В. И. Мурашко
(*УО «ГГУ им. Ф. Скорины», Гомель*)

О ГРУППАХ С УСЛОВИЯМИ НА N-КРИТИЧЕСКИЙ ГРАФ

Все рассматриваемые группы конечны. Используются стандартные обозначения и терминология [1, 2]. Напомним, что (p, q)-группой Шмидта называется группа Шмидта G для которой $\pi(G) = \{p, q\}$ и которая имеет нормальную силовскую p-подгруппу; N-критическим графом $\Gamma_{Nc}(G)$ группы G называется ориентированный граф с множеством вершин $\pi(G)$ и (p, q) является ребром $\Gamma_{Nc}(G)$, если в G имеется (p, q)-подгруппа Шмидта [3]. Пусть Γ – ориентированный граф. Через **Г** будем обозначать неориентированный мультиграф на множестве вершин V(Г) в котором две вершины соединены стольким числом ребер, скольким они соединены в Г (т. е. 0, 1 или 2).

Согласно [3, теорема 6.2(2)], если $\Gamma_{Nc}(G)$ не имеет циклов, то группа G дисперсивна. Заметим, что на любом не ориентированном графе можно ввести ориентацию так, что получившийся ориентированный граф не будет иметь циклов. В случае, если к тому же $\mathbf{\Gamma}_{Nc}(G)$ не имеет циклов (является лесом), то о группе можно получить дополнительную информацию:

Теорема. *Пусть* Γ *– ориентированный граф на* $\pi(G)$, $\mathbf{\Gamma}$ *не имеет циклов и* G *– группа. Тогда и только тогда* $\Gamma_{Nc}(G) \subseteq \Gamma$, *когда выполняются следующие утверждения*:

1. *G метанильпотентна*.
2. *Если* $d_{\mathbf{\Gamma}}(p, r) \geq 2$ *и не существует* q *такого, что* $(q, p), (q, r) \in E(\Gamma)$, *то всякий* r*-элемент* G *перестановочен со всяким* p*-элементом* G.
3. *Пусть* $d_{\mathbf{\Gamma}}(p, r) = 2$ *и* $(q, p), (q, r) \in E(\Gamma)$, *Тогда* $[a, b] \in O_p(G)$, *где* a *и* b *–* p*-элемент и* r*-элемент группы* G.
4. *Если* $(p, q) \in E(\Gamma)$, *то всякий* q*-элемент группы* G *перестановочен со всякой силовской* p*-подгруппой группы* G.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта БРФФИ №Ф17РМ-063.

Литература

1 Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.

2 Distel, R. Graph theory (third edition) / R. Distel. – Springer-Verlag, 2005. – 423 p.

3 Васильев, А. Ф. Арифметические графы конечных групп / А. Ф. Васильев, В. И. Мурашко // Сиб. матем. жур. – 2019. – Т. 60, № 1. – С. 55-73.