Курс: Статистические Методы Обработки Данных

Лекция 5. Сравнение гистограмм. Операции с гистограммами.

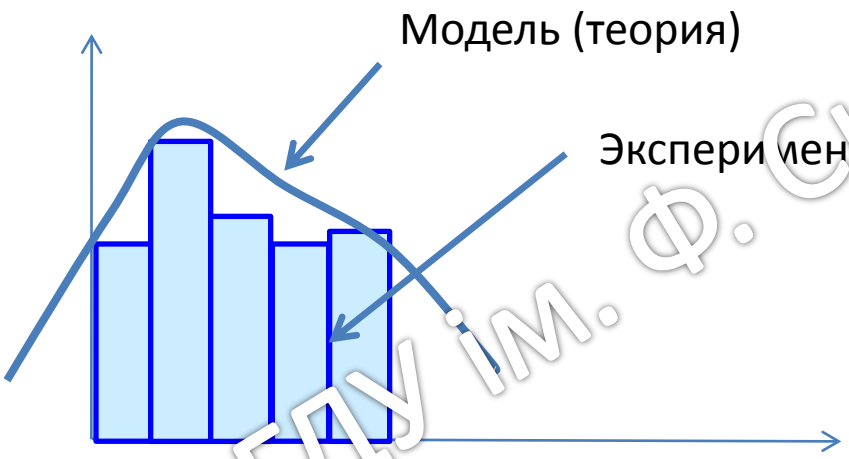
Специальность: 1-53 01 02 – Автоматизированные системы обработки информации

УО «ГГУ им. Ф. Скорины»

Преподаватель: Бабич К.С, ст. преподаватель, 2016

9. Сравнение гистограмм. Операции с гистограммами.

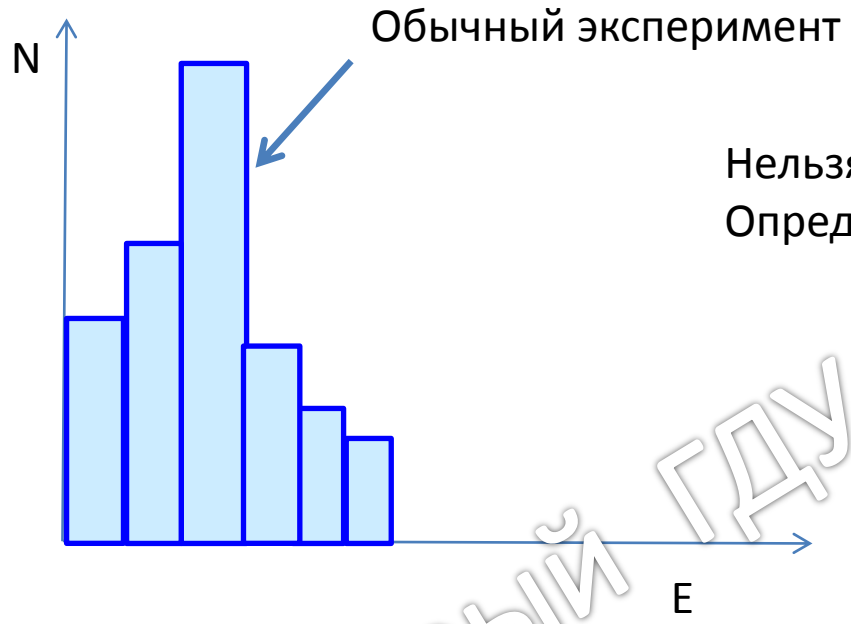
Имея выборку x1, x2, … , xN мы стоим гистограмму - S(i), (где i=1..N)



Но объем 500-2500 для экспериментаторов практически редко достижим.

9. Сравнение гистограмм. Операции с гистограммами.

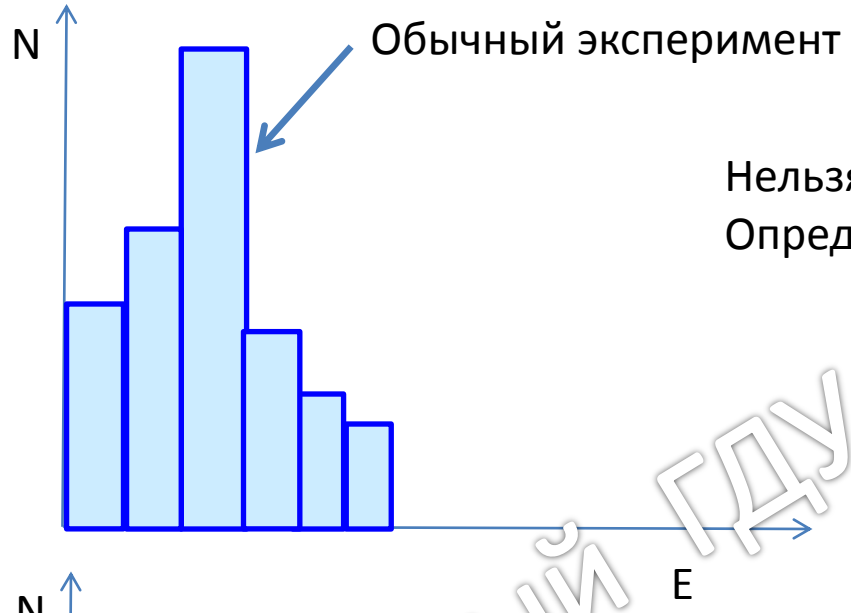
Но в физике кроме обычного эксперимента S(i) проводят также Калибровочный эксперимент Sк(i) .



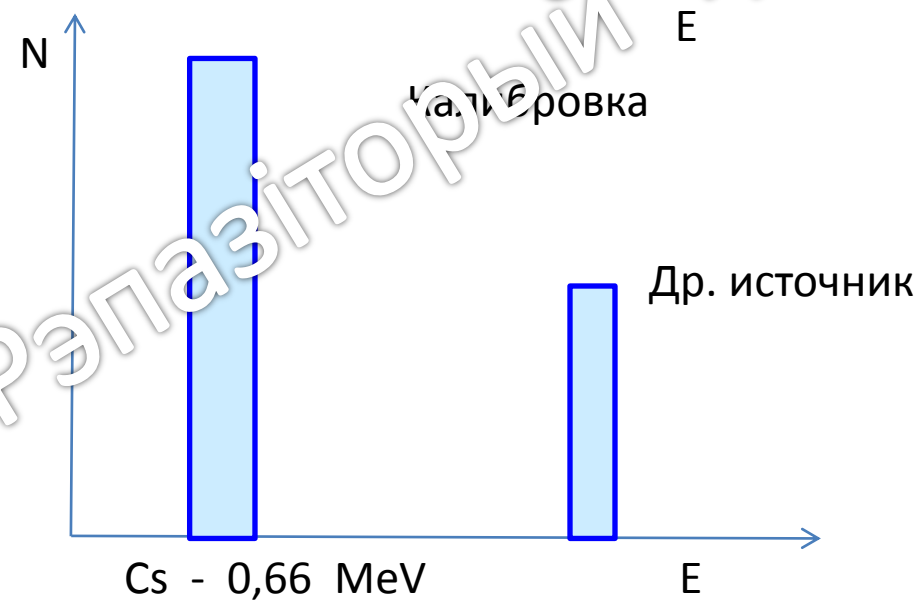
Нельзя точно сказать сколько частиц имеют Определенную энергию.

9. Сравнение гистограмм. Операции с гистограммами.

Но в физике кроме обычного эксперимента S(i) проводят также Калибровочный эксперимент Sк(i) .

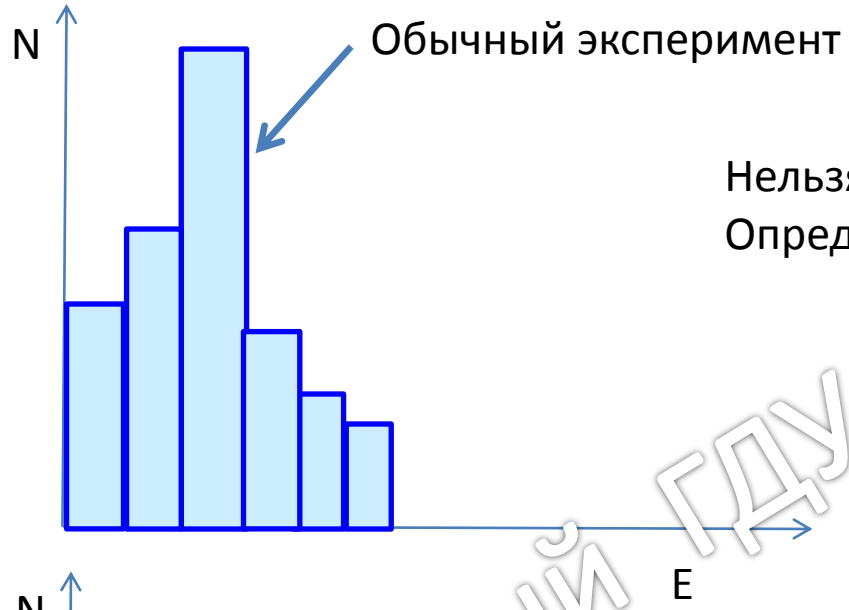


Нельзя точно сказать сколько частиц имеют Определенную энергию.

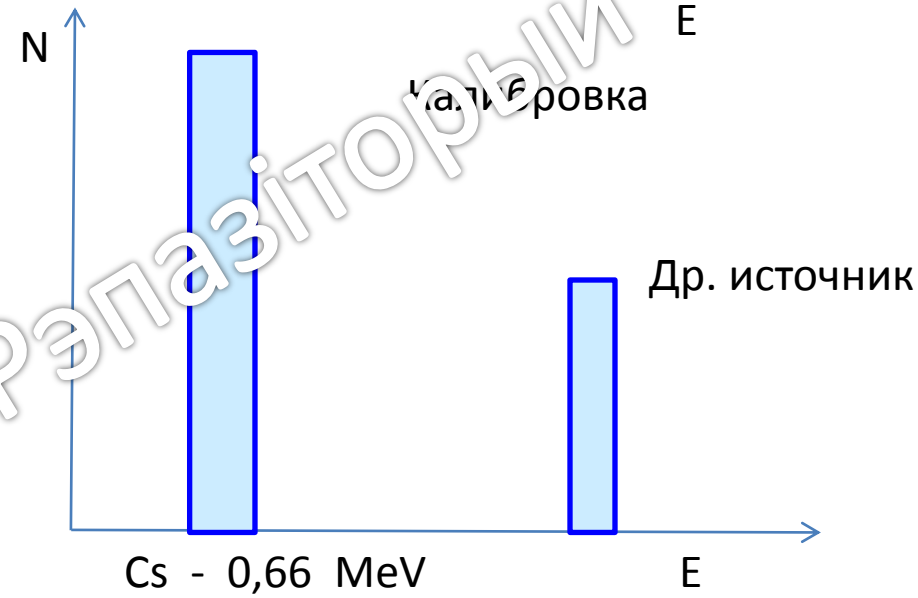


9. Сравнение гистограмм. Операции с гистограммами.

Но в физике кроме обычного эксперимента S(i) проводят также Калибровочный эксперимент Sк(i) .



Нельзя точно сказать сколько частиц имеют Определенную энергию.



1) Калибровка
2) Точки сравнения
3) Сравнение точек с гистограммами с неизвестной энергией

9. Сравнение гистограмм. Операции с гистограммами.

Калибровочный эксперимент - тоже гистограмма, которую также следует обрабатывать.

В реальности имеется:

1) Эксперимент S (i)
2) Калибровка Sк (i)

1? Зачем делать шаги 1-2-3? Как делать на прямую сравнение гистограмм?

Итак имеем гистограммы:

S1(i) - калибровочная гистограмма;

S2(i) - экспериментальная гистограмма;

i = 1 … n.

Имеются также оценки параметров гистограмм : $p_{1j} \quad p_{2j} \quad j = 1 \ldots k$

Сравнение м.б. Проведено 2-мя способами:

9. Сравнение гистограмм. Операции с гистограммами.

Сравнение м.б. Проведено 2-мя способами:

$$\chi_1^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(S_1(i) - S_2(i)\right)^2}{D_1(i)} \qquad (9.1)$$

$D_1(i)$ - дисперсия $S_1(i) - S_2(i)$

$$\chi_2^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(p_{1j} - p_{2j}\right)^2}{D_2(j)} \qquad (9.2)$$

$D_2(j)$ - дисперсия $p_{1j} - p_{2j}$

9. Сравнение гистограмм. Операции с гистограммами.

$$\chi_1^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(S_1(i) - S_2(i)\right)^2}{D_1(i)} \qquad (9.1)$$

$$\chi_1^2 \Rightarrow \chi^2 \quad c\ n\ \ ст.свободы$$

$$\left(\chi_1^2 \le \chi_{n,p}^2\right)$$

p – доверительная вероятность совпадения гистограмм

$$\chi_2^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(p_{1j} - p_{2j}\right)^2}{D_2(j)} \qquad (9.2)$$

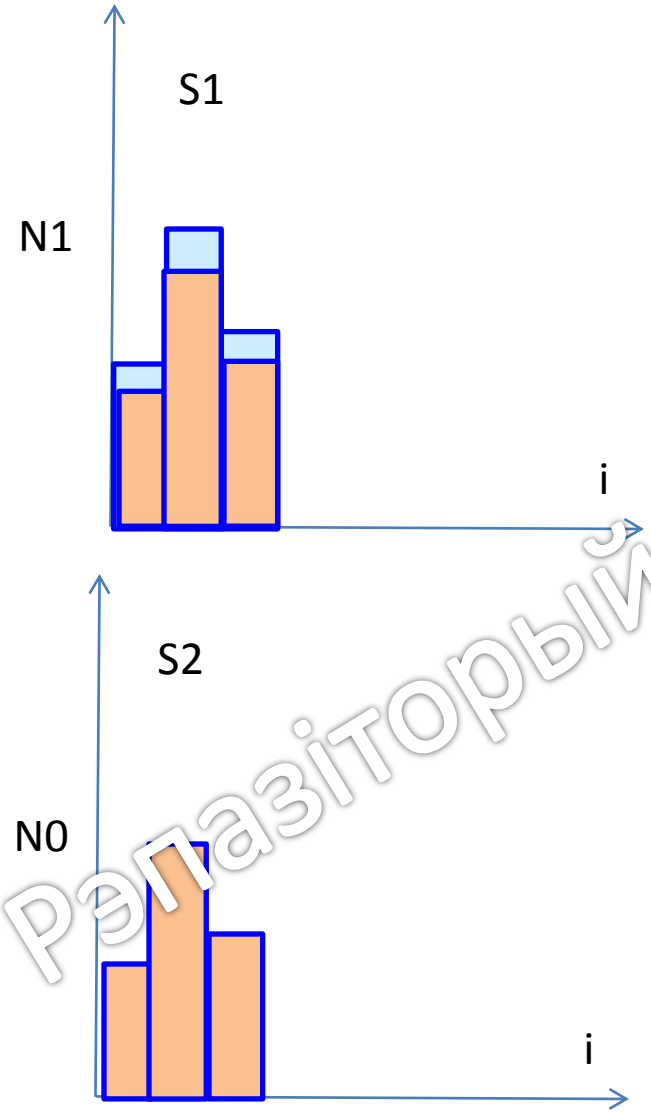
$$\chi_2^2 \Rightarrow \chi^2 \quad c\ k\ \ ст.свободы$$

$$\left(\chi_2^2 \le \chi_{k,p}^2\right)$$

Этот критерий можно использовать для участков спектров.

9. Сравнение гистограмм. Операции с гистограммами.

Рассмотрим, что получается в реальности?



Пример: радиоактивный источник.
Есть активность, т.е. Испускаются частицы в ед. времени

Имеем N0 – фиксированное число отсчетов.

Беря другой источник мы найдем N1

N1 и N0 совпадут!

Но если мы, к примеру, знаем, что это Cs,
а не совпадают из-за того, что кол-во Cs
Различно, то можем ввести множитель.

$$k S_1 = S_2$$

9. Сравнение гистограмм. Операции с гистограммами.

В реальности не всегда нужно «в лоб» сравнивать гистограммы, даже если они для одной и той же физической величины.

1) Одна гистограмма м.б. сдвинута относительно другой (появление фона);
2) М.б. пропорциональность (различная интенсивность одного и того же излучения;
3) Уширение сигнала (по той же причине, что и п.2

Что делать в этой ситуации?

9. Сравнение гистограмм. Операции с гистограммами.

Что делать в этой ситуации?

Запишем $S_2(i)$ в виде

$$S_2(i) = AS_1\left(\frac{i-p}{w}\right) \qquad (9.3)$$

а если уширение в каждом столбце различно, то в виде

$$S_2(i) = AS_1\left(\frac{i-p}{ci+w}\right) \qquad (9.4)$$

где p – сдвиг (S_2 относительно S_1)
A – пропорциональность,
w – уширение,
ci+w - коэф. уширения в каждом столбике

9. Сравнение гистограмм. Операции с гистограммами.

Тогда составим

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(S_2(i) - AS_1\left(\frac{i-p}{w} \right) \right)^2}{D_1(i)} \qquad (9.5)$$

χ^2 - с (n-k) ст. свободы, k – число параметров.

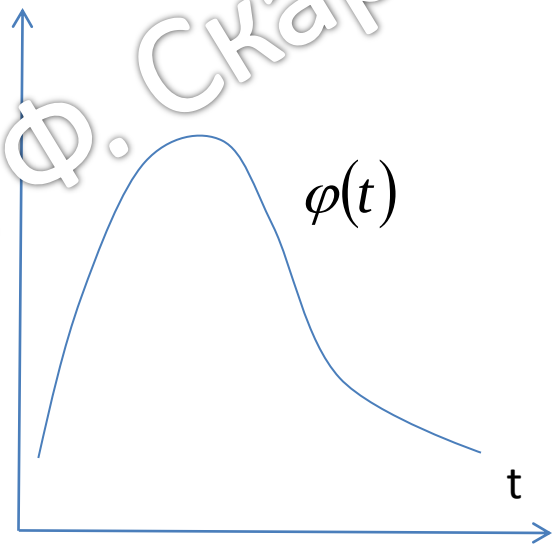
Коэффициенты A, p, w, c находят методом наименьших квадратов, который (рассмотрим позже).

10. Преобразование Фурье.

Рассмотрим дискретное преобразование Фурье.

t – «временная» компонента
ω – «частотная» компонента

Измерения дают нам $\varphi(t)$



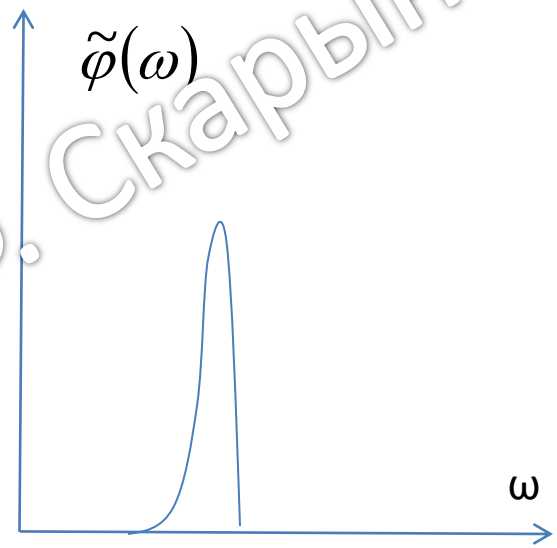
$$\varphi(t) \to N_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\varphi(t)dt \to \tilde{\varphi}(\omega)$$

Прямое преобразование Фурье.

10. Преобразование Фурье.

Обратное преобразование Фурье.

$$N_2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{+i\omega t} \tilde{\varphi}(\omega) d\omega \to \varphi(t)$$



10. Преобразование Фурье.

Дискретное преобразование Фурье

Пусть M – число точек гистограммы h(i), тогда дискретное преобразование Фурье для нее равно:

$$g(k) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} h(i)\left[\exp\left(-2\pi(i-1)j\frac{k}{M}\right)\right]$$

k=0,..M-1 *j^2=-1*

Обратное преобразование Фурье выглядит следующим образом:

$$h(i) = \sum_{k=1}^{M-1} g(k)\exp\left(j\,2\pi\frac{k}{M}i\right)$$

i=1..M

Как и в непрерывном случае преобразование Фурье показывает из каких частот «построена» гистограмма h(i).

10. Преобразование Фурье.

Как и в непрерывном случае преобразование Фурье показывает из таких частот «построена» гистограмма h(i).

Число частот для гистограмм ограничено (в силу периодичности *exp (jn)* и оно тем меньше, чем меньше число каналов (интервалов), представляющих спектр, т.е. чем шире ячейка гистограммы.

10. Преобразование Фурье.

Другой аспект использования преобразования Фурье – поиск периодичностей в гистограмме *h(i)*.

Если *h(i)* есть положение периодических функций с периодами T_l, $l=1..N$, то *g(k)* будет иметь *L* пиков в точках, соответствующих частотам периодических функций.

Численное осуществление прямого преобразования Фурье и обратного преобразования Фурье проводится с помощью алгоритмов быстрого преобразования Фурье.

10. Преобразование Фурье.

Рассмотрим идею быстрого преобразования Фурье.

Стандартное преобразование Фурье можно записать в виде

$$g(k) = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{h(i)}{M} W(k_i) \qquad k = 0..M-1 \qquad i = 1..M$$

$$W(k_i) = \exp\left[-j2\pi \frac{k}{M} i\right]$$

Для расчета этого вида необходимо M^2 операций умножения и сложения комплексных чисел (одна операция (комплексная) эквивалентна четырем операциям сложения и умножения действительных чисел).

M^2 - долго и дорого. Что делать?

Решение: быстрое преобразование Фурье *(СУРС)*