М. С. Коледа
(*УО «БрГТУ», Брест*)

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С НИЛЬПОТЕНТНЫМИ ПОДГРУППАМИ

Рассматриваются только конечные группы. Используемая терминология соответствует [1].

Множество всех простых делителей порядка группы G обозначается через $\pi(G)$. Запись $Y \le X$ означает, что Y – подгруппа группы X, а $|H|$ – число элементов в H.

Ненильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы нильпотентны, называется группой Шмидта. Эти группы впервые рассматривались О. Ю. Шмидтом [2], который доказал их бипримарность, нормальность одной силовской подгруппы и цикличность другой. Обзор о строении групп Шмидта и их приложений в теории конечных групп имеются в [3].

Доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть в группе G для каждой собственной подгруппы H существует нильпотентная подгруппа H_1 такая, что $|H_1| = |H|$. Тогда либо группа G нильпотентна, либо $|\pi(G)| = 2$ и в G есть нормальная силовская подгруппа.*

Группы Шмидта удовлетворяют условию теоремы 1. Следующие примеры показывают, что силовские подгруппы группы из теоремы 1 не наследуют свойства силовских подгрупп групп Шмидта. Пусть S_n – симметрическая группа степени n, а Z_n – циклическая группа порядка n.

Пример 1. В группе $S_3 \times Z_2$ ненормальная силовская подгруппа не циклическая, она изоморфна $Z_2 \times Z_2$.

Пример 2. В группе $S_3 \times Z_9$ нормальная силовская подгруппа не шмидтовского типа, она изоморфна $Z_3 \times Z_9$.

Литература

1 Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Высшая школа, 2006. – 207 с.

2 Шмидт, О. Ю. Группы, все подгруппы которых специальные / Ю. О. Шмидт // Мат. сб. - 1924. – Т. 31. – С. 366-372.