

СВОЙСТВА ПОЛЕЙ И ПОТЕРИ В ТРЕХЗЕРКАЛЬНОМ КОЛЬЦЕВОМ ОПТИЧЕСКОМ РЕЗОНАТОРЕ С ГАУССОВОЙ ДИАФРАГМОЙ

В. Ф. Бойцов и Т. А. Мурина

Рассмотрены собственные поля и потери в трехзеркальном кольцевом резонаторе с гауссовой диафрагмой внутри. Показано, что распределения полей встречных волн не совпадают между собой. Получен критерий устойчивости резонатора с диафрагмой. Приводятся и анализируются результаты численного расчета положений шеек каустик полей и потери резонаторов с диафрагмой при различных ее размерах и положениях.

§ 1. Аналитическое описание резонансных полей

В связи с экспериментальными исследованиями [1-3] представляет интерес теоретически рассмотреть свойства полей встречных волн и радиационные потери в кольцевом резонаторе с диафрагмой.

Пусть задан кольцевой резонатор (рис. 1), образованный двумя плоскими зеркалами и одним цилиндрическим с радиусом кривизны R , который считаем положительным, если выпуклость зеркала направлена «наружу» по отношению к резонатору, и отрицательным, если выпуклость направлена «внутри». Зеркала расположены в вершинах произвольного треугольника (резонаторный треугольник), периметр которого L . Центр кривизны цилиндрического зеркала лежит на биссектрисе соответствующего угла 2α . Зеркала резонатора предполагаем полностью отражающими, а их апертуры «бесконечными».

Для аналитического описания поперечного распределения полей внутри и вне резонатора и коэффициента пропускания диафрагмы введем орт x , направление которого в разных частях резонатора показано на

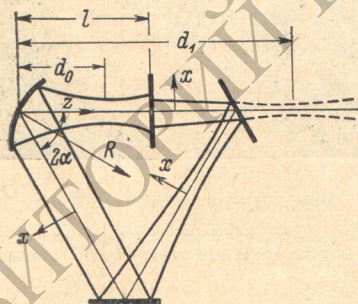


Рис. 1.

рис. 1. Переменное расстояние, отсчитываемое от цилиндрического зеркала вдоль периметра резонаторного треугольника по часовой стрелке, обозначим через z .

Диафрагма расположена в точке $z=l$ перпендикулярно соответствующему плечу резонаторного треугольника. Предполагается, что отражение от нее отсутствует, а коэффициент пропускания изменяется по апертуре по гауссовому закону.¹

$$T(x) = \exp \left\{ -\frac{x^2}{a^2} \right\}. \quad (1)$$

¹ Подобную диафрагму можно создать с помощью засветки фотопленки нулевой модой лазера.

В работе [4] для кольцевого резонатора с гауссовой диафрагмой получен ряд результатов. В частности, установлено, что поперечные распределения полей встречных волн на цилиндрическом зеркале резонатора, вообще говоря, различны. Это различие вызвано исключительно диафрагмой и зависит от ее положения l и размеров ($2a$). Очевидно, что такая невязанность в распределениях полей, падающих на зеркало, связана с их различным распределением внутри резонатора.

Пусть распределение поля внутри резонатора для волны, бегущей по часовой стрелке, будет $\mathcal{F}(x, l, a, z)$ и для волны в противоположном направлении $\mathcal{F}^{(-)}(x, l, a, z)$. Из свойств симметрии имеем

$$\mathcal{F}(x, l, a, z) = \mathcal{F}^{(-)}(x, L-l, a, L-z). \quad (2)$$

Это равенство выполняется с точностью до несущественных здесь множителей, которые не зависят от x . Оно позволяет при анализе свойств полей встречных волн в резонаторе ограничиться рассмотрением поля, бегущего лишь в одном направлении. В дальнейшем мы будем рассматривать поле волны, бегущей по часовой стрелке.

Выпишем аналитические формулы для распределения поля, бегущего по часовой стрелке, в резонаторе с гауссовой диафрагмой [4] в удобных для дальнейшего анализа обозначениях

$$\left. \begin{aligned} F_{0m}(x, z) &= \mathcal{F}_{0m}(x, z), \\ F_{1m}(x, z) &= (-1)^{m/2} \Gamma_m \mathcal{F}_{1m}(x, L-z). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Функция $F_{0m}(x, z)$ определяет поле внутри резонатора между цилиндрическим зеркалом и диафрагмой в плоскости, перпендикулярной плечу резонаторного треугольника. Функция $F_{1m}(x, z)$ дает продолжение поля $\mathcal{F}_{0m}(x, z)$ после диафрагмы. $\mathcal{F}_{jm}(x, z_j)$ выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{jm}(x, z_j) &= \frac{\exp\{i(-1)^j k z_j\}}{\sqrt{\xi - ia_j(z_j)}} \sqrt{\frac{Lp}{iz_j}} \left[\frac{\xi + ia_j(z_j)}{\xi - ia_j(z_j)} \right]^{m/2} \times \\ &\times \exp\left\{ \frac{ikx^2}{2z_j} \left[(-1)^j - \frac{Lp a_j(z_j)}{z_j(\xi^2 + a_j^2(z_j))} \right] \right\} D_m \left[\sqrt{\frac{k\xi Lp}{\xi^2 + a_j^2(z_j)}} \frac{x}{z_j} \right] \quad (4) \\ &(j=0, 1; z_0=z, z_1=L-z). \end{aligned}$$

В этой формуле введены обозначения

$$D_m(X) = (-1)^m \exp\left\{ \frac{X^2}{2} \right\} \frac{d^m}{dX^m} \exp\{-X^2\}, \quad (5)$$

$$\xi = \sqrt{1 - G^2} = \xi' + i\xi'', \quad (6)$$

$$\alpha_j(z_j) = (-1)^j \left(\frac{L}{z_j} + g - 1 \right) p + \frac{iN}{2} (2t - 1), \quad (7)$$

$$G = g + iN[1 + 2t(1-t)(g-1)], \quad p = 1 + i2Nt(1-t), \quad (8)$$

безразмерные параметры g, N, t , входящие в формулы (7), (8), описывают геометрию резонатора, положение диафрагмы и ее размеры

$$g = 1 - \frac{L}{R \cos \alpha}, \quad t = \frac{l}{L}, \quad N = \frac{L}{ka^2}, \quad (9)$$

k — волновое число, Γ_m в формуле (3) дается следующим равенством:

$$\Gamma_m = (-1)^m \exp\left\{ -i \left(m + \frac{1}{2} \right) \arccos G \right\}. \quad (10)$$

В формуле (6) ξ' и ξ'' вещественны, причем $\xi' \geq 0$ и знак ξ'' совпадает со знаком мнимой части подкоренного выражения. Последнее условие обеспечивает переход формул резонатора с диафрагмой в известные формулы [5, 6] для резонатора без диафрагмы при $N \rightarrow 0$ ($2a \rightarrow \infty$). Параметр g , определенный в (9), является аналогом параметра g для линейных резонаторов [7].

Как видно из формул (3)—(5), поперечное распределение полей содержит экспоненциальную и полиномиальную части относительно x . Реальная часть показателя экспоненты имеет вид

$$\frac{kLx^2}{2z_j^2} \frac{\xi' + N(2t-1) + 2\xi''Nt(1-t)}{\left[\xi' + (-1)^j 2Nt(1-t) \left(g-1 + \frac{L}{z_j} \right) + N(2t-1) \right]^2 + \left[\xi'' - (-1)^j \left(g-1 + \frac{L}{z_j} \right) \right]^2}. \quad (11)$$

Выражения (3), (4) для резонансных полей справедливы при условии, если числитель в формуле (11) больше нуля. Это условие, которое, очевидно, не зависит от z_j , приводит к экспоненциальному спаду поля внутри резонатора в поперечном направлении, что обеспечивает для полей существование каустических поверхностей,² сечения которых плоскостями, параллельными плоскости резонаторного треугольника, имеют вид гипербол. По общепринятой в квазиоптике терминологии [7] такие резонаторы будем называть устойчивыми.

На основании выражения (11) имеем, что размеры световых пятен на плоскостях $z_j = \text{const}$ для данного резонатора с диафрагмой зависят только от положения этих плоскостей. Те плоскости, на которых размеры световых пятен имеют минимальные значения, определяют положения шеек каустик (ШК) резонансных полей. Аналитически эти положения получаются из условия минимума относительно z_j знаменателя в формуле (11). Расчет дает следующие координаты положения ШК:

$$\frac{d_j}{L} = \frac{1 - (-1)^j}{2} + \frac{[\xi'' + (-1)^j(1-g)] - 2Nt(1-t)[\xi' - (-1)^j 2Nt(1-t)(1-g) + N(2t-1)]}{[\xi' + (-1)^j(1-g)]^2 + [\xi'' - (-1)^j 2Nt(1-t)(1-g) + N(2t-1)]^2} \quad (j=0, 1), \quad (12)$$

d_j отсчитывается от цилиндрического зеркала вдоль периметра резонатора по часовой стрелке. Из этого выражения видно, что в резонаторе с диафрагмой, вообще говоря, существуют две ШК: одна для поля, бегущего от первого зеркала к диафрагме, и одна для поля после диафрагмы.³

Очевидно, что с помощью формул (3), (4) определяются поля, выходящие через зеркала резонатора, если эти зеркала обладают пропусканием. На рис. 1 показаны каустические поверхности полей и положения ШК внутри и вне резонатора с диафрагмой.

Положения ШК резонансных полей дают достаточно полную информацию о полях внутри и вне резонатора и позволяют составить наглядную картину об их пространственных распределениях.

Следует различать три возможные ситуации при наблюдении ШК у кольцевого резонатора с диафрагмой: А. ШК находится внутри резонатора. В этом случае ее всегда можно наблюдать вне резонатора либо в поле, выходящем через зеркала резонатора, либо в поле, выведенном с помощью дополнительного полупрозрачного зеркала, поставленного в соответствующее место резонатора под углом к его оси. В. ШК не существует внутри резонатора, однако ее можно наблюдать вне его ($d_0 > l$ или $d_1 > L$). С. ШК не существует внутри резонатора и не наблюдается вне его — ШК «мнимая» ($d_0 < 0$ или $d_1 < l$).

Поскольку резонатор с диафрагмой для поля в одном направлении, вообще говоря, имеет две ШК, то возможны различные варианты, например, для поля $F_{00}(x, z)$ — ситуация (А), а для поля $F_{10}(x, z)$ — ситуация (В) и т. д.

Радиационные потери излучения в резонаторе обусловлены диафрагмой. Они рассчитываются с помощью функции Γ_m , определенной формулой

² Ниже мы ограничимся обсуждением поля нулевой поперечной моды.

³ Напомним, что здесь рассмотрены поля, бегущие по часовой стрелке. Если учитывать поля, бегущие в противоположную сторону, то шеек каустик будет, вообще говоря, четыре.

(10). Потери α_m на один проход для поперечной моды m выражаются следующим образом [4, 7, 8]:

$$\alpha_m = 1 - |\Gamma_m|. \quad (13)$$

Отметим, что потери встречных волн при одинаковых m равны [4].

§ 2. Результаты численных расчетов

В этом параграфе приводятся и анализируются результаты численного расчета положения ШК и радиационные потери резонатора с гауссовой диафрагмой при различных значениях безразмерных параметров g , N , t , определенных соотношениями (9). Параметр N изменяется в широких пределах $0.11 \leq N \leq 20$. В приводимой таблице указаны значения N , для которых рассчитаны положения ШК и потери резонаторов с диафрагмой. Здесь же даны размеры диафрагмы $2a$, которые соответствуют указанным N , если периметр резонатора $L=200$ см и волновое число $k=10^4$ см⁻¹. Нумерация всех кривых на рис. 2—4, 6, 7, 9 отвечает определенному N . Например, кривая 1 соответствует $N=20$, кривая 2 — $N=7.2$ и т. д.

Резонаторы, устойчивые в отсутствие диафрагмы. К таким резонаторам, как известно [5, 6], относятся резонаторы, у которых параметр g изменяется в пределах $-1 < g < 1$. Численные расчеты показывают, что диафрагма, помещенная внутри таких резонаторов, не нарушает их устойчивость.

1. Конфокальный резонатор ($g=0$). На рис. 2 показаны положения ШК этого резонатора с диафрагмой при различных ее положениях t для нескольких значений параметра N . Рис. 2, *a* соответствует полю $F_{00}(x, z)$, рис. 2, *б* — полю $F_{10}(x, z)$. Для обоих случаев наблюдается центральная симметрия графиков относительно точек $d_j/L = t = 1/2$ ($j=0,1$) при любых N .

№ п.п.	N	$2a$, мм
1	20	0.63
2	7.2	1.05
3	2.8	1.69
4	1.8	2.10
5	0.8	3.16
6	0.45	4.21
7	0.11	8.53

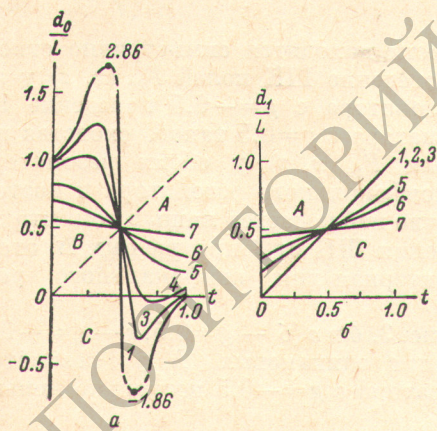


Рис. 2.

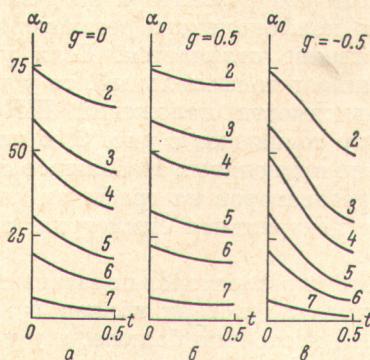


Рис. 3.

Если диафрагма помещена в центр резонатора $t=1/2$, то ШК обоих полей находятся на диафрагме. Буквами *A*, *B*, *C* указаны области, которые отвечают различным ситуациям относительно наблюдения ШК, которые отмечены в конце первого параграфа. Как видно из рис. 2, при движении диафрагмы от цилиндрического зеркала к центру резонатора $t=1/2$ для поля $F_{00}(x, z)$ ШК не существует внутри резонатора, но наблюдается в поле, выведенном из резонатора (ситуация *B*). Однако для поля $F_{10}(x, z)$ ШК находится внутри резонатора (ситуация *A*) при любых N . При дальнейшем движении диафрагмы в поле $F_{00}(x, z)$ возможны

ситуации A и C в зависимости от значений t и N , вместе с тем для поля $F_{10}(x, z)$ существует только ситуация C (ШК «мнимая»). При разных t и малых размерах диафрагмы (N велико) ШК для поля $F_{10}(x, z)$ находится вблизи диафрагмы, в то время как для поля $F_{00}(x, z)$, как правило, вдали от нее. В окрестности точки $t=1/2$ для больших N ШК поля $F_{00}(x, z)$ перемещается на значительные расстояния. При больших размерах диафрагмы (N мало) ШК обоих полей независимо от положения диафрагмы находится вблизи центра резонатора.

На рис. 3, a показаны в процентах потери α_0 , рассчитанные с помощью формул (10), (13) для конфокального резонатора с диафрагмой. Зависимости потерь от t симметричны относительно оси $t=0.5$, поэтому на графиках параметр t изменяется в пределах от 0 до 0.5.

2. Резонаторы с $g=\pm 0.5$. На рис. 4 показаны положения ШК поля $F_{00}(x, z)$ для резонатора с $g=0.5$ (a) и с $g=-0.5$ (b). Интересно отметить,

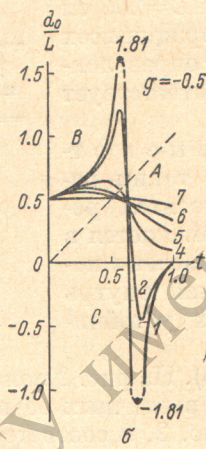
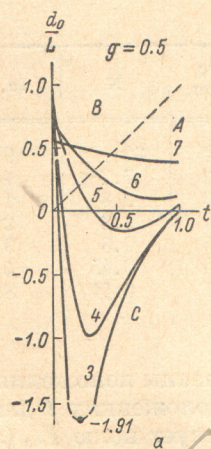


Рис. 4.

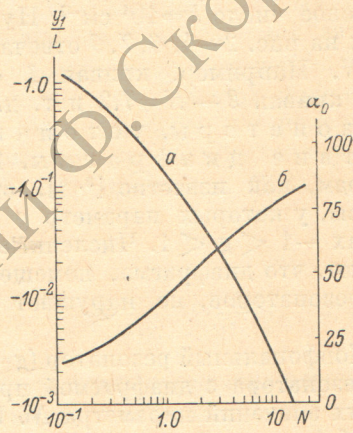


Рис. 5.

что хотя оба резонатора на g -плоскости находятся симметрично относительно конфокального резонатора, поведение ШК полей $F_{00}(x, z)$ у них существенно отличается. Если у резонатора с $g=-0.5$ поведение ШК напоминает конфокальный, то у резонатора с $g=0.5$ такого сходства нет.

Зависимости положений ШК поля $F_{10}(x, z)$ у обоих резонаторов по виду совпадают с рис. 2, b для конфокального резонатора и поэтому здесь не приводятся. Небольшое отличие наблюдается лишь в том, что для этих резонаторов на графиках поведения ШК от t при разных N отсутствует центральная симметрия, характерная для конфокального резонатора.

Потери резонаторов показаны на рис. 3, b и c ($b - g=0.5, c - g=-0.5$). Отметим, что потери вблизи $t=0.5$ при одинаковых N у резонатора с $g=0.5$ несколько больше, а у резонатора с $g=-0.5$ несколько меньше, чем у конфокального.

Резонаторы, неустойчивые в отсутствие диафрагмы. К таким резонаторам относятся резонаторы с параметром $|g| \geq 1$.

3. Резонатор с плоскими зеркалами ($g=1$). При помещении внутрь этого резонатора диафрагмы он становится устойчивым для всех значений t и любых $N > 0$. Резонатор имеет глубокую аналогию с периодической квазиоптической линией, образованной одинаковыми гауссовыми диафрагмами, которые находятся друг от друга на расстоянии L . ШК полей этого резонатора «мнимые». Их положения удобно отсчитывать от диафрагмы. С этой целью введем координату y по правилу

$$y = z - l. \quad (14)$$

После перехода к этой переменной получим на основании формулы (12) для координат ШК выражение

$$\frac{y_j}{L} = \frac{\xi''}{(\xi' - N)^2 + \xi''^2} + \frac{1 - (-1)^j}{2} \quad (j = 0, 1), \quad (15)$$

где ξ' и ξ'' определяются из соотношения

$$\xi = \sqrt{N^2 - 2iN} = \xi' + i\xi'' \quad (16)$$

Как следует из формул (15), (16), положения ШК в координатах y не зависят от t и определяются исключительно числом N . На рис. 5 кри-

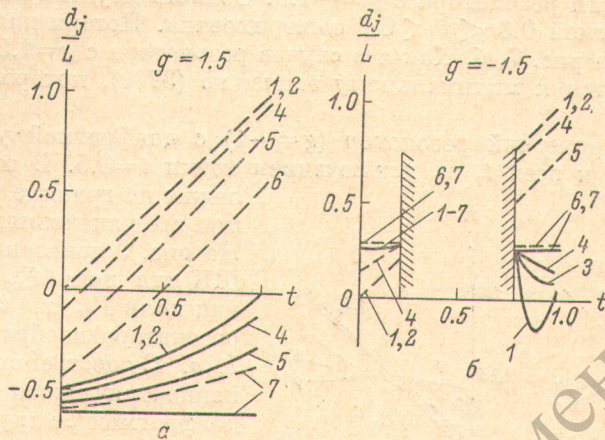


Рис. 6.

вая a , отнесенная к левой вертикальной шкале, показывает зависимость y_1/L для разных N . Из аналогии резонатора с квазиоптической линией нетрудно понять, что потери не зависят от t . Кривая b , отнесенная к правой вертикальной шкале, дает потери резонатора с диафрагмой в зависимости от N . На рис. 5 видно, что с уменьшением N ШК удаляется от диафрагмы в отрицательную сторону, одновременно с этим уменьшаются потери.

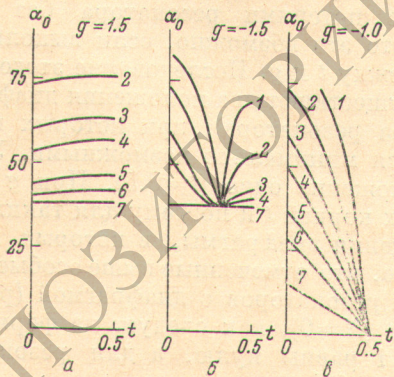


Рис. 7.

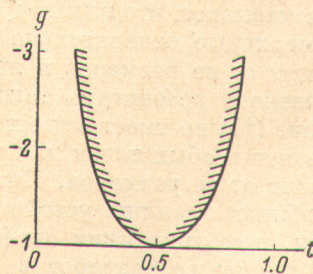


Рис. 8.

4. Резонатор с выпуклым зеркалом ($g > 1$) и диафрагмой ($N > 0$) является устойчивым при всех значениях g и t . В качестве иллюстрации на рис. 6, a приведены сплошными линиями положения ШК резонатора с $g=1.5$ для поля $F_{00}(x, z)$ и штриховыми для поля $F_{10}(x, z)$, ШК обоих полей «мнимые». Потери такого резонатора показаны на рис. 7, a . Отметим, что с увеличением размеров диафрагмы ($N \rightarrow 0$) потери стремятся к определенному минимальному значению (37%), которое не зависит от t .

5. Резонаторы с $g < -1$ и диафрагмой при разных соотношениях между g , N , t могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми.

На рис. 8 показана граница устойчивости резонаторов с диафрагмой. В выбранной нами области изменения $N - 0.11 \leq N \leq 20$ — положение этой границы слабо зависит от N . Приблизительно она описывается уравнением

$$1 + 2t(1-t)(g-1) = 0. \quad (17)$$

Область неустойчивых резонаторов (на рис. 8 заштрихована) для больших N несколько уже, чем для малых. На рис. 6, б в качестве примера показана зависимость положения ШК от t при различных значениях параметра N для резонатора с $g = -1.5$. Область неустойчивости резонатора с диафрагмой $0.3 < t < 0.7$ заштрихована. Потери для этого резонатора даны на рис. 7, б. Как и в случае резонатора с $g = 1.5$ при $N \rightarrow 0$, потери стремятся к минимальному значению (37%), которое не зависит от t .

6. Концентрический резонатор ($g = -1$) с диафрагмой устойчив для любых $N > 0$ и всех t , за исключением точки $t = 0.5$. В этой точке он лежит на границе устойчивости при всех значениях N (рис. 8).

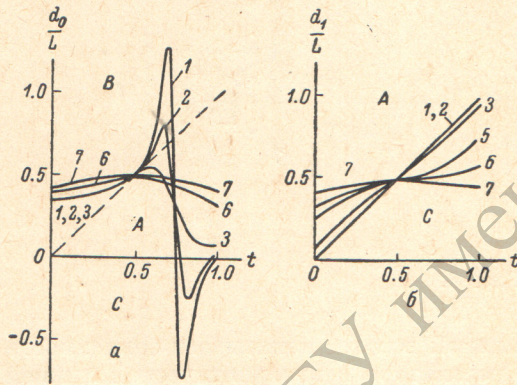


Рис. 9.

На рис. 9 показаны положения ШК для поля $F_{00}(x, z)$ (а) и для поля $F_{10}(x, z)$ (б). Потери резонатора изображены на рис. 7, в. Существенным отличием концентрического резонатора с диафрагмой от других является то, что его потери при любых размерах могут быть сделаны очень малыми, если поместить ее вблизи центра резонатора ($t = 0.5$).

Подчеркнем следующую особенность в поведении потерь резонаторов с $g \leq -1$ и диафрагмой. При некотором положении диафрагмы потери не зависят от ее размеров и совпадают с потерями резонатора без диафрагмы. Из формул (8), (10) видно, что это возможно, если выполняется уравнение (17), которое дает связь между t и g . Исследование этого уравнения показывает, что при $g < -1$ существуют два положения диафрагмы t (симметричные относительно центра резонатора), при которых потери не зависят от ее размеров и являются минимально возможными. У концентрического резонатора такое положение одно ($t = 0.5$). При $g > -1$ уравнение (17) не имеет вещественных корней t и поэтому для таких резонаторов нет особых точек для положения диафрагмы, в которых потери не зависят от ее размеров. Интересно, что отмеченные выше особые точки лежат вблизи границы устойчивости резонаторов с диафрагмой (рис. 8). Наконец, при отсутствии диафрагмы ($N = 0$), как следует из формул (8) и (10), потери резонаторов с $|g| \leq 1$ равны нулю, а для резонаторов с $|g| > 1$ определяются соотношением [9]

$$a_0 = 1 - \exp\{-\operatorname{arcch}(2g^2 - 1)\}, \quad (18)$$

что соответствует для резонаторов с $g = \pm 1.5$ горизонтальным линиям на рис. 7, а и б.

В заключение подчеркнем две важные особенности, которыми обладает резонатор с диафрагмой по сравнению с пустым резонатором. Во-первых, диафрагма снимает «вырождение» по поперечным распределениям полей встречных волн, характерное для пустого резонатора, деформирует их каустические поверхности и влияет на положения ШК, что приводит к различию плотностей полей у встречных волн в данном месте резонатора.

Во-вторых, помещение диафрагмы в неустойчивые резонаторы, в ряде случаев превращает их в устойчивые, однако радиационные потери при этом становятся значительными, несмотря на экспоненциальный спад полей в поперечном направлении.

Литература

- [1] P. K. Cheo, C. V. Heer. Appl. Opt., 3, 788, 1964.
- [2] И. А. Андронов, И. Л. Берштейн. ЖЭТФ, 57, 1, 1969.
- [3] А. Д. Валуев, С. А. Савранский, А. Ф. Савушкин, Б. А. Шоккин. Опт. и спектр., 29, 410, 1970.
- [4] В. Ф. Бойцов. Опт. и спектр., 31, 1971.
- [5] S. A. Collins. Appl. Opt., 3, 1263, 1964.
- [6] В. С. Буддырев, М. М. Попов. Опт. и спектр., 20, 905, 1966.
- [7] Л. А. Вайнштейн. Открытые резонаторы и открытые волноводы. Изд. «Сов. радио», М., 1966.
- [8] A. G. Fox, T. Li. BSTJ, 40, 453, 1961.
- [9] Э. Е. Фрадкин. Опт. и спектр., 20, 316, 1966.

Поступило в Редакцию 31 августа 1971 г.
