l – прямая, не параллельная оси Oy (рисунок 2.2). Обозначим точку пересечения l с осью Oy буквой $B(0,\ b)$, а угол между положительным направлением оси Ox и прямой l обозначим φ. Угол φ, отсчитываемый от оси Ox против часовой стрелки ($0 \leq \varphi < \pi$), называется **углом наклона** прямой l к оси Ox.

Пусть $M(x;\ y)$ – произвольная точка на прямой l. Из $\Delta\ BMN$ имеем

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{MN}{BN} = \frac{y-b}{x}.$$

Эту величину $\operatorname{tg}\varphi$ обозначают k и называют **угловым коэффициентом прямой.** Тогда

$$k = \frac{y-b}{x},$$

откуда

$$y = kx + b. \tag{2.2}$$

Уравнение (2.2) называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом.**

В частности, если $k = 0$, то $\varphi = 0$ и получаем уравнение прямой $y = b$, параллельной оси Ох и проходящей через точку $B(0,\ b)$. Если к тому же $b = 0$, то $y = 0$ – уравнение координатной оси Ох.

2.2.2 Уравнение прямой по точке и угловому коэффициенту

Пусть данная прямая имеет угловой коэффициент k и проходит через точку $M_1(x_1;\ y_1)$. Искомое уравнение прямой $y = kx + b$. Наша задача: определить неизвестное число b.

Так как координаты точки M_1 удовлетворяют уравнению прямой, то $y_1 = kx_1 + b$, откуда $b = y_1 - kx_1$. Имеем $y = kx + (y_1 - kx_1)$ или

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{2.3}$$

2.2.3 Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

Пусть прямая проходит через точки $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$. Искомое уравнение прямой $y = kx + b$, где k и b – неизвестные числа.

Так как прямая проходит через точку M_1, то по уравнению (2.3)

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Поскольку координаты точки M_2 также удовлетворяют этому уравнению, то

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1),$$

откуда
$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{2.4}$$

Тогда искомое уравнение прямой

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

или
$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{2.5}$$

Замечание 2.1. Формула (2.4) определяет угловой коэффициент прямой, проходящей через точки M_1 и M_2.

Замечание 2.2. В уравнении (2.5) один из знаменателей $(x_2 - x_1)$ или $(y_2 - y_1)$ может оказаться равным нулю (оба этих числа одновременно не могут быть равны нулю, ибо точки M_1 и M_2 различные). Так как пропорцию $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ мы понимаем как равенство $ad = bc$, то обращение в нуль одного из знаменателей означает обращение в нуль и соответствующего числителя. Если, например $x_2 = x_1$, то $y_2 - y_1 \neq 0$ и из (2.5) имеем $(y - y_1) \cdot 0 = (y_2 - y_1)(x - x_1)$, откуда следует равенство $x = x_1$. Это есть уравнение прямой по двум точкам в случае, когда $x_2 = x_1$.

2.2.4 Уравнение прямой в отрезках по осям

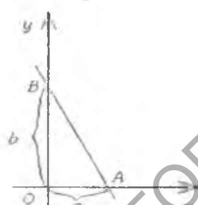


Рисунок 2.3

Пусть прямая пересекает оси Ox и Oy соответственно в точках A и B (рисунок 2.3). Пусть $A(a, 0)$ и $B(0, b)$. Из уравнения (2.5) имеем

$$\frac{y - 0}{b - 0} = \frac{x - a}{0 - a}, \qquad \frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1.$$

Уравнение
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \tag{2.6}$$

называется **уравнением прямой в отрезках на осях координат.**

Заметим, что прямые, параллельные координатным осям, и прямые, проходящие через начало координат, не могут быть записаны уравнением этого вида.

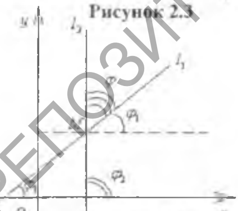


Рисунок 2.4

2.3 Угол между прямыми на плоскости

Рассмотрим на плоскости две прямые ℓ_1: $y = k_1x + b_1$ и ℓ_2 : $y = k_2x + b_2$ с углами наклона к оси Ox соответственно φ_1 и φ_2 (рисунок 2.4).

Определение 2.2. Углом между прямыми ℓ_1 **и** ℓ_2 будем называть меньший из смежных углов, образованных этими пересекающимися прямыми.

На рисунке 2.4 таким является угол φ. Очевидно, что $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Из геометрических соображений устанавливаем зависимость между углами φ_1, φ_2 и φ : $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Возможны два случая:

1) угол $\varphi = \frac{\pi}{2}$, т. е. прямые ℓ_1 и ℓ_2 перпендикулярны;

2) $0 \le \varphi < \frac{\pi}{2}$. Тогда $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_2 \operatorname{tg}\varphi_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}$.

Формула

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}, \text{ где } k_2 > k_1 \tag{2.7}$$

позволяет вычислить угол между не перпендикулярными прямыми.

2.4 Условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости

1) Если прямые ℓ_1 и ℓ_2 параллельны, то $\varphi = 0$. Тогда $\operatorname{tg}\varphi = 0$ и из формулы (2.7) имеем $k_2 - k_1 = 0$ или $k_2 = k_1$. Таким образом, условием параллельности двух прямых на плоскости является равенство их угловых коэффициентов.

2) Если прямые ℓ_1 и ℓ_2 перпендикулярны, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Так как $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, то

$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} + \varphi_1$ и $\operatorname{tg}\varphi_2 = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} + \varphi_1) = \operatorname{ctg}\varphi_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_1}$, т. е.

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}. \tag{2.8}$$

Таким образом, условие перпендикулярности двух прямых состоит в том, что их угловые коэффициенты обратны по величине и противоположны по знаку.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется уравнением линии на плоскости *xOy?*
2. Какой вид имеет уравнение прямой с угловым коэффициентом?
3. Какой знак имеет угловой коэффициент прямой, образующей с положительным направлением оси *Ox* острый угол? тупой угол?
4. Какой вид имеет уравнение прямой в отрезках на осях?
5. Напишите уравнение прямой в общем виде. Как найти угловой коэффициент этой прямой?
6. Как расположена в плоскости *xOy* прямая, уравнение которой $Ax + By = 0$; $Ax + C = 0$; $Ax = 0$; $By = 0$ (коэффициенты *A, B, C* отличны от нуля)?
7. Как найти точку пересечения двух прямых?
8. Как убедиться в том, что данная точка принадлежит данной прямой?
9. Как построить прямую, заданную соответствующим уравнением?
10. Какой вид имеет уравнение прямой, проходящей через данную точку и имеющей соответствующий угловой коэффициент?
11. Какой вид имеет уравнение прямой, проходящей через две данные точки?
12. Напишите формулу для определения угла между двумя прямыми на плоскости.
13. Сформулируйте условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.

3 Взаимное расположение двух прямых на плоскости

3.1 Расстояние от точки до прямой

Теорема 3.1. Расстояние d от данной точки $M(x_0; y_0)$ до прямой ℓ, заданной уравнением $Ax + By + C = 0$ на плоскости определяется формулой

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (3.1)$$

Доказательство. Пусть в прямоугольной системе координат прямая ℓ имеет уравнение $Ax + By + C = 0$, а точка M – координаты $(x_0; y_0)$. Возьмём на прямой ℓ две произвольные точки $E(x_1; y_1)$ и $F(x_2; y_2)$. Нетрудно заметить, что

$$d = h = \frac{2 \cdot S_{MEF}}{EF}.$$

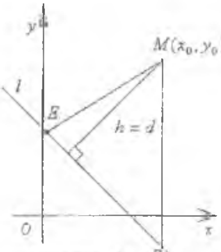


Рисунок 3.1

По формуле (1.6) темы 1 имеем

$$S_{MEF} = \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_0 - y_1) - (x_0 - x_1)(y_2 - y_1)\right|.$$

По формуле расстояния между точками на плоскости

$$EF = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Тогда $$d = \frac{|(x_2 - x_1)(y_0 - y_1) - (x_0 - x_1)(y_2 - y_1)|}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}. \qquad (3.2)$$

Запишем уравнение прямой ℓ по двум точкам E и F:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Преобразуем это уравнение в общее уравнение прямой:

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1),$$
$$(y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y + (y_1(x_2 - x_1) - x_1(y_2 - y_1)) = 0.$$

По условию, общее уравнение прямой ℓ имеет вид $Ax + By + C = 0$, следовательно,

$$A = m(y_2 - y_1),$$
$$B = m(x_1 - x_2),$$
$$C = m(y_1(x_2 - x_1) - x_1(y_2 - y_1))$$

для некоторого целого числа $m \neq 0$.

Тогда из (3.2) имеем

$$d = \frac{|(y_2 - y_1)(x_0 - x_1) - (x_2 - x_1)(y_0 - y_1)|}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2}} =$$

$$= \frac{|(y_2 - y_1)x_0 + (x_1 - x_2)y_0 + (y_1(x_2 - x_1) - x_1(y_2 - y_1))|}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = \frac{\left|\frac{A}{m}x_0 + \frac{B}{m}y_0 + \frac{C}{m}\right|}{\sqrt{\left(\frac{A}{m}\right)^2 + \left(\frac{B}{m}\right)^2}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{|m|}|Ax_0 + By_0 + C|}{\frac{1}{|m|}\sqrt{(A)^2 + (B)^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{(A)^2 + (B)^2}}.$$

Пример. Пусть прямая ℓ задана уравнением $3x - 4y + 10 = 0$ и дана точка $M(4; 3)$. Найти расстояние от точки M до прямой ℓ.

Решение. По формуле (3.1) имеем

$$d = \frac{|3 \cdot 4 - 4 \cdot 3 + 10|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{10}{5} = 2. \quad \text{Ответ: 2.}$$

3.2 Взаимное расположение прямых на плоскости

Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы своими общими уравнениями. Рассмотрим эти уравнения как систему двух уравнений первой степени с двумя неизвестными x и y:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Решаем эту систему:

а)
$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} A_1A_2x + B_1A_2y + C_1A_2 = 0 \\ A_1A_2x + A_1B_2y + A_1C_2 = 0 \end{array} \\ \hline (B_1A_2 - A_1B_2)y + (C_1A_2 - A_1C_2) = 0 \end{array}$$

$$(A_1B_2 - A_2B_1)y = C_1A_2 - A_1C_2. \tag{3.4}$$

б)
$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} A_1B_2x + B_1B_2y + C_1B_2 = 0 \\ A_2B_1x + B_1B_2y + C_2B_1 = 0 \end{array} \\ \hline (A_1B_2 - A_2B_1)x = C_2B_1 - C_1B_2 \end{array}. \tag{3.5}$$

Возможны следующие случаи:

1) $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$ т. е. $A_1B_2 \neq A_2B_1 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$. Тогда из формул (3.4) и (3.5) находим единственное решение системы (3.3):

$$x = \frac{C_2B_1 - C_1B_2}{A_1B_2 - A_2B_1}, \qquad y = \frac{C_1A_2 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}. \tag{3.6}$$

Единственное решение системы (3.3) означает, что прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются. Формулы (3.6) дают координаты точки пересечения.

2) $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ т. е. $A_1B_2 = A_2B_1 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.

2.1) $C_2B_1 - C_1B_2 = 0$ и $C_1A_2 - A_1C_2 = 0$.

Тогда $A_1B_2 = A_2B_1$, $C_2B_1 = C_1B_2$ и $C_1A_2 = A_1C_2$, откуда $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, $\frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, $\frac{C_1}{C_2} = \frac{A_1}{A_2}$.

Таким образом, $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=k$. Тогда $A_1 = kA_2$, $B_1 = kB_2$, $C_1 = kC_2$. Теперь, уравнение прямой ℓ_1 имеет вид: $kA_2x + kB_2y + kC_2 = 0$ или $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Следовательно, прямые ℓ_1 и ℓ_2, имея одно и то же уравнение, совпадают.

2.2) $C_2B_1 - C_1B_2 \neq 0$ или $C_1A_2 - A_1C_2 \neq 0$.

Пусть, для определённости $C_2B_1 - C_1B_2 \neq 0$, т. е. $C_2B_1 \neq C_1B_2 \Rightarrow \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$.

Тогда равенство (3.5) имеет вид $0 \cdot x = C_2B_1 - C_1B_2$. Следовательно, это уравнение, а значит и система (3.3) решений не имеет. Это означает, что прямые ℓ_1 и ℓ_2 на плоскости не пересекаются, т. е. они параллельны. Аналогичный вывод можно сделать в случае, когда $C_1A_2 - A_1C_2 \neq 0$.

Итак, если:

1) $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, то прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в точке с координатами (3.6);

2) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, то прямые ℓ_1 и ℓ_2 параллельны;

3) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, то прямые ℓ_1 и ℓ_2 совпадают.

Вопросы для самоконтроля

1. Напишите формулу для определения расстояния от точки до прямой.
2. Укажите возможные взаимные расположения двух прямых на плоскости.
3. Условие пересечения двух прямых на плоскости.
4. Условие параллельности двух прямых на плоскости.
5. Условие совпадения двух прямых на плоскости.

4 Линии второго порядка на плоскости

4.1 Эллипс

Линии, уравнения которых в прямоугольной системе координат являются уравнениями второй степени, называются **линиями второго порядка.** К важнейшим линиям второго порядка относятся эллипс, окружность, гипербола и парабола.

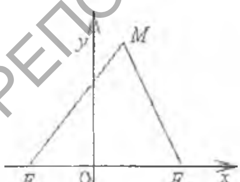


Рисунок 4.1

Определение 4.1. Эллипсом называется множество всех точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек, называемых **фокусами**, есть величина постоянная, большая чем расстояние между фокусами.

Пусть $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ – фокусы. Тогда $F_1F_2 = 2c$ – **фокусное расстояние** (рисунок 4.1). Постоянную величину, о которой идёт речь в определении эллипса, обозначим 2a.

Пусть $M(x,\ y)$ – произвольная точка эллипса. Тогда по определению $F_1M + F_2M = 2a > 2c$, откуда $a > c$.

Так как $F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, то имеем уравнение $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$.

Преобразуем это уравнение:

$$(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\,)^2 = (2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,)^2,$$

$$(x^2 + 2cx + c^2) + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x^2 - 2cx + c^2) + y^2,$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Возводя в квадрат последнее уравнение, имеем

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2cxa^2 + c^2x^2,$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Так как $a > c$, то $a^2 - c^2 > 0$ и можем обозначить $b^2 = a^2 - c^2$. Тогда

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4.1}$$

Таким образом, координаты любой точки эллипса удовлетворяют уравнению (4.1).

Покажем обратное: если координаты точки M(x, y) удовлетворяют уравнению (4.1), то точка M лежит на эллипсе.

Из (4.1) найдём y^2: $y^2 = b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})$.

Тогда $F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}} =$
$= \sqrt{\frac{(a^2 - b^2)x^2}{a^2} + 2cx + a^2 - c^2 + c^2} = \sqrt{\frac{c^2x^2}{a^2} + 2cx + a^2} = \sqrt{(\frac{cx}{a} + a)^2} = \left|\frac{cx}{a} + a\right|$.

Т. к. $c < a$ и из (4.1) $\frac{x^2}{a^2} \le 1$, т. е. $x^2 \le a^2$, $|x| \le a$, то $\frac{cx}{a} \le a$. Следовательно, $\left|\frac{cx}{a} + a\right| = a + \frac{cx}{a}$. Аналогично можно вычислить $F_2M = a - \frac{c}{a}x$.

Теперь $F_1M + F_2M = a + \frac{cx}{a} + a - \frac{cx}{a} = 2a$.

Из уравнения (4.1): $b^2 > 0 \Rightarrow a^2 - c^2 > 0$, т. е. $a > c$, откуда $2a > 2c$. Значит, точка M лежит на эллипсе.

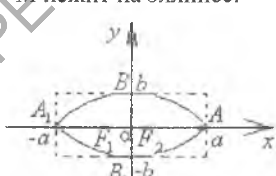


Рисунок 4.2

Уравнение (4.1) называется **каноническим уравнением эллипса.** Изображён эллипс с уравнением (4.1) на рисунке 4.2.

Точки пересечения эллипса с осями координат называются **вершинами эллипса.** Оси симметрии эллипса (оси Ox и Oy) называют **осями эллипса**. Точка пересечения осей – **центр эллипса. Осями** называют также отрезки A_1A, B_1B. Отрезки OA, OB и их длины называют **полуосями**. В нашем случае $a > b$, поэтому а называют **большой полуосью**, b – **малой полуосью. Эксцентриситетом эллипса** называется отношение фокусного расстояния к длине большой оси, т. е.

$$\varepsilon = \frac{c}{a} .$$

Так как $0 \leq c < a$, то $0 \leq \varepsilon < 1$. **Фокальными радиусами точки M** называют отрезки F_1M и F_2M. Их длины r_1 и r_2 вычисляют по формулам:

$$r_1 = a + \varepsilon x, \qquad r_2 = a - \varepsilon x.$$

Уравнение (4.1) можно рассматривать и в случае, когда $b > a$, оно определяет эллипс с большой полуосью $OB = b$, фокусы такого эллипса лежат на оси Oy, причём $a^2 = b^2 - c^2$.

4.1.1 Окружность

В случае, когда $a = b$, уравнение (4.1) принимает вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 = a^2$$

и определяет окружность радиуса a с центром в начале координат (рисунок 4.3).

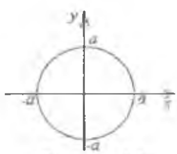


Рисунок 4.3

В этом случае $c = 0$, поэтому $\varepsilon = 0$.

Из школьного курса известно уравнение окружности радиуса R с центром в точке $A_0(x_0, y_0)$:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 .$$

Такое уравнение называют **каноническим уравнением окружности.**

4.2. Гипербола

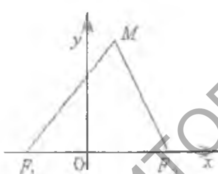


Рисунок 4.4

Определение 4.2. Гиперболой называется множество всех точек плоскости, для каждой из которых модуль разности расстояний до двух данных точек, называемых **фокусами**, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Пусть $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ – фокусы. Тогда $F_1F_2 = 2c$ – **фокусное расстояние** (рисунок 4.4). Постоянную величину, о которой идёт речь в определении, обозначим $2a$. Тогда по определению $2a < 2c$, т. е. $a < c$.

Пусть $M(x;\ y)$ – произвольная точка гиперболы. Рассуждая по аналогии с п. 4.1, можем получить уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ где } b^2 = c^2 - a^2. \tag{4.2}$$

Уравнение (4.2) называют **каноническим уравнением гиперболы.** Гипербола с уравнением (4.2) изображена на рисунок 4.5. Прямоугольник $MNKL$, стороны которого $MN = LK = 2a$, $ML = NK = 2b$, называется **основным прямоугольником**.

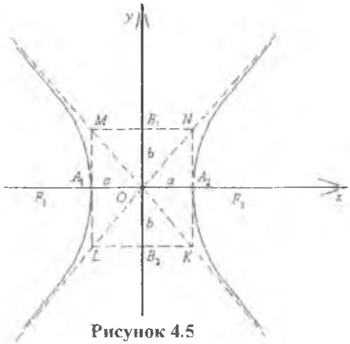


Рисунок 4.5

Прямые MK и NL называют **асимптотами гиперболы,** их уравнения : $y=-\frac{b}{a}x$ и $y=\frac{b}{a}x$, соответственно. Гипербола имеет две **ветви**: левую и правую. Центр симметрии гиперболы называется её **центром**. Оси симметрии гиперболы называются её **осями.** Одна ось пересекает гиперболу в двух точках (на рисунке 4.5 это т. A_1 и A_2), эта ось называется **действительной осью гиперболы,** другая ось – **мнимой осью**, она не имеет общих точек с гиперболой. Длины отрезков A_1A_2 и B_1B_2 также называют **осями.** Величины a и b называются **полуосями гиперболы.** Если $a = b$, то гипербола называется **равносторонней,** её уравнение

$$x^2-y^2=a^2.$$

Уравнение
$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (4.3)$$

определяет гиперболу с действительной осью Oy (рисунок 4.6).

Гиперболы, определяемые уравнениями (4.2) и (4.3) в одной и той же системе координат, называются **сопряжёнными. Эксцентриситет гиперболы** – это отношение фокусного расстояния к расстоянию между **вершинами** гиперболы (т. е. точками пересечения гиперболы с осями). Для уравнения (4.2)

$$\varepsilon=\frac{c}{a}.$$

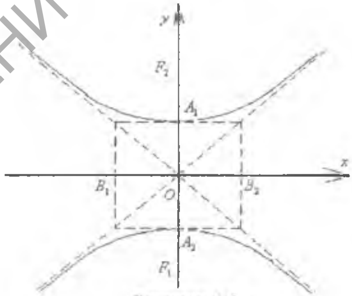


Рисунок 4.6

Так как $c > a$, то $\varepsilon > 1$. **Фокальные радиусы точки M гиперболы** – это отрезки F_1M и F_2M. Их длины r_1 и r_2:

для правой ветви $\quad r_1=\varepsilon x+a, \quad r_2=\varepsilon x-a,$

для левой ветви $\quad r_1=-\varepsilon x-a, \quad r_2=-\varepsilon x+a.$

4.3. Парабола

Определение 4.3. Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой **фокусом**, и данной прямой, называемой **директрисой**, и не проходящей через фокус.

Возьмём в прямоугольной системе координат точку $F(\frac{p}{2}, 0)$, где $p > 0$, и пусть она будет фокусом. Директрисой будет прямая $x=-\frac{p}{2}$ (рисунок 4.7).

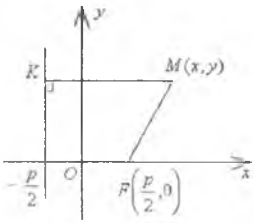


Рисунок 4.7

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка параболы. Если K – основание перпендикуляра из точки M к директрисе, то она имеет координаты $(-\frac{p}{2}, y)$. По определению 4.3 $MK = MF$.

Тогда $\sqrt{(x+\frac{p}{2})^2+(y-y)^2} = \sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}$.

$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2} = x+\frac{p}{2}$, т. к. $x \geq 0$.

Возводим уравнение в квадрат и приводим подобные члены:

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4},$$

$$y^2 = 2px. \qquad (4.4)$$

Уравнение (4.4) называется **каноническим уравнением параболы.** Величину р называют параметром параболы. Парабола с уравнением (4.4) изображена на рисунок 4.8. Точка O называется **вершиной параболы,** ось симметрии – **осью параболы.** Если парабола имеет уравнение $y^2 = -2px$, то её график расположен слева от оси Oy (рисунок 4.9). Уравнения $x^2 = 2py$ и $x^2 = -2py$, $p > 0$ определяют параболы, изображённые на рисунках 4.10 и 4.11, соответственно.

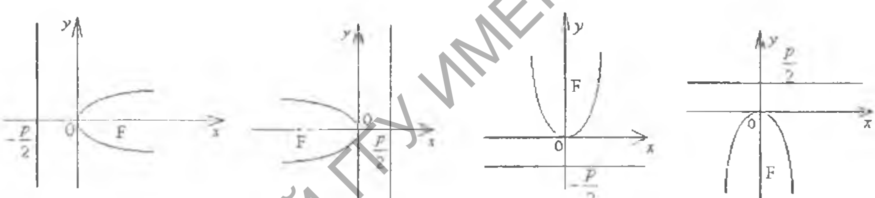


Рисунок 4.8 **Рисунок 4.9** **Рисунок 4.10** **Рисунок 4.11**

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение окружности. Какой вид имеет уравнение с центром в начале координат?
2. Дайте определение эллипса. Какой вид имеет каноническое уравнение эллипса?
3. Что называется эксцентриситетом эллипса и какова его величина?
4. Дайте определение гиперболы. Какой вид имеет каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси *Ox?* на оси *Oy?*
5. Что называется эксцентриситетом гиперболы и какова его величина?
6. Какие прямые называются асимптотами гиперболы? Какой вид имеют уравнения асимптот гиперболы, заданной каноническим уравнением?
7. Дайте определение параболы. Какой вид имеет каноническое уравнение параболы, симметричной относительно оси *Ox?* относительно оси *Oy?*

5 Матрицы и действия над ними

5.1 Понятие о матрице

Таблица чисел a_{ik} вида

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1k} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2k} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

состоящая из m строк и n столбцов называется **матрицей размера $m \times n$.** Числа a_{ik} называются её **элементами.** Если $m \neq n$, то матрица называется **прямоугольной.** Если же $m = n$, то матрица называется **квадратной.** В частности, если $m = 1$, $n > 1$, то матрица $(a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ a_{1n})$ называется **матрицей-строкой.** Если же $m > 1$, $n = 1$, то матрица называется **матрицей-столбцом.**

Число строк в квадратной матрице называют **порядком** такой матрицы. Например, матрица $\begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{pmatrix}$ есть квадратная матрица второго порядка, а матрица $\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{pmatrix}$ есть квадратная матрица третьего порядка.

Матрицы будем обозначать большими латинскими буквами. Две матрицы A и B называются **равными** ($A = B$), если они одинакового размера и их соответствующие элементы равны. Так, если $A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11}b_{12} \\ b_{21}b_{22} \end{pmatrix}$ и $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$, $a_{22} = b_{22}$, то $A = B$.

5.2 Алгебраические преобразования матриц

5.2.1 Сложение и вычитание матриц

Складывать и вычитать можно только матрицы одинакового размера.

Определение 5.1. Суммой двух матриц A и B одинакового размера $m \times n$ называется матрица C размера $m \times n$, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B. Обозначается : $A + B = C$.

Пример. $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

Определение 5.2. Матрица O размера $m \times n$, элементы которой все равны нулю, называется **нулевой матрицей.**

Определение 5.3. Разностью двух матриц A и B размера $m \times n$ называется матрица C размера $m \times n$ такая, что $A = B + C$. Обозначается : $A - B = C$. Из определения следует, что элементы матрицы C равны разности соответствующих элементов матриц A и B.

Пример. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Свойства сложения матриц.

1. Сложение матриц коммутативно, т. е. $A + B = B + A$ для любых матриц A и B размера $m \times n$.

2. Сложение матриц ассоциативно, т. е. $(A + B) + C = A + (B + C)$ для любых матриц A, B, C одинакового размера.

3. $A + O = O + A = A$ для любой матрицы A размера, совпадающей с размером нулевой матрицы O.

5.2.2 Умножение матрицы на число

Определение 5.4. Произведением матрицы A на число α называется матрица αA, элементы которой равны произведению числа α на соответствующие элементы матрицы A.

Пример. Вычислите $2A - 3B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.

$$2A - 3B = 2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -11 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

5.2.3 Умножение матриц

Определение 5.5. Произведением матрицы A размерности $m \times n$ и матрицы B размерности $n \times k$, элементы которой c_{ij} вычисляются как сумма произведений соответствующих элементов a_{il} i-й строки матрицы A и элементов b_{lj} j-го столбца матрицы B, т. е.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj},\ i \in \{1, 2, \ldots, m\};\ j \in \{1, 2, \ldots, k\}.$$

Пример.

1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -12 & -10 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Определение 5.6. Квадратная матрица порядка n вида называется *единичной* матрицей и обозначается E_n.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Свойства умножения матриц

1. Умножение матриц некоммутативно, т. е. $AB \neq BA$.

2. Умножение матриц ассоциативно, т. е. $A(BC) = (AB)C$, если такие произведения существуют.

3. Если A – матрица размера $m \times n$, B – матрица размера $n \times k$, то $A \cdot E_n = A$, $E_n \cdot B = B$.

5.2.4 Транспонирование матриц

Определение 5.7. Если в матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

сделать все строки столбцами с тем же номером, то получим матрицу

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11}a_{21}\ldots a_{m1} \\ a_{12}a_{22}\ldots a_{m2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}a_{2n}\ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

которую называют **транспонированной** к матрице A.

Свойства транспонирования матриц

1. $(A^t)^t = A$.
2. $(A + B)^t = A^t + B^t$.
3. $(AB)^t = B^t A^t$.
4. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$.

Пример. Найти $2A^t + (AB)^t$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$2A^t + (AB)^t = 2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^t + \left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right)^t = 2\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

5.3 Элементарные преобразования строк матрицы

Определение 5.8. Элементарными преобразованиями строк матрицы называют следующие преобразования:

1) умножение строки матрицы на ненулевое действительное число;

2) прибавление к одной строке матрицы другой её строки, умноженной на произвольное действительное число.

Лемма 5.1. С помощью элементарных преобразований строк матрицы можно поменять местами любые две строки.

Доказательство.

$$A=\begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ a_{i1}\dots\dots a_{in} \\ \dots\dots\dots \\ a_{j1}\dots\dots a_{jn} \\ \dots\dots\dots \end{pmatrix} \xrightarrow{i+j} \begin{pmatrix} \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}+a_{j1}\dots a_{in}+a_{jn} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{j1}\dots\dots\dots\dots a_{jn} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{pmatrix} \xrightarrow{j-i} \begin{pmatrix} \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}+a_{j1}\dots a_{n1}+a_{jn} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ -a_{i1}\dots\dots\dots -a_{in} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{pmatrix} \xrightarrow{i+j}$$

$$\xrightarrow{i+j} \begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ a_{j1}\dots\dots a_{jn} \\ \dots\dots\dots \\ -a_{i1}\dots -a_{in} \\ \dots\dots\dots \end{pmatrix} \xrightarrow{i(-1)} \begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ a_{j1}\dots\dots a_{jn} \\ \dots\dots\dots \\ a_{i1}\dots\dots a_{in} \\ \dots\dots\dots \end{pmatrix}.$$

5.4 Ступенчатая матрица. Ранг матрицы

Определение 5.9. Ступенчатой будем называть матрицу, которая обладает следующими свойствами:

1) если i-я строка нулевая, то $(i+1)$-я строка также нулевая,

2) если первые ненулевые элементы i-й и $(i+1)$-й строк расположены в столбцах с номерами k и ℓ, соответственно, то $k<\ell$.

Условие 2) требует обязательного увеличения нулей слева при переходе от i-й строки к $(i+1)$-й строке. Например, матрицы

$$A_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

являются ступенчатыми, а матрицы

$$B_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad B_2=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad B_3=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

ступенчатыми не являются.

Теорема 5.1. Любую матрицу можно привести к ступенчатой с помощью элементарных преобразований строк.

Проиллюстрируем эту теорему на примере.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{III+I(-1)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{I\leftrightarrow III} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & -2 \\ 4 & 0 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow[III+I(-2)]{II+I(-4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & -8 & 6 & 11 & 12 \\ 0 & -5 & 5 & 10 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[III\cdot 8]{II(-5)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 40 & -30 & -55 & -60 \\ 0 & -40 & 40 & 80 & 48 \end{pmatrix} \xrightarrow{III+II\cdot 1}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 40 & -30 & -55 & -60 \\ 0 & 0 & 10 & 25 & -12 \end{pmatrix}.$$

Получившаяся матрица – ступенчатая.

Определение 5.10. Рангом матрицы будем называть число ненулевых строк в ступенчатом виде этой матрицы.

Например, ранг матрицы А в предыдущем примере равен 3.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется матрицей?
2. Как производится сложение и вычитание матриц; умножение матрицы на число?
3. Дайте определение умножению матриц.
4. Какая матрица называется транспонированной?
5. Какие преобразования строк матрицы называются элементарными?
6. Дайте определение ступенчатой матрицы.
7. Что называют рангом матрицы?

6 Определители

6.1 Вычисление определителей

6.1.1 Определители второго порядка

Рассмотрим квадратную матрицу второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Определение 6.1. Определителем второго порядка, соответствующим матрице А, называется число, вычисляемое по формуле

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Элементы a_{ij} называются **элементами определителя** $|A|$, элементы a_{11}, a_{22} образуют **главную диагональ,** а элементы a_{12}, a_{21} – **побочную.**

Пример. $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = -28 + 6 = -22.$

6.1.2 Определители третьего порядка

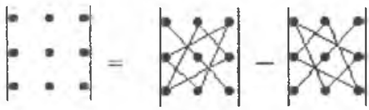
Рассмотрим квадратную матрицу третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определение 6.2. Определителем третьего порядка, соответствующим матрице A, называется число, вычисляемое по формуле

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Чтобы запомнить, какие произведения в правой части равенства следует брать со знаком «плюс», а какие — со знаком «минус», полезно запомнить правило, называемое **правилом треугольника:**



Пример.

1) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 0 + 4 - 0 + 2 + 6 = 8.$

2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, т. е. $|E_3| = 1.$

Рассмотрим ещё один способ вычисления определителя третьего порядка.

Определение 6.3. Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя называется определитель, полученный из данного вычёркиванием i-й строки и j-го столбца. **Алгебраическим дополнением A_{ij}** элемента a_{ij} определителя называется его минор M_{ij}, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$.

Пример. Вычислим минор M_{23} и алгебраическое дополнение A_{23} элемента a_{23} в матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим минор M_{23}:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 4 = -2.$$

Тогда $A_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = 2.$

Теорема 6.1. Определитель третьего порядка равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

Доказательство. По определению

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \quad (6.1)$$

Выберем, например, вторую строку и найдём алгебраически дополнения A_{21}, A_{22}, A_{23}:

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) = a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33},$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31},$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) = a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}.$$

Преобразуем теперь формулу (6.1)

$$|A| = a_{21}(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) + a_{23}(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}) =$$
$$= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}.$$

Формула $|A| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$ называется **разложением определителя** $|A|$ по элементам второй строки. Аналогично разложение можно получить по элементам других строк и любого столбца

Пример.

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ -5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (\text{по элементам второго столбца}) = 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} +$$
$$+ (-1)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -(0+15) + 2(-2+20) + (-6+0) = -15 + 36 - 6 = 15.$$

6.1.3 Определители n-го порядка ($n \in N$)

Определение 6.4. Определителем *n*-го порядка, соответствующим матрице *n*-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется число, равное сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения, т. е.

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}.$$

Нетрудно заметить, что при $n = 2$ получается формула для вычисления определителя второго порядка. Если $n = 1$, то по определению будем считать $|A| = |a_{11}| = a_{11}$.

Пример. $$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (\text{по элементам 4-й строки}) = 3\cdot(-1)^{4+2}\begin{vmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} +$$
$$+ 2\cdot(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3(-6+20-2-32) + 2(-6+16+60+2) = 3(-20) + 2\cdot 72 = -60 + 144 = 84.$$

Заметим, что если в определителе все элементы какой-либо строки (столбца), кроме одного, равны нулю, то при вычислении определителя его удобно разложить по элементам этой строки (столбца).

Пример.

$$\left|E_n\right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \left|E_{n-1}\right| = \ldots = \left|E_3\right| = 1.$$

6.2 Свойство определителей

Определение 6.5. Матрицу вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \dots & a_{n-1n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

будем называть **треугольной матрицей.**

Свойство 6.1. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

Свойство 6.2. Определитель матрицы с нулевой строкой или нулевым столбцом равен нулю.

Свойство 6.3. При транспонировании матрицы определитель не изменяется, т. е.

$$\left|A\right| = \left|A^t\right|.$$

Свойство 6.4. Если матрица B получается из матрицы A умножением каждого элемента некоторой строки на число k, то

$$\left|B\right| = k\left|A\right|.$$

Свойство 6.5.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_{k1} + \bar{a}_{k1} & a_{k2} + \bar{a}_{k2} & \dots & a_{kn} + \bar{a}_{kn} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{a}_{k1} & \bar{a}_{k2} & \dots & \bar{a}_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Свойство 6.6. Если матрица B получается из матрицы A перестановкой двух строк, то $\left|B\right| = -\left|A\right|$.

Свойство 6.7. Определитель матрицы с пропорциональными строками равен нулю, в частности, нулю равен определитель матрицы с двумя одинаковыми строками.

Свойство 6.8. Определитель матрицы не изменяется, если к элементам одной строки прибавить элементы другой строки матрицы, умноженные на некоторое число.

Замечание. 6.1. Так, как по свойству 6.3 определитель матрицы не меняется при транспонировании, то все свойства о строках матрицы верны и для столбцов.

Свойство 6.9. Если A и B – квадратные матрицы порядка n, то $|AB| = |A|\,|B|$.

6.3 Обратная матрица

Определение 6.6. Квадратная матрица A порядка n называется **обратимой,** если существует матрица B такая, что $AB = BA = E_n$. В этом случае матрица B называется **обратной к матрице** A и обозначается A^{-1}.

Теорема 6.2. Справедливы следующие утверждения:

1) если матрица A обратима, то существует точно одна ей обратная матрица;

2) обратимая матрица имеет определитель, отличный от нуля;

3) если A и B – обратимые матрицы порядка n, то матрица AB обратима, причём $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Доказательство.

1. Пусть B и C – матрицы, обратные к матрице A, т. е. $AB = BA = E_n$ и $AC = CA = E_n$. Тогда $B = BE_n = B(AC) = (BA)C = E_nC = C$.

2. Пусть матрица A обратима. Тогда существует матрица A^{-1}, ей обратная, причём

$$AA^{-1} = E_n.$$

По свойству 6.9 определителя $|AA^{-1}| = |A|\,|A^{-1}|$. Тогда $|A|\,|A^{-1}| = |E_n|$, откуда $|A|\,|A^{-1}| = 1$. Следовательно, $|A| \neq 0$.

3. Действительно,

$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (A(BB^{-1}))A^{-1} = (AE_n)A^{-1} = AA^{-1} = E_n$

$(B^{-1}A^{-1})(AB) = (B^{-1}(A^{-1}A))B = (B^{-1}E_n)B = B^{-1}B = E_n$

Следовательно, AB – обратимая матрица, причём $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Следующая теорема даёт критерий существования обратной матрицы и способ её вычисления.

Теорема 6.3. Квадратная матрица A обратима тогда и только тогда, когда её определитель отличен от нуля. Если $|A| \neq 0$, то

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пример. Найти матрицу, обратную для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 1 = 7.$

Так как $|A| \neq 0$, то существует обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Вычисляем $A_{11} = 3, A_{12} = 1, A_{21} = -1, A_{22} = 2$. Тогда $A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется определителем?
2. Каковы его основные свойства?
3. Что называется минором и алгебраическим дополнением?
4. Каковы способы вычисления определителей (второго, третьего и n-го порядков)?
5. Какая матрица называется квадратной?

7 Системы линейных уравнений

7.1 Системы линейных уравнений

Совокупность уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (7.1)$$

называется **системой m линейных уравнений с n неизвестными** x_1 $x_2 \ldots, x_n$. Числа a_{ij} называются **коэффициентами системы,** а числа b_i – **свободными членами.**

Решением системы (7.1) называется совокупность чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$, при подстановке которых в систему (7.1) вместо $x_1, x_2, \ldots, x_n$, получаем верные числовые равенства.

Решить систему – значит найти все её решения или доказать, что их нет. Система называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной,** если решений нет.

Матрица, составленная из коэффициентов системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

называется матрицей системы (7.1). Если к матрице системы добавить столбец свободных членов, то получим матрицу

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

которую называют **расширенной матрицей системы (7.1).**

Если обозначим $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$,

то систему (7.1) можно записать в виде матричного уравнения $AX = C$.

7.1.1 Критерий совместности системы линейных уравнений

Критерий совместности системы линейных уравнений даёт теорема Кронекера-Капелли.

Леопольд Кронекер (1823–1891 гг.) – немецкий математик. Теорема, о которой пойдёт речь, содержалась в его лекциях, читавших в Берлинском университете в 1883–1891 гг.

Альфред Капели (1858–1916) – итальянский математик. Он, по-видимому, впервые дал формулировку теоремы с использованием термина «ранг матрицы» в своей работе в 1892 г.

Теорема Кронекера-Капелли.

Для того, чтобы система линейных уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу расширенной матрицы.

Пример. Исследовать систему на совместность

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}.$$

Решение.

Приведение матрицы системы и расширенной матрицы системы к ступенчатому виду будем выполнять одновременно.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 6 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[III+I\cdot(-2)]{II+I\cdot(-5)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 14 & -28 & -24 & 7 \\ 0 & 7 & -14 & -12 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{II+III\cdot(-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 7 & -14 & -12 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{II\leftrightarrow III}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -14 & -12 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right).$$

Ранг матрицы системы равен 2, а ранг расширенной матрицы системы равен 3. По теореме Кронекера-Капелли система несовместна.

7.2 Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Метод Гаусса применяется для произвольной системы линейных уравнений.

Определение 7.1. Систему линейных уравнений будем называть **ступенчатой**, если матрица этой системы ступенчатая.

При решении системы линейных уравнений применим следующий алгоритм:

1. Записываем расширенную матрицу системы (7.1) и приводим её к ступенчатому виду, определяем ранги матрицы и расширенной матрицы системы.

2. Если найденные ранги не равны, то система несовместна.

3. Ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы и равен числу r. В этом случае система совместна и надо найти её решение.

4. Используя ступенчатый вид расширенной матрицы системы, записываем соответствующую ступенчатую систему.

5. Если число r равно числу неизвестных n, то ступенчатая система имеет вид

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = l_1 \\ \qquad\quad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = l_2 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\quad c_{nn}x_n = l_n \end{cases} \tag{7.2}$$

Из системы (7.2) последовательно находим значения для $x_1, x_2, \ldots x_m$, начиная с последнего уравнения. В этом случае система (7.1) имеет единственное решение.

6. Если число r меньше числа неизвестных, то ступенчатая система имеет вид

$$\begin{cases} c_{i_1 1}x_1 + c_{i_1 2}x_2 + \ldots + c_{i_1 n}x_n = f_1 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ c_{i_r j_1}x_{j_1} + \ldots + c_{i_r j_k}x_{j_k} = f_r \end{cases} \tag{7.3}$$

В системе (7.3) r уравнений и n неизвестных. Неизвестные $x_1, \ldots, x_{j1}$, которые первыми встречаются в уравнениях системы (7.3), назовём **главными неизвестными**, остальные – **свободными неизвестными.** Из системы (7.3) последовательно выражаем главные неизвестные через свободные, начиная с последнего уравнения. Свободные неизвестные могут принимать любые значения. В этом случае система имеет бесконечно много решений.

Примеры.

1) $\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \end{cases}$ Ответ: $(2; -3; -1)$.

2) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}$ Ответ: нет решений.

3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$ Ответ: бесконечно много решений.

7.3 Метод Крамера решения систем линейных уравнений

Габриэль Крамер (1704–1752) – швейцарский математик, который в 1750 г. нашёл метод решения систем линейных уравнений, названный впоследствии правилом Крамера.

Определение 7.2. Система линейных уравнений называется **крамеровской,** если тело уравнений равно числу неизвестных и определитель матрицы системы отличен от нуля.

Теорема 7.1. Крамеровская система имеет единственное решение, которое находится по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, ..., x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta},$$

где Δ – определитель матрицы системы,

Δx_i – определитель, полученный из Δ, заменой столбца коэффициентов при x_i на столбец свободных членов.

Доказательство. Пусть дана крамеровская система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (7.4)$$

Тогда

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

По теореме 6.3 матрица системы A имеет обратную матрицу A^{-1}.

Запишем крамеровскую систему (7.4) в матричном виде

$$AX = B, \quad (7.5)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Умножим обе части матричного уравнения (7.5) слева на A^{-1}:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B,$$

Ввиду ассоциативности умножения матриц имеем

$$A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = E_nX = X.$$

Таким образом,

$$X = A^{-1}B \text{ – решение системы.}$$

1. Покажем, что такое решение единственно. Предположим, что X_1 и X_2 – два решения матричного уравнения (7.5). Тогда $AX_1 = B$ и $AX_2 = B$, откуда $AX_1 = AX_2$. Умножая обе чисти равенства на A^{-1} слева, имеем

$$A^{-1}(AX_1) = A^{-1}(AX_2),$$
$$(A^{-1}A)X_1 = (A^{-1}A)X_2,$$
$$E_nX_1 = E_nX_2,$$
$$X_1 = X_2.$$

Следовательно, система (7.4) имеет единственное решение.

2. Найдём решение системы (7.4). Из равенства $X = A^{-1}B$ имеем:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix},$$

откуда

$$x_1 = \frac{1}{\Delta}(A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$x_2 = \frac{1}{\Delta}(A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

....

$$x_n = \frac{1}{\Delta}(A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

Обозначая определители в правой части равенств $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ соответственно, получим формулы $x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta}$.

Пример. Решить систему уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$$

Ответ: (1; 1; 1).

7.4 Матричный метод решения систем линейных уравнений

Этот метод также применяется для решения крамеровских систем. Основан он на равенстве

$$X = A^{-1}B,$$

которое мы получили при доказательстве теоремы 7.1.

Пример. Решить систему матричным методом

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 11 \end{cases}$$

Ответ: (3; –1; 2).

Вопросы для самоконтроля

1. Что называют системой линейных уравнений?
2. Что значит решить систему линейных уравнений?
3. Что называется матрицей и расширенной матрицей системы линейных уравнений?
4. Сформулируйте критерий совместности системы линейных уравнений.
5. В чем заключается метод Гаусса решения систем линейных уравнений?
6. Напишите формулы Крамера. В каком случае они применимы?
7. В чем заключается матричный метод решения систем линейных уравнений?

8 Векторы

8.1 Прямоугольная декартова система координат в пространстве

Прямоугольная (декартова) **система координат в пространстве** определяется заданием масштабной единицы измерения длин и трёх пересекающихся в одной точке *O* взаимно перпендикулярных осей *Ox, Oy и Oz*. Точка *O* называется **началом координат,** *Ox* – **осью ординат,** *Oz* – **осью аппликат** (рисунок 8.1).

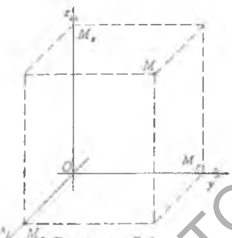


Рисунок 8.1

Пусть *M* – произвольная точка пространства (рисунок 8.1). Проведём через точку *M* три плоскости, перпендикулярные координатным осям. Точки пересечения с осями *Ox, Oy* и *Oz* обозначим соответственно M_x, M_y и M_z **Прямоугольными** (декартовыми) **координатами точки** ***M*** в пространстве называются числа x_0, y_0 и z_0, соответствующие точками M_x, M_y и M_z на соответствующих осях. При этом x_0 называется **абсциссой,** y_0 – **ординатой,** z_0 – **аппликатой** точки *M*. То, что точка *M* имеет координаты x_0, y_0 и z_0 обозначается: $M(x_0; y_0; z_0)$.

Плоскости *Oxy, Oyz* и *Oxz* называются **координатными плоскостями.** Они делят всё пространство на восемь частей, называемых **октантами.**

8.2 Понятие вектора

Некоторые физические величины (например: температура, масса, объём, длина) могут быть охарактеризованы одним числом, которое выражает отношение этой величины к соответствующей единице измерения. Такие величины называются **скалярными.** Другие величины (например: сила, скорость, ускорение) характеризуются не только числом, но и направлением. Эти величины называются **векторными.** Для описания таких величин в математике введено понятие «вектор».

Определение 8.1. Любая упорядоченная пара точек A и B пространства определяет **направленный отрезок**, т. е. отрезок с заданными на нём направлением. Направленный отрезок называется **вектором.** На рисунке направление вектора обычно изображают стрелкой. Если в упорядоченной паре точка A первая, то её называют **началом вектором**, а точку B – **концом вектора,** в этом случае вектор обозначается $\overline{AB}$. Иногда векторы обозначают малыми буквами $\overline{a}$, $\overline{b}$ и т. д.

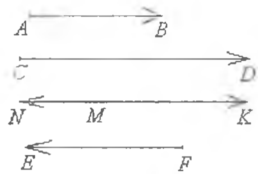


Рисунок 8.2

Модулем вектора $\overline{a}$ называется его длина. Обозначают модуль $|\overline{a}|$ или a.

Нуль-вектор (или нулевой вектор) – это вектор, начало и конец которого совпадают; обозначается он $\overline{o}$. Модуль нуль-вектора равен нулю, а направление не определено. **Единичным** называется вектор, длина которого равна единице.

Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются **коллинеарными,** если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Коллинеарные векторы могут быть направлены одинаково или противоположно (рисунок 8.2).

Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются **равными** (обозначается $\overline{a} = \overline{b}$), если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют равные модули.

Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются **противоположными** (обозначается $\overline{b} = -\overline{a}$), если они коллинеарны, противоположно направлены и имеют равные модули.

Три вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ называются **компланарными,** если они лежат в одной плоскости.

8.3 Линейные операции над векторами и проекция вектора на ось

8.3.1 Сумма двух векторов

К линейным операциям над векторами относятся: сложение, вычитание векторов и умножение вектора на число.

Определение 8.2. Суммой двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\overline{a}$, а конец – с концом вектора $\overline{b}$, если вектор $\overline{b}$ отложен из конца вектора $\overline{a}$ (рисунок 8.3). Обозначается: $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$.

Рисунок 8.3

Суммой векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ называется вектор, начало которого совпадает с началом вектора $\overline{a}_1$, а конец – с концом вектора $\overline{a}_n$, если каждый последующий вектор $\overline{a}_{i+1}$ отложен из конца предыдущего $\overline{a}_i$ для $i = 1, 2, ..., n-1$.

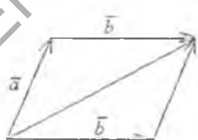


Рисунок 8.4

Свойства суммы векторов:

1. Свойство коммутативности: $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$ (рисунок 8.4).

2. Свойство ассоциативности: $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$ (рисунок 8.5).

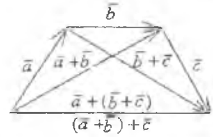


Рисунок 8.5

3. $\overline{a}+\overline{o}=\overline{a}$.
4. $\overline{a}+(-\overline{a})=\overline{o}$.

Определение 8.3. Разностью двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (обозначается: $\overline{a}-\overline{b}$) называется такой вектор $\overline{c}$, который в сумме с вектором $\overline{b}$ даёт вектор $\overline{a}$, т. е. $\overline{c}=\overline{a}-\overline{b}$, если $\overline{b}+\overline{c}=\overline{a}$ (рисунок 8.6).

Нетрудно заметить, что $\overline{c}=\overline{a}-\overline{b}=\overline{a}+(-\overline{b})$.

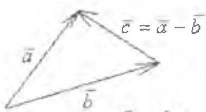


Рисунок 8.6

8.3.2 Произведение вектора на число

Определение 8.4. Произведение вектора $\overline{a}\neq 0$ на число $\alpha\neq 0$ называется вектор $\overline{b}$ (обозначается $\overline{b}=\overline{a}\alpha$), удовлетворяющий следующим условиям:

а) $|\overline{b}|=|\alpha||\overline{a}|$;

б) векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны;

в) векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ одинаково направлены при $\alpha>0$ и противоположно направлены при $\alpha<0$.

<u>Свойства произведения вектора на число.</u>

1) $(\overline{a}\beta)\alpha=\overline{a}(\beta\alpha)$.

2) $(\overline{a}_1+\ldots+\overline{a}_n)\alpha=\overline{a}_1\alpha+\ldots+\overline{a}_n\alpha$.

3) $\overline{a}(\alpha_1+\ldots+\alpha_n)=\overline{a}\alpha_1+\ldots+\overline{a}\alpha_n$.

4) Два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\overline{b}=\overline{a}\alpha$ для некоторого α.

8.3.3 Проекция вектора на ось

Пусть в пространстве задана ось ℓ и некоторый вектор $\overline{AB}$ (рисунок 8.7). Пусть A_1 – проекция точки A на ось ℓ, B_1 – проекция точки B на ось ℓ.

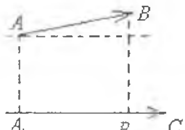


Рисунок 8.7

Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось ℓ называется величина A_1B_1 вектора $\overline{A_1B_1}$, взятая со знаком «+», если $\overline{A_1B_1}$ совпадает с направлением оси ℓ, и со знаком «–», если $\overline{A_1B_1}$ противоположно направлен направлению оси ℓ. Обозначается: $\text{пр}_\ell\overline{AB}$.

Свойства проекции векторов на ось.

1. $\text{пр}_\ell \overline{AB} = |\overline{AB}| \cdot \cos(\overline{AB} \wedge \ell)$ (рисунок 8.8);

2. $\text{пр}_\ell(\bar{a} + \bar{b}) = \text{пр}_\ell \bar{a} + \text{пр}_\ell \bar{b}$ (рисунок 8.9);

3. $\text{пр}_\ell(\bar{a}_1 + \ldots + \bar{a}_n) = \text{пр}_\ell \bar{a}_1 + \ldots + \text{пр}_\ell \bar{a}_n$;

4. $\text{пр}_\ell(\bar{a}\alpha) = (\text{пр}_\ell \bar{a})\alpha$ (рисунок 8.10);

5. $\text{пр}_\ell(\bar{a}_1\alpha_1 + \ldots + \bar{a}_n\alpha_n) = (\text{пр}_\ell \bar{a}_1)\alpha_1 + \ldots + (\text{пр}_\ell \bar{a}_n)\alpha_n$.

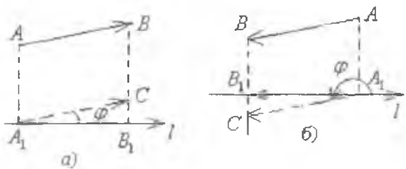


Рисунок 8.8

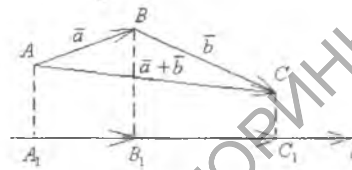


Рисунок 8.9

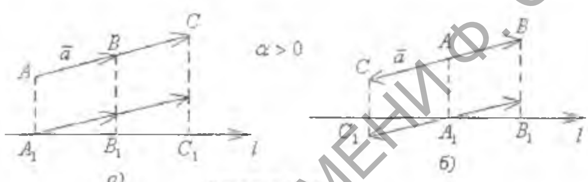


Рисунок 8.10

8.4 Координаты вектора

Пусть в пространстве заданы прямоугольная система координат $Oxyz$ и произвольный вектор $\overline{AB}$. Пусть $X = \text{пр}_x \overline{AB}$, $У = \text{пр}_y \overline{AB}$, $Z = \text{пр}_z \overline{AB}$. Проекции X, Y, Z вектора $\overline{AB}$ на оси координат называют его **координатами**. При этом пишут $\overline{AB} = (X, У, Z)$.

Теорема 8.1. Для любых точек $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ координаты вектора $\overline{AB}$, определяются формулами:

$$X = x_2 - x_1,\ У = y_2 - y_1,\ Z = z_2 - z_1.$$

Доказательство. По определению $X = \text{пр}_x \overline{AB}$. Если вектор $\overline{A_1B_1}$ направлен одинаково с осью Ox (рисунок 8.11), то $\text{пр}_x \overline{AB} = |\overline{A_1B_1}| = A_1B_1 = x_2 - x_1$, т. к. точке A_1 соответствует координата x_1, а точка B – координата x_2.

Если вектор $\overline{A_1B_1}$ направлен противоположно с осью Ox (рисунок 8.12), то $\text{пр}_x \overline{AB} = -|\overline{A_1B_1}| = -A_1B_1 = -(x_1 - x_2) = x_2 - x_1$.

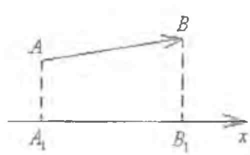


Рисунок 8.11

Рисунок 8.12

Таким образом, для любых точек $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ координата X вектора $\overline{AB}$ вычисляется по формуле $X = x_2 - x_1$.

Аналогично доказываются остальные формулы.

Пусть $\overline{a}_1 = (x_1; y_1; z_1)$, $\overline{a}_2 = (x_2; y_2; z_2), \ldots, \overline{a}_n = (x_n; y_n; z_n)$ – векторы пространства, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – ненулевые числа. Используя свойства проекции векторов на ось, получим следующие утверждения:

1) $\overline{a}_1\alpha_1 = (\alpha_1 x_1, \alpha_1 y_1, \alpha_1 z_1)$;

2) $\overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \ldots + \overline{a}_n = (x_1 + \ldots + x_n;\ y_1 + \ldots + y_n;\ z_1 + \ldots + z_n)$;

3) $\overline{a}_1 - \overline{a}_2 = (x_1 - x_2;\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2)$;

4) $\overline{a}_1\alpha_1 + \ldots + \overline{a}_n\alpha_n = (\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n; \alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n; \alpha_1 z_1 + \ldots + \alpha_n z_n)$;

5) $\overline{a}_1 = \overline{a}_2 \Rightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2,\ z_1 = z_2$.

8.4.1 Длина вектора. Расстояние между точками в пространстве

Пусть дан произвольный вектор $\overline{a} = (x_0; y_0; z_0)$. Построим равный ему вектор $\overline{a}_1$, начало которого совпадает с началом координат. Так как $\overline{a}_1 = \overline{a}$, то $\overline{a}_1 = (x_0; y_0; z_0)$.

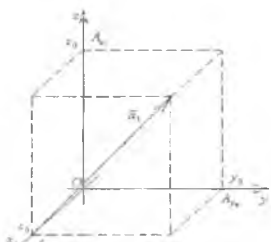


Рисунок 8.13

Проведём через конец вектора $\overline{a}_1$ плоскости, перпендикулярные осям (рисунок 8.13). Вместе с координатными плоскостями они образуют прямоугольный параллелепипед, диагональю которого служит отрезок OA. Из элементарной геометрии известно, что $OA^2 = OA_{x_0}^2 + OA_{y_0}^2 + OA_{z_0}^2$.

Но $OA = |\overline{a}_1|$, $OA_{x_0} = |x_0|$, $OA_{y_0} = |y_0|$, $OA_{z_0} = |z_0|$. Тогда из $|\overline{a}_1| = |a|$ имеем $|\overline{a}|^2 = x_0{}^2 + y_0{}^2 + z_0{}^2$, откуда

$$|a| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}\,. \tag{8.1}$$

Формула (8.1) выражает длину вектора $\overline{a}$ через его координаты.

Пусть вектор $\overline{a} = \overline{AB}$, где $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$. По теореме 8.1 $\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$. Из формулы (8.1)

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,.$$

Так как d – расстояние между точками A и B, равно $|\overline{AB}|$, то имеем формулу для нахождения расстояния между точками A и B

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,. \tag{8.2}$$

8.4.2 Деление отрезка в данном отношении

Теорема 8.2. Пусть $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Если точка $M(x_0; y_0; z_0)$ делит отрезок M_1M_2 в отношении α, то

$$x_0 = \frac{x_1 + \alpha \cdot x_2}{1 + \alpha}, \quad y_0 = \frac{y_1 + \alpha \cdot y_2}{1 + \alpha}, \quad z_0 = \frac{z_1 + \alpha \cdot z_2}{1 + \alpha}. \tag{8.3}$$

Доказательство. Нетрудно заметить (рисунок 8.14), что $\overline{OM} = \overline{OM_1} + \overline{M_1M}$.

Так как $\frac{M_1M}{MM_2} = \alpha$, то $\overline{M_1M} = \overline{MM_2} \cdot \alpha$. Вектор $\overline{MM_2} = \overline{OM_2} - \overline{OM}$.

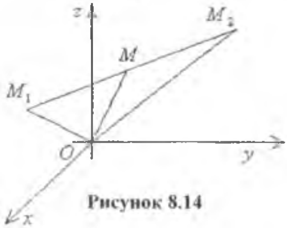


Рисунок 8.14

Теперь, $\overline{OM} = \overline{OM_1} + (\overline{OM_2} - \overline{OM}) \cdot \alpha$,

$\overline{OM} + \overline{OM} \cdot \alpha = \overline{OM_1} + \overline{OM_2} \cdot \alpha$,

$\overline{OM} \cdot (1 + \alpha) = \overline{OM_1} + \overline{OM_2} \cdot \alpha$,

$\overline{OM} = (\overline{OM_1} + \overline{OM_2} \cdot \alpha) \cdot \frac{1}{1+\alpha}$.

Перейдём к координатам: $\overline{OM} = (x_0; y_0; z_0)$, $\overline{OM_1} = (x_1; y_1; z_1)$, $\overline{OM_2} = (x_2; y_2; z_2)$. Тогда $(x_0; y_0; z_0) = ((x_1; y_1; z_1) + (x_2; y_2; z_2)\alpha) \cdot \frac{1}{1+\alpha}$, откуда

$$x_0 = \frac{x_1 + \alpha \cdot x_2}{1+\alpha}, \quad y_0 = \frac{y_1 + \alpha \cdot y_2}{1+\alpha}, \quad z_0 = \frac{z_1 + \alpha \cdot z_2}{1+\alpha}.$$

Следствие. Пусть $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Если $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – середина отрезка M_1M_2, то

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какая система координат в пространстве называется прямоугольной декартовой?
2. Что называется вектором и как он изображается?
3. Как складываются вектора и что называется их суммой (вектор или скаляр)? Что является проекцией вектора на ось?
4. Что называется координатами вектора?
5. Как находится длина вектора?
6. Как проводится деление отрезка в данном отношении?

9 Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов

9.1 Расположение векторов по базисным векторам

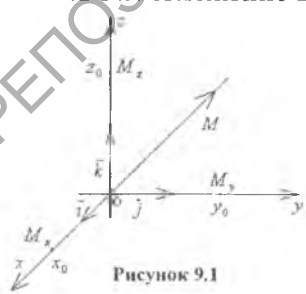


Рисунок 9.1

Пусть задана прямоугольная система координат в пространстве (рисунок 9.1). Введём в рассмотрение единичные векторы $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ координатных осей Ox, Oy, Oz, соответственно. Вектор $\bar{i}$ одинаково направлен с осью Ox, $\bar{j}$ – с осью Oy, $\bar{k}$ – с осью Oz. Векторы $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ называются **базисными векторами системы координат или ортами.**

Пусть $\bar{a} = (x_0, y_0, z_0)$ – произвольный вектор пространства. Отложим из начала координат O вектор

$\overline{OM} = \overline{a}$. По свойствам координат $\overline{OM} = (x_0, y_0, z_0)$. Пусть числу x_0 на оси Ox соответствует точка M_x, числу y_0 на Oy – M_y и числу z_0 на оси Oz – точка M_z. Тогда $\overline{OM_x} = \overline{i}x_0$, $\overline{OM_y} = \overline{j}y_0$, $\overline{OM_z} = \overline{k}z_0$.

Так как $\overline{OM}$ – диагональ прямоугольного параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{OM_x}$, $\overline{OM_y}$ и $\overline{OM_z}$, то нетрудно заметить, что

$$\overline{OM} = \overline{OM_x} + \overline{OM_y} + \overline{OM_z},$$

откуда

$$\overline{a} = \overline{OM} = \overline{i}x_0 + \overline{j}y_0 + \overline{k}z_0.$$

Последняя формула даёт **разложение вектора** $\overline{a}$ по базисным векторам $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$.

9.2 Скалярное произведение векторов

Определение 9.1. Скалярным произведением двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число, равное произведению их модулей на косинус угла между векторами. Обозначение $\overline{a} \cdot \overline{b}$.

Итак, по определению $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos\varphi$, где φ – угол между $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Свойства скалярного произведения

1. $(\overline{a})^2 = \overline{a} \cdot \overline{a} = |\overline{a}| \cdot |\overline{a}| \cos 0 = |\overline{a}|^2$.
2. Свойство коммутативности: $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$.

Действительно, $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos\varphi = \overline{b} \cdot \overline{a} = |\overline{b}| \cdot |\overline{a}| \cos\varphi$.

3. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$.
4. Косинус угла φ между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|}.$$

5. $\overline{a} \cdot (\overline{b}\alpha) = (\overline{a} \cdot \overline{b})\alpha$, $(\overline{a}\alpha) \cdot (\overline{b}\beta) = (\overline{a} \cdot \overline{b})(\alpha\beta)$.
6. $\overline{a} \cdot (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}$.

Теорема 9.1. Если векторы $\overline{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\overline{b} = (x_2; y_2; z_2)$, то

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Доказательство. Запишем разложение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ по базисным векторам $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$:

$$\overline{a} = \overline{i}x_1 + \overline{j}y_1 + \overline{k}z_1, \quad \overline{b} = \overline{i}x_2 + \overline{j}y_2 + \overline{k}z_2.$$

Тогда, используя свойства скалярного произведения, имеем

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = (\overline{i}x_1 + \overline{j}y_1 + \overline{k}z_1)(\overline{i}x_2 + \overline{j}y_2 + \overline{k}z_2) \overset{св\,6}{=} (\overline{i}x_1)(\overline{i}x_2) + (\overline{j}y_1)(\overline{i}x_2) + (\overline{k}z_1)(\overline{i}x_2) +$$

$$+ (\overline{i}x_1)(\overline{j}y_2) + (\overline{j}y_1)(\overline{j}y_2) + (\overline{k}z_1)(\overline{j}y_2) + (\overline{i}x_1)(\overline{k}z_2) + (\overline{j}y_1)(\overline{k}z_2) + (\overline{k}z_1)(\overline{k}z_2) \overset{св\,5}{=}$$

$$= \overline{i}^2(x_1x_2) + (\overline{j} \cdot \overline{i})y_1x_2 + (\overline{k} \cdot \overline{i})z_1x_2 + (\overline{i} \cdot \overline{j})x_1y_2 + \overline{j}^2(y_1y_2) + (\overline{k} \cdot \overline{j})z_1y_2 + (\overline{i} \cdot \overline{k})x_1z_2 +$$

$$+ (\overline{j} \cdot \overline{k})y_1z_2 + \overline{k}^2(z_1z_2).$$

Теперь, по свойству 1: $\bar{i}^2 = \left|\bar{i}^2\right| = 1$, $\bar{j}^2 = 1$, $\bar{k}^2 = 1$.
По свойству 3: $\bar{i}\cdot\bar{j} = \bar{j}\cdot\bar{i} = \bar{k}\cdot\bar{i} = \bar{i}\cdot\bar{k} = \bar{j}\cdot\bar{k} = \bar{k}\cdot\bar{j} = 0$.

Следовательно, $\bar{a}\cdot\bar{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Следствие 9.1. Если $\bar{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\bar{b} = (x_2; y_2; z_2)$, то косинус угла между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2} + z_1^{\ 2}}\cdot\sqrt{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2} + z_2^{\ 2}}}.$$

Следствие 9.2. Векторы $\bar{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\bar{b} = (x_2; y_2; z_2)$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

Пример. Найти угол между векторами $\bar{a} = (7; 2; -8)$ и $\bar{b} = (11; -8; -7)$.

Решение. По следствию 9.1

$$\cos\varphi = \frac{77 - 16 + 56}{\sqrt{49+4+64}\cdot\sqrt{121+64+49}} = \frac{117}{117\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad \text{Тогда } \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

9.3 Векторное произведение векторов

9.3.1 Правая и левая система координат

Три некомпланарных вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, взятых в указанном порядке называют **тройкой векторов.** Пусть векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ отложены из одной точки. Будем смотреть с конца вектора $\bar{c}$ на плоскость, в которой лежат векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Если кратчайший поворот от $\bar{a}$ к $\bar{b}$ совершается против часовой стрелки, то тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ называется **правой тройкой** (рисунок 9.2). Если же указанный поворот совершается по часовой стрелке, то тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ называется **левой** (рисунок 9.3).

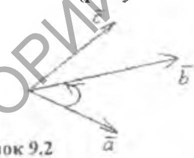


Рисунок 9.2

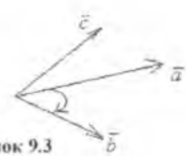


Рисунок 9.3

Декартовая прямоугольная система координат $Oxyz$ называется **правой,** если тройка её базисных векторов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ является правой, и **левой,** если тройка $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – левая. В основном используют правые прямоугольные системы координат.

9.3.2 Векторное произведение векторов

Определение 9.2. Векторным произведением вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется вектор $\bar{a}\times\bar{b}$, который удовлетворяет следующим условиям:

1) $\left|\bar{a}\times\bar{b}\right| = \left|\bar{a}\right|\left|\bar{b}\right|\sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$;
2) вектор $\bar{a}\times\bar{b}$ перпендикулярен каждому из векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$;
3) тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{a}\times\bar{b}$ – правая.

Свойства векторного произведения

1. $\bar a \times \bar a = 0$ для любого вектора $\bar a$.

2. Векторы $\bar a$ и $\bar b$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\bar a \times \bar b = 0$.

3. Площадь параллелограмма, построенного на неколлинеарных векторах $\bar a$ и $\bar b$, равна $|\bar a \times \bar b|$.

4. Площадь треугольника, построенного на неколлинеарных векторах $\bar a$ и $\bar b$, равна $\frac{1}{2}|\bar a \times \bar b|$.

5. $\bar a \times \bar b = -(\bar b \times \bar a)$.

6. $(\bar a + \bar b) \times \bar c = \bar a \times \bar c + \bar b \times \bar c$.

7. $(\bar a\,\alpha) \times (\bar b\,\beta) = (\bar a \times \bar b)(\alpha\beta)$.

Теорема 9.2. Если $\bar a = (x_1; y_1; z_1)$ и $\bar b = (x_2; y_2; z_2)$, то

$$\bar a \times \bar b = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \bar i \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \bar j \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \bar k \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Запишем разложение векторов $\bar a$ и $\bar b$ по базисным векторам:

$$\bar a = \bar i x_1 + \bar j y_1 + \bar k z_1, \quad \bar b = \bar i x_2 + \bar j y_2 + \bar k z_2.$$

Составим таблицу векторных произведений базисных векторов, используя рисунок 9.4:

Рисунок 9.4

×	$\bar i$	$\bar j$	$\bar k$
$\bar i$	$\bar 0$	$\bar k$	$-\bar j$
$\bar j$	$-\bar k$	$\bar 0$	$\bar i$
$\bar k$	$\bar j$	$-\bar i$	$\bar 0$

Теперь

$$\bar a \times \bar b = (\bar i x_1 + \bar j y_1 + \bar k z_1) \times (\bar i x_2 + \bar j y_2 + \bar k z_2) \overset{св\,6}{=} (\bar i x_1)\times(\bar i x_2) + (\bar j y_1)\times(\bar i x_2) + (\bar k z_1)\times(\bar i x_2) +$$

$$+ (\bar i x_1)\times(\bar j y_2) + (\bar j y_1)\times(\bar j y_2) + (\bar k z_1)\times(\bar j y_2) + (\bar i x_1)\times(\bar k z_2) + (\bar j y_1)\times(\bar k z_2) + (\bar k z_1)\times(\bar k z_2) \overset{св.7}{=}$$

$$\overset{св.7}{=} (\bar i \times \bar i)x_1 x_2 + (\bar j \times \bar i)y_1 x_2 + (\bar k \times \bar i)z_1 x_2 + (\bar i \times \bar j)x_1 y_2 + (\bar j \times \bar j)y_1 y_2 + (\bar k \times \bar j)z_1 y_2 + (\bar i \times \bar k)x_1 z_2 +$$

$$+ (\bar j \times \bar k)y_1 z_2 + (\bar k \times \bar k)z_1 z_2 \overset{\text{по таблице}}{=} -\bar k(y_1 x_2) + \bar j(z_1 x_2) + \bar k(x_1 y_2) - \bar i(z_1 y_2) - \bar j(x_1 z_2) + \bar i(y_1 z_2) =$$

$$= \bar i(y_1 z_2 - z_1 y_2) - \bar j(x_1 z_2 - z_1 x_2) + \bar k(x_1 y_2 - y_1 x_2) = \bar i \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \bar j \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \bar k \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Следствие 9.3. Площадь параллелограмма, построенного на неколлинеарных векторах $\bar a = (x_1; y_1; z_1)$ и $\bar b = (x_2; y_2; z_2)$ равна модулю векторного произведения $\bar a \times \bar b$, т. е.

$$S_{\text{паралл.}} = |\bar{a} \times \bar{b}| = \sqrt{\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2}.$$

Следствие 9.4. Площадь треугольника, построенного на неколлинеарных векторах $\bar{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\bar{b} = (x_2; y_2; z_2)$ вычисляется по формуле

$$S_{\text{треуг}} = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2}.$$

Пример. Найти площадь треугольника ABC, если $A(-1; -1; 1)$, $B(1; -3; 4)$, $C(3; -1; -5)$.

Решение. Найдём координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:
$\overline{AB} = (2; -2; 3)$, $\overline{AC} = (4; 0; -6)$. Тогда

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -6 \end{vmatrix} = \bar{i}\cdot 12 + \bar{j}\cdot 24 + \bar{k}\cdot 8, \text{ т. е. } \overline{AB} \times \overline{AC} = (12; 24; 8).$$

Следовательно,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{12^2 + 24^2 + 8^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4^2(3^2 + 6^2 + 2^2)} = 2\sqrt{9+36+4} = 14. \text{ (кв. ед.)}.$$

Ответ: 14.

9.4 Смешанное произведение векторов

Определение 9.3. Пусть даны три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$. Умножим вектор $\bar{a}$ на $\bar{b}$ векторно, а затем, векторное произведение $\bar{a} \times \bar{b}$ умножим скалярно на $\bar{c}$. В результате получим число $(\bar{a} \times \bar{b})\cdot \bar{c}$, которое называют **смешанным произведение** трёх векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$.

Теорема 9.3. Смешанное произведение $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$ трёх некомпланарных векторов равно объёму параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, связанному со знаком «+», если тройка $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ правая, и со знаком «–», если эта тройка – левая.

Доказательство. Рассмотрим параллелепипед, построенный на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ (рисунок 9.5).

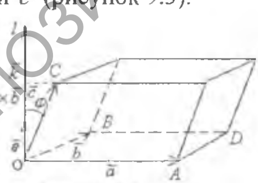


Рисунок 9.5

Построим вектор $\bar{a} \times \bar{b}$ и пусть $\bar{e}$ – единичный вектор, одинаково направленный с вектором $\bar{a} \times \bar{b}$. Так как $|\bar{a} \times \bar{b}| = S$ – площадь параллелограмма $OBDA$, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, то $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{e} \cdot S$.

Возьмём ось ℓ, одинаково направленную с вектором $\bar{e}$. Тогда по свойствам проекции векторов $\text{пр}_e\bar{c} = |\bar{c}|\cos\varphi$, где φ – угол между $\bar{c}$ и осью ℓ. Тогда $|\text{пр}_e\bar{c}| = h$, где h – высота параллелепипеда. Отметим, что если тройка $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ правая (рисунок 9.5), то $h = \text{пр}_e\bar{c} = |\bar{c}|\cos\varphi$. Если же тройка $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ левая, то $h = -\text{пр}_e\bar{c} = -|\bar{c}|\cos\varphi$.

Теперь,
$(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}=(\overline{e}\,S)\cdot\overline{c}=(\overline{e}\cdot\overline{c})S=|\overline{e}||\overline{c}|\cos\varphi\cdot S=S\cdot|\overline{c}|\cos\varphi=\pm S\cdot h=\pm V_{\text{параллелепипеда}},$
причём знак «+» берётся, если $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ – правая тройка, и знак «–», если она левая.

Следствие 9.5. Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение $(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}=0$.

Доказательство.

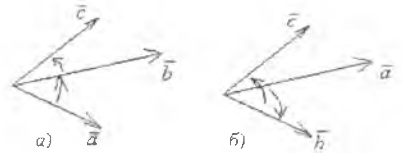


Рисунок 9.6

Отметим, что если тройка $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ правая, то тройка $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{a}$ также правая (рисунок 9.6, а), а если тройка $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ левая, то тройка $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{a}$ также левая (рисунок 9.6, б).

Очевидно, что параллелепипед, построенный на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ и векторах $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{a}$ – один и тот же. Поэтому

$$(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}=\pm V_{\text{парал}},\quad (\overline{b}\times\overline{c})\cdot\overline{a}=\pm V_{\text{паралл}}.$$

Так как тройки $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ и $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{a}$ либо обе правые, либо обе левые, то знак перед V выбирается в обоих произведениях одинаково. Поэтому

$$(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}=(\overline{b}\times\overline{c})\cdot\overline{a}=\overline{a}\cdot(\overline{b}\times\overline{c}).$$

Ввиду следствия 9.5 смешанное произведение векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ ещё обозначают $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$.

Теорема 9.4. Если $\overline{a}=(x_1; y_1; z_1)$, $\overline{b}=(x_2; y_2; z_2)$, $\overline{c}=(x_3; y_3; z_3)$,

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.$$

Доказательство.

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}=(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}=x_3\cdot\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}-y_3\cdot\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}+z_3\cdot\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.$$

Пример. Найти объём параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}=(3; 1; 2)$, $\overline{b}=(2; 2; 3)$, $\overline{c}=(1; 3; 1)$.

Решение.

$$V=\left|\begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}\right|=|6+12+3-4-27-2|=|-12|=12 \text{ (куб. ед.)}.$$

Ответ: 12.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называют базисными векторами?
2. Что называется скалярным произведением двух векторов? Каковы его свойства?
3. Какие системы координат называют правыми (левыми)?
4. Что называется векторным произведением двух векторов? Каковы его свойства?
5. Что называется векторно-скалярным (смешанным) произведением векторов? Каковы его свойства?

Литература

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : в 2 ч. / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис-пресс, 2004. – 280 с.

2. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов / Н. Ш. Кремер. – М. : «Юнити». 1997 г. – 439 с.

3. Минорский, В. П. Сборник задач по высшей математике / В. П. Минорский. – М., 1978. – 352 с.

4. Яблонский, А. И. Высшая математика /А. И. Яблонский. – Мн. : Высшая школа, 2000. – 351 с.

5. Гусак, А. А. Задачи и упражнения по высшей математике / А. А. Гусак. – Мн. : Высшая школа, 1988. – 544 с.

6. Гурский, Е. И. Руководство к решению задач по высшей математике / Е. И. Гурский. – Мн. : Высшая школа, 1989. – 348 с.

7. Александров, П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / П. С. Александров. – М. : Наука, 1979. – 512 с.

8. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии / А. А. Бурдун [и др.]. – Мн. : Университетское, 1999. – 302 с.

9. Милованов, М. В. Алгебра и аналитическая геометрия / М. В. Милованов, Р. И. Тышкевич, А. С. Феденко. – Мн. : Вышэйшая школа, 1984. – 269 с.

10. Гусак, А. А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: справочное пособие по решению задач / А. А. Гусак. – Мн. : ТетраСистемс, 2001. – 288 с.

11. Тер-Крикоров, А. М. Курс математического анализа: учебное пособие для вузов / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. – М. : Наука Гл. ред. физ.-мат. Лит., 2001. – 672 с.

12. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для вузов / Н. С. Пискунов. – М.: Наука, 1970. – 560 с.

13. Бугров, Я. С. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функция комплексного переменного / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М. : Наука,1981. – 506 с.

14. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Р. Ф. Апатенок [и др.]. – Мн. : Вышэйшая школа, 1986. – 272 с.

15. Выготский, М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выготский. – М. : Наука, 1966. – 872 с.

16. Справочник по высшей математике / А. А. Гусак [и др.]. – Мн. : ТетраСистемс, 2000. – 638 с.

Производственно-практическое издание

БУЗЛАНОВ Александр Васильевич
БОРОДИЧ Елена Николаевна
БОРОДИЧ Руслан Викторович
БОРОДИЧ Тимур Викторович

Высшая математика: алгебра и аналитическая геометрия на плоскости

Практическое руководство
для студентов экономических специальностей вуза

Редактор *В. И. Шкредова*
Корректор *В. В. Калугина*

Подписано в печать 18.11.2011. Формат $60\times84^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 2,8.
Уч.-изд. л. 3,0. Тираж 30. Заказ № 534

6000 - 00

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»
ЛИ № 02330/0549481 от 14.05.2009.
Ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель.