Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №4(67), 2011

Математика

УДК 517.544.76

Об интегральном представлении одного класса аналитических функций

А. А. Атвиновский

Рассмотрен класс функций, тесно связанный с классом М. Г. Крейна, и дано интегральное представление функций этого класса.
Ключевые слова: аналитическая функция, класс Неванлинны, класс М. Г. Крейна, интегральное представление.

The class of functions closely related to M. G. Krein class is considered and the integral representation of functions of this class is given.
Keywords: analytic function, Nevanlinna class, M. G. Krein class, integral representation.

Класс функций $R(a;b)$ был введен М. Г. Крейном в связи со степенной проблемой моментов на конечном интервале [1, глава IV, § 7]. В данной статье будет рассмотрен класс функций, тесно связанный с классом М. Г. Крейна, и дано интегральное представление функций этого класса.

Далее нам понадобится интегральное представление функций класса Неванлинны R.

Определение 1. Говорят, что функция $F(z)$ принадлежит классу R, если она голоморфна в верхней полуплоскости, и $\operatorname{Im}(F(z)) \geq 0$ при $\operatorname{Im}(z) > 0$.

Функции этого класса допускают следующее интегральное представление.

Теорема 1 (Р. Неванлинна). *Для того, чтобы функция $F(z)$ принадлежала классу R, необходимо и достаточно, чтобы она имела вид*

$$F(z) = \alpha_1 + \beta_1 z + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1+t^2} \right) d\sigma(t), \tag{1}$$

где α_1 – вещественное число, $\beta_1 \geq 0$, а $\sigma(t)$ – неубывающая функция, для которой сходится интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} (1+t^2)^{-1} d\sigma(t)$.

Отметим, что в силу принципа максимума для гармонических функций $\operatorname{Im}(F(z)) > 0$ при $\operatorname{Im}(z) > 0$, если F не есть вещественная постоянная.

Определение 2 [1]. Пусть $a<b$. Функцию $g(z)$ отнесем к классу $R(a;b)$, если она принадлежит классу R и голоморфна и положительна на $(-\infty;a)$ и голоморфна и отрицательна на $(b;+\infty)$.

Лемма 1. *Функция $g(z)$ из $R(a;b)$ нигде не обращается в нуль, причем $\operatorname{Im}(g(z)) > 0$ при $\operatorname{Im}(z) > 0$ и $\operatorname{Im}(g(z)) < 0$ при $\operatorname{Im}(z) < 0$*

Доказательство. Известно [1, с. 525 – 526], что функцию $g(z)$ можно представить в виде

$$g(z) = \int_a^b \frac{d\sigma(t)}{t-z}, \tag{2}$$

где $\sigma(t)$ – ограниченная неубывающая функция, отличная от постоянной.

Поскольку

$$\frac{1}{t-z}=\frac{t-x}{|t-\overline{z}|^2}+\frac{iy}{|t-\overline{z}|^2},$$

то

$$\mathrm{Im}(g(z))=y\int_a^b\frac{d\sigma(t)}{|t-z|^2}.$$

Так как соответствующая функции $\sigma(t)$ мера $\sigma\neq 0$, то отсюда следует, что $g(z)$=0 только при y=0, т. е. $g(z)$ может обращаться в нуль лишь на действительной оси. Но $g(x)=\int_a^b\frac{d\sigma(t)}{t-x}\neq 0$ при $x\in(-\infty;a)\cup(b;+\infty)$, поскольку подынтегральная функция непрерывна и сохраняет знак на каждом из этих промежутков. Второе утверждение леммы сразу следует из формулы для Im($g(z)$), полученной выше.

Определение 3. Пусть $a<b$. Введем класс функций $Q(a,b)$ следующим образом:

$$Q(a,b):=\left\{\phi(z)\mid\phi(z)=\frac{1}{g(z)},g(z)\in R(a,b)\right\}.$$

Лемма 2. *Функция $\phi(z)$ принадлежит классу $Q(a,b)$, если и только если она голоморфна в верхней полуплоскости, переводит верхнюю полуплоскость в нижнюю, а также голоморфна и положительна на интервале $(-\infty;a)$ и голоморфна и отрицательна на интервале $(b;+\infty)$.*

Доказательство леммы осуществляется непосредственной проверкой.

Из леммы 2, в частности, следует, что класс $Q(a,b)$ устойчив относительно сложения и умножения на положительные числа, то есть является конусом.

Еще одно следствие леммы 2 состоит в том, что если функция $\phi(z)$ принадлежит классу $Q(0,b)$, то $-\phi(z)$ является отрицательной операторно-монотонной (относительно последнего класса функций см., например, [2]), а потому принадлежит классу неположительных функций Бернштейна (см., например, [3]).

Следующая теорема дает интегральное представление функций класса $Q(a,b)$.

Теорема 2. *Для того, чтобы функция $\phi(z)$ принадлежала классу $Q(a,b)$, необходимо и достаточно, чтобы её можно было представить в виде*

$$\phi(z)=\alpha+\beta z-\int_a^b\frac{d\sigma(t)}{t-z},\tag{3}$$

где функция $\sigma(t)$ не убывает и ограничена, интегралы $\int_a^b(t-a)^{-1}d\sigma(t)$ и $\int_a^b(t-b)^{-1}d\sigma(t)$ сходятся, а числа α и β удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{cases}\alpha+\beta a-\int_a^b(t-a)^{-1}d\sigma(t)\geq 0\\ \alpha+\beta b-\int_a^b(t-b)^{-1}d\sigma(t)\leq 0\\ \beta<0\end{cases}.\tag{4}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\phi(z)\in Q(a,b)$. Тогда, как легко проверить, функция $-\phi(z)$ принадлежит R, а потому (теорема 1):

$$-\phi(z)=\alpha_1+\beta_1 z+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{t}{1+t^2}\right)d\sigma(t), \tag{5}$$

где $\sigma(t)$ – неубывающая функция, α_1 – вещественное число, а $\beta_1\geq 0$. Воспользуемся формулой обращения Стилтьеса-Перрона, которая в случае функции $-\phi(z)$ при подходящей нормировке интегрирующей функции имеет вид (см., например, [4, с. 157])

$$\sigma(t_2)-\sigma(t_1)=-\frac{1}{\pi}\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^b \mathrm{Im}(\phi(x+i\varepsilon))dx .$$

Ввиду голоморфности и вещественности функции $\phi(z)$ при $z=x<a$ и $z=x>b$ правая часть здесь равна нулю, т. е. функция $\sigma(t)$ постоянна при $t<a$ и $t>b$ и, в частности, ограничена. Поэтому из (5) следует, что

$$-\phi(z)=\alpha'+\beta_1 z+\int\limits_a^b\frac{d\sigma(t)}{t-z},$$

то есть

$$\phi(z)=\alpha+\beta z-\int\limits_a^b\frac{d\sigma(t)}{t-z},$$

где α – вещественное число, а $\beta=-\beta_1<0$, поскольку $\phi(\infty)=\infty$ в силу определения 3 и формулы (2). Воспользуемся теперь тем, что функция $\phi(x)$ положительна на интервале $(-\infty,;a)$ и отрицательна на интервале $(b;+\infty)$. Поскольку функции $\alpha+\beta x$ и $x\mapsto -1/(t-x)=1/(x-t)$ (при $t\in[a,b]$) строго убывают на каждом из этих интервалов, то этим свойством обладает и функция $\phi(x)$. Поэтому она положительна на интервале $(-\infty;a)$ тогда и только тогда, когда $\phi(a-0)\geq 0$. В силу теоремы Б. Леви это равносильно тому, что $\alpha+\beta a-h(a)\geq 0$, где

$$h(z)=\int\limits_a^b\frac{d\sigma(t)}{t-z}, \tag{6}$$

причем $h(a)$ существует. Аналогично функция $\phi(x)$ отрицательна на интервале $(b;+\infty)$ тогда и только тогда, когда $\phi(b+0)\leq 0$, т. е. $\alpha+\beta b-h(b)\leq 0$, причем $h(b)$ существует. Таким образом, коэффициенты α и β удовлетворяют условиям (4).

Достаточность. Пусть $\phi(z)$ имеет интегральное представление (3), где коэффициенты α и β удовлетворяют условиям (4). Выпишем мнимую часть функции ϕ (z):

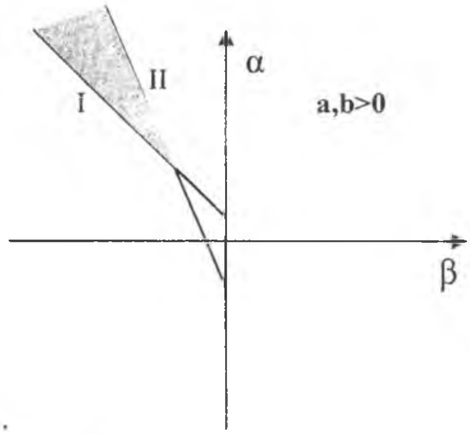
$$\mathrm{Im}(\phi(z))=y\left(\beta-\int\limits_a^b\frac{d\sigma(t)}{|t-z|^2}\right).$$

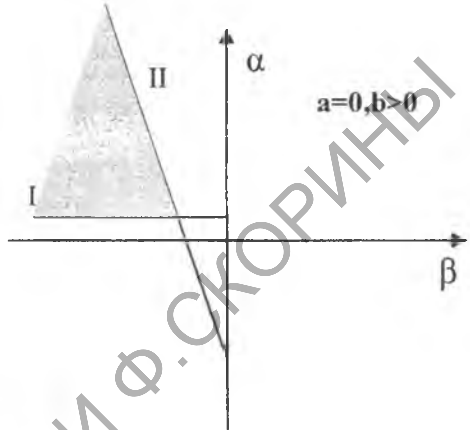
Из этого выражения видно, что функция $\phi(z)$ переводит верхнюю полуплоскость в нижнюю. Кроме того, в силу (3) она голоморфна в верхней полуплоскости, а также голоморфна и положительна на промежутке $(-\infty;a)$ и голоморфна и отрицательна на промежутке $(b;+\infty)$, так как строго убывает, и $\phi(a-0)\geq 0$, а $\phi(b+0)\leq 0$ в силу (4). Следовательно, $\phi(z)$ принадлежит $Q(a,b)$, что и требовалось доказать.

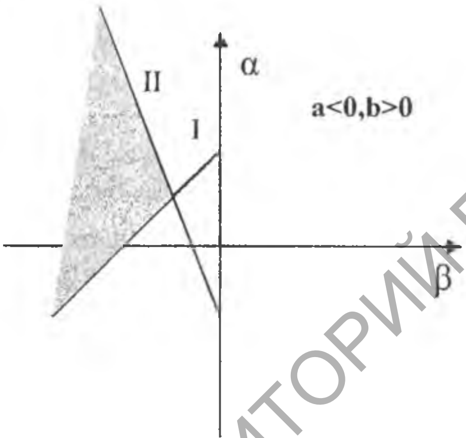
Замечание. Из (3) вытекает, что

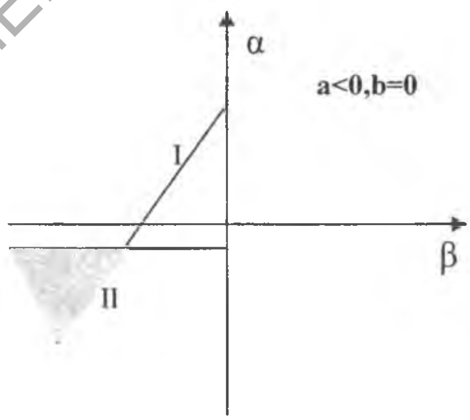
$$\beta = \phi'(\infty) = \lim_{x\to\infty}\frac{\phi(x)}{x}, \quad \alpha = \lim_{x\to\infty}(\phi(x) - \beta x).$$

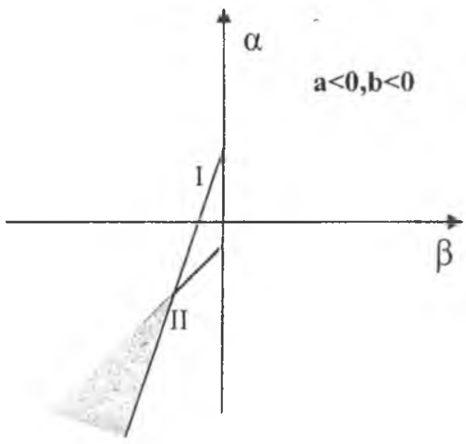
На следующих рисунках указана область изменения коэффициентов α и β в зависимости от знаков a и b (цифрами I и II на них обозначены прямые, заданные соответственно уравнениями $\alpha + \beta a - h(a) = 0$ и $\alpha + \beta b - h(b) = 0$, причем $h(a) \geq 0, h(b) \leq 0$). В частности, из них видно, что эта область всегда не пуста.











Следствие. *Если функция $\phi(z)$ принадлежала классу $Q(a,b)$, то она голоморфна на дополнении к отрезку $[a,b]$ и переводит нижнюю полуплоскость в верхнюю.*

Примеры. Следующие функции принадлежат классу $Q(a,b)$:

1) линейные функции $\phi(z)=\alpha+\beta z$, где $-\beta a \le \alpha \le -\beta b$, $\beta<0$;

2) $\phi(z)=\dfrac{1}{\ln(z-d)/(z-c)}$, где $a \le c < d \le b$, а ветвь логарифма в плоскости с разрезом по отрицательной части действительной оси выделена условием $\ln 1 = 0$ (мы выбрали в представлении (2) в качестве σ меру, сосредоточенную на отрезке $[c,d]$ и совпадающую на нем с мерой Лебега);

3) $\phi(z)=\alpha+\beta z-\ln(z-d)/(z-c)$, где $a<c<d<b$, ветвь логарифма в плоскости с разрезом по отрицательной части действительной оси выделена условием $\ln 1 = 0$, а

$$\begin{cases} \alpha+\beta a \ge \ln\dfrac{d-a}{c-a} \\ \alpha+\beta b \le \ln\dfrac{d-b}{c-b} \\ \beta<0 \end{cases}$$

(мы выбрали в представлении (3) ту же меру σ, что и в примере 2);

4) $\phi(z)=\alpha+\beta z-(d-c)-z\ln(z-d)/(z-c)$, где $0 \le a<c<d<b$, ветвь логарифма в плоскости с разрезом по отрицательной части действительной оси выделена условием $\ln 1 = 0$, а

$$\begin{cases} \alpha+\beta a \ge d-c+a\ln\dfrac{d-a}{c-a} \\ \alpha+\beta b \le d-c+b\ln\dfrac{d-b}{c-b} \\ \beta<0 \end{cases}$$

(мы взяли в представлении (3) непрерывную функцию $\sigma(t)$, совпадающую с $(1/2)t^2$ на $[c,d]$ и постоянную на $[a,c]\cup[d,b]$).

Благодарю профессора А. Р. Миротина, под руководством которого была выполнена эта работа.

Литература

1. Крейн, М. Г. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи / М. Г. Крейн, А. А. Нудельман. – М.: Наука, 1973. – 552 с.

2. Миротин, А. Р. Обращение операторно-монотонных функций негативных операторов в банаховом пространстве / А. Р. Миротин. // Труды института математики. Минск. – 2004. – Том. 12, № 1. – С. 104 – 108.

3. Миротин, А. Р. Многомерное T-исчисление генераторов C_0-полугрупп / А. Р. Миротин // Алгебра и анализ. – 1999. – Т. 11, № 2. – С. 142–170.

4. Ахиезер, Н. И. Классическая проблема моментов и некоторые задачи анализа, связанные с нею / Н. И. Ахиезер – М.: Физматгиз, 1961. – 310 с.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 18.01.11