М. В. Сидорцов, А. А. Драпеза
(ГГУ им. Ф. Скорины, Гомель)

АППРОКСИМАЦИИ ЭРМИТА–ПАДЕ ВЫРОЖДЕННЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим набор вырожденных гипергеометрических функций

$$F_\gamma^j(z)={}_1F_1(1,\gamma;\lambda_j z)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\lambda_j^p}{(\gamma)_p}z^p,\quad j=1,2,\ldots,k$$

где γ – произвольное комплексное число, принадлежащее множеству $C\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$, $(\gamma)_0=1,(\gamma)_p=\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+p-1)$ – символ Похгаммера, а $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – различные комплексные числа не равные нулю.

При γ = 1 данный набор представляет собой систему экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$ [1].

В данной работе устанавливаются асимптотики равномерной сходимости диагональных аппроксимаций $\pi_{kn,kn}^j(\cdot,F_\gamma^j)$ к функции F_γ^j при $n\to\infty$ в том случае, когда числа $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ равномерно распределены на единичной окружности, т.е. являются корнями уравнения $\lambda^k=1$ [2].

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *При* $n\to\infty$ *равномерно на любом компакте из C, тогда при* $k=1$ $P_n(z;F_\gamma)\to F_\gamma(z)e^{-\frac{z}{2}}$, *а при* $k\ge 2$ $P_{kn}^j(z;F_\gamma^j)\to F_\gamma^j(z)$.

Теорема 2. *При любом фиксированном* z *и* $n\to\infty$

$$R_{n,kn}^j(z;F_\gamma^j)=(-1)^n x_1^{\gamma-1}\lambda_j^{n+1}B_n\frac{z^{kn+n+1}}{(\gamma)_{kn+n}}e^{\lambda_j(1-x_1)z}\left(1+O(1/n)\right),\ j=1,2,\ldots,k$$

$$\text{где } B_n=\sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_1)}}e^{nS(x_1)}=\sqrt{-\frac{2\pi}{n\sqrt[k]{(k+1)^{k+2}}}}\left(\frac{k}{\sqrt[k]{(k+1)^{k+1}}}\right)^n$$

Теорема 3. *При любом фиксированном* z *и* $n\to\infty$

$$F_\gamma^j(z)-\pi_{kn,kn}^j(z;F_\gamma^j)=(-1)^n x_1^{\gamma-1}\lambda_j^{n+1}B_n\frac{z^{kn+n+1}}{(\gamma)_{kn+n}}e^{\lambda_j(1-x_1)z}e^{\frac{\sum_{i=1}^k\lambda_i}{k+1}}\left(1+O(1/n)\right),\ j=1,2,\ldots,k$$

Литература

1 Никишин, Е. М. Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е. М. Никишин, В. Н. Сорокин. – М.: Наука, 1988.

2 Старовойтов, А. П. Асимптотика квадратичных аппроксимаций Эрмита-Паде экспоненциальных функций / А. П. Старовойтов // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 1(18).