

А. В. Островская, В. А. Пронько
(ГрГУ им. Я. Купалы, Гродно)
**АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ
ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С
РАЦИОНАЛЬНЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ**

Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = \frac{(a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3)y + b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3}{cy + d_0x^3 + d_1x^2 + d_2x + d_3}, \\ y' = \frac{(\alpha_0y^3 + \alpha_1y^2 + \alpha_2y + \alpha_3)x + \beta_0y^3 + \beta_1y^2 + \beta_2y + \beta_3}{\gamma x + \delta_0y^3 + \delta_1y^2 + \delta_2y + \delta_3}. \end{cases} \quad (1)$$

Исключая y и y' из системы (1), получим уравнение

$$(\tilde{a}\tilde{d} - \tilde{b}c)x'' = c\tilde{d}'_x x'^3 - (c\tilde{b}'_x + \tilde{a}\tilde{d}'_x - \tilde{d}\tilde{a}'_x)x'^2 - (\tilde{b}\tilde{a}'_x - \tilde{a}\tilde{b}'_x)x' + (cx' - \tilde{a})^2 \frac{\tilde{\alpha}x + \tilde{\beta}}{\gamma x + \tilde{\delta}}, \quad (2)$$

коэффициенты которого определяются коэффициентами системы (1). Согласно Пенлеве анализу дифференциальных уравнений второго порядка с рациональными правыми частями, необходимо, чтобы правая часть уравнения (2) была полиномом по x' не выше второй степени [1]. Рассмотрим случаи $E \neq 0$ и $E = 0$, где $E = \gamma c^3 x - \delta_0 \tilde{d}^3 - \delta_1 \tilde{d}^2 c - \delta_2 \tilde{d} c^2 + \delta_3 c^3$. Для наличия свойства Пенлеве у системы (1) необходимо, чтобы

$$d_0 = 0, \quad d_1 = 0, \quad d_2 = 0, \quad (3)$$

если $E \neq 0$;

$$\delta_0 = 0, \quad \delta_1 = 0, \quad d_2 \delta_2 \neq 0, \quad \delta_2 = \frac{\gamma c}{d_2}, \quad \delta_3 = \frac{\gamma d_3}{d_2}, \quad (4)$$

если $E = 0$. В силу симметрии системы (1) и условий (3), (4) получим соответственно условия

$$\delta_0 = 0, \quad \delta_1 = 0, \quad \delta_2 = 0, \quad (5)$$

$$d_0 = 0, \quad d_1 = 0, \quad d_2 \delta_2 \neq 0, \quad d_2 = \frac{\gamma c}{\delta_2}, \quad d_3 = \frac{c \delta_3}{\delta_2}. \quad (6)$$

Исследуя совместность полученных условий, имеем, что справедлива.

Теорема 1. *Для того чтобы система (1) имела свойство Пенлеве, необходимо, чтобы выполнялись соотношения (3), (5) или (4), (6).*

Литература

1 Айнс, Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э. Л. Айнс. – Харьков : ГНТИУ, 1939. – 719 с.