М. С. Белокурский
(*УО «ГГУ им. Ф. Скорины», Гомель*)

КРИТИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНСНЫЙ СЛУЧАЙ ЧАСТИЧНО НЕРЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим линейную систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varphi(t), \quad \mathrm{Mod}(A) \cap \mathrm{Mod}(\varphi) = \{0\}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

предполагая почти периодичность матрицы коэффициентов $A(t)$ и вынуждающей силы $\varphi(t)$. Пусть $A(t) - \hat{A} = A_*(t)$, $\hat{A} = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\limits_0^T A(t)dt$. Введем замену переменных $x = Q_{A_*}y$, где Q_{A_*} такая $n \times n$ – матрица, что у матрицы $A_*(t)Q_{A_*}$ первые $n - d = s$ столбцов нулевые, а остальные столбцы линейно независимы. Обозначим $B = Q_{A_*}^{-1}\hat{A}Q_{A_*}$; $\psi(t) = Q_{A_*}^{-1}\varphi(t)$; $B_*(t) = A_*(t)Q_{A_*}$; $y = \mathrm{col}(y^{[s]}, y_{[n-s]})$, $y^{[s]} = \mathrm{col}(y_1, \ldots, y_s)$, $y_{[n-s]} = \mathrm{col}(y_{s+1}, \ldots, y_n)$; $\psi(t) = \mathrm{col}(\psi^{[s]}(t), \psi_{[n-s]}(t))$; $B^{[s,s]}$, $B_{[n-s,s]}$ – соответственно верхний и нижний блоки $n \times s$-матрицы, полученной из матрицы B вычеркиванием последних d. Пусть $\alpha_k \pm i\beta_k \quad (k = 1,\dots,k'; k' \le n; i^2 = -1)$ – собственные числа матрицы $B^{[s,s]}$, и

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad \beta_2 = \beta_1 \in \mathrm{Mod}(\varphi), \quad \alpha_q \ne 0 \quad (q = 3,\dots,k'). \tag{2}$$

Положим, $S(t) = S_2^{-1}(t)S_1^{-1}$, где $S_2(t) = diag[e^{i\beta_1 t}, e^{i\beta_1 t}, e^{-i\beta_1 t}, e^{-i\beta_1 t}, 1,\dots,1]$, а матрица S_1 приводит матрицу $B^{[s,s]}$ к жордановой нормальной форме, т.е. $S_1^{-1}B^{[s,s]}S_1 = J_{B^{[s,s]}} = diag[J_1, J_2, J_3,\dots, J_{k'}] = diag[J_1, J_2, J], J_1 = \begin{pmatrix} i\beta_1 & 1 \\ 0 & i\beta_1 \end{pmatrix}, J_2 = \begin{pmatrix} -i\beta_1 & 1 \\ 0 & -i\beta_1 \end{pmatrix},$

где J – жорданова форма, отвечающая остальным СЗ матрицы $B^{[s,s]}$.

Теорема. *Пусть в системе* (1) *матрица коэффициентов* $A(t)$ *и вынуждающая сила* $\varphi(t)$ – *почти периодические с тривиальным пересечением их частотных модулей и для редуцированной системы*

$$\frac{dy^{[s]}}{dt} = B^{[s,s]}y^{[s]} + \psi^{[s]}(t) \tag{3}$$

имеет место критический резонансный случай (2). *Тогда:*

1) *Если система* (1) *имеет почти периодическое нерегулярное по отношению к* $\mathrm{Mod}(A)$ *решение* $x(t)$, *то это решение является нерегулярным вынужденным, т.е.* $\mathrm{Mod}(x) \subseteq \mathrm{Mod}(\varphi)$.

2) *Для того, чтобы система* (1) *имела нерегулярное вынужденное почти периодическое решение необходимо и достаточно выполнения условия* $rank_{\mathrm{col}} A_* = d < n$ *и оценки* $\sup_t |\int_0^t S_{(2)}(\tau)\psi^{[s]}(\tau)d\tau| < \infty$, $\sup_t |\int_0^t (\int_0^\tau S_{(2)}(\sigma)\psi^{[s]}(\sigma)d\sigma + S_{(1)}\psi^{[s]}(\tau))d\tau| < \infty$, *а для почти периодического решения* $y^{[s]}(t)$ *системы* (3) *в случае* (2) *имело место тождество* $B_{[n-s,s]}y^{[s]}(t) + \psi_{[n-s]}(t) \equiv 0$.