Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №4(67), 2011

УДК 512.542

Конечные группы с m-добавляемыми максимальными подгруппами силовских подгрупп

В. А. Васильев

В работе используются обобщенные модулярные подгруппы конечных групп для получения критерия принадлежности группы композиционной (разрешимо насыщенной) формации.

Ключевые слова: конечная группа, модулярная подгруппа.

The article uses the generalized modular subgroups of finite groups to obtain the criterion of membership of a composition (soluble saturated) formation group.

Keywords: finite group, modular subgroup.

1 Введение

Все рассматриваемые в данной работе группы конечны. Напомним, что подгруппа M группы G называется модулярной подгруппой в G, если выполняются следующие условия:

(1) $\langle X, M \cap Z\rangle = \langle X, M\rangle \cap Z$ для всех $X \leq G, Z \leq G$ таких, что $X \leq Z$;

(2) $\langle M, Y \cap Z\rangle = \langle M, Y\rangle \cap Z$ для всех $Y \leq G, Z \leq G$ таких, что $M \leq Z$.

Отметим, что модулярная подгруппа является модулярным элементом (в смысле Куроша, [1, гл. 2, стр. 43]) решетки всех подгрупп группы. Понятие модулярной подгруппы впервые анализировалось в работе Р. Шмидта [2] и оказалось полезным в вопросах классификации составных групп. В частности, в монографии Р. Шмидта [1, гл. 5] модулярные подгруппы были использованы для получения новых характеризаций различных классов групп. Подгруппа, порожденная двумя модулярными подгруппами, сама является модулярной подгруппой (см. гл. 5, раздел 5.1 в [1]). Таким образом, каждая подгруппа H группы G обладает наибольшей содержащейся в ней модулярной подгруппой H_{mG} группы G. Назовем подгруппу H_{mG} модулярным ядром подгруппы H. Базируясь на понятии модулярного ядра, введем следующее обобщение понятия модулярной подгруппы.

Определение 1.1. *Подгруппу H группы G назовем m-добавляемой в G, если в G существует такая подгруппа K, что $G = HK$ и $H \cap K \leq H_{mG}$.*

Легко видеть, что всякая модулярная подгруппа является m-добавляемой и, в то же время, существуют группы, в которых класс m-добавляемых подгрупп шире, чем класс всех её модулярных подгрупп.

Подгруппа A группы G называется квазинормальной (Оре [3]) или перестановочной (Стоунхьюер [4]) в G, если $AB = BA$ для всех $B \leq G$. Квазинормальные подгруппы обладают многими интересными свойствами, в частности, если A — квазинормальная подгруппа группы G, то $A^G/A_G \leq Z_\infty(G/A_G)$ [5], т.е. каждый главный фактор группы G/A_G ниже A^G/A_G является центральным.

Согласно [1, гл. 5, теорема 5.1.1], подгруппа A является квазинормальной в группе G тогда и только тогда, когда A субнормальна в G и является модулярной подгруппой в G. Оказалось, что если подгруппа A модулярна в G, то каждый главный фактор группы G/A_G ниже A^G/A_G является циклическим [1, гл. 5, теорема 5.2.5].

Дополняя эти результаты, в данной работе докажем следующую теорему.

Теорема 1.2. *Пусть E — нормальная подгруппа группы G. Если максимальные подгруппы каждой силовской подгруппы из E являются m-добавляемыми в G, то каждый главный фактор группы G ниже E является циклическим.*

Доказательство этой теоремы приведено в разделе 3. В разделе 4 данной работы рассматриваются приложения этой теоремы. Используемая в статье терминология стандартна, при необходимости можно обратиться к монографиям [6–8].

2 Некоторые предварительные результаты

Следующие известные свойства модулярных подгрупп будут использованы в данной работе.

Лемма 2.1 [1, гл. 5, раздел 5.1]. *Пусть G — группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(a) *если M_1 и M_2 являются модулярными в G подгруппами, то $\langle M_1, M_2\rangle$ — модулярная в G подгруппа;*

(b) *если N — нормальная в G подгруппа, то N является модулярной в G подгруппой;*

(c) *если N — нормальная в G подгруппа и M — модулярная в G подгруппа, то MN/N — модулярная в G/N подгруппа;*

(d) *если $N \le M \le G$, N нормальна в G и M/N модулярна в G/N, то M модулярна в G;*

(e) *если $M \le M_1 \le G$ и M модулярна в G, то M модулярна в M_1;*

(f) *если φ — изоморфизм группы G на группу $\bar{G}$ и M модулярна в G, то M^{φ} модулярна в $\bar{G}$.*

Следующая наша лемма показывает, что модулярное ядро обладает свойствами, аналогичными свойствам нормального ядра подгруппы.

Лемма 2.2. *Пусть G — группа и $H \le K \le G$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *H_{mG} — модулярная в G подгруппа и $H_G \le H_{mG}$;*

(2) *$H_{mG} \le H_{mK}$;*

(3) *если H нормальна в G, то $(K/H)_{m(G/H)} = K_{mG}/H$;*

(4) *H_{mG} — нормальная в H подгруппа.*

Доказательство. (1) Это утверждение вытекает из леммы 2.1(a).

(2) Применяя лемму 2.1(e), мы видим, что множество всех модулярных в G подгрупп из H содержится во множестве всех модулярных в K подгрупп из H. Значит, $H_{mG} \le H_{mK}$.

(3) Пусть $M_1/H, M_2/H, ..., M_n/H$ — набор всех тех модулярных в G/H подгрупп, которые содержатся в K/H. Тогда $(K/H)_{m(G/H)} = \langle M_1/H, M_2/H, ..., M_n/H\rangle = \langle M_1, M_2, ..., M_n\rangle/H$. По лемме 2.1(d), $M_1, M_2, ..., M_n$ — модулярные в G подгруппы, которые содержатся в K. Значит, $(K/H)_{m(G/H)} = \langle M_1, M_2, ..., M_n\rangle/H \subseteq K_{mG}/H$.

Если же $K_1, K_2, ..., K_t$ — набор всех модулярных в G подгрупп, содержащихся в K, то $K_{mG} = \langle K_1, K_2, ..., K_t\rangle$. Согласно лемме 2.1(c), K_iH/H — модулярная в G/H подгруппа, и, очевидно, $K_iH/H \subseteq K/H, i = 1, ..., t$. Значит, $K_{mG}/H \subseteq (K/H)_{m(G/H)}$. Таким образом, $(K/H)_{m(G/H)} = K_{mG}/H$.

(4) Из $H_{mG} \subseteq H$ следует, что $(H_{mG})^h \subseteq H$ для любого $h \in H$. Так как H_{mG} модулярная в G подгруппа, то $(H_{mG})^h$ модулярная в G подгруппа по лемме 2.1(f). Значит, $(H_{mG})^h \subseteq H_{mG}$, а это влечет $(H_{mG})^h = H_{mG}$. Таким образом, H_{mG} нормальна в H. Лемма доказана.

Символом $Z_{\mathfrak{U}}(G)$ обозначают наибольшую нормальную подгруппу группы G, у которой все G-главные факторы цикличны ($Z_{\mathfrak{U}}(G) = 1$, если в G нет неединичных нормальных подгрупп с таким свойством).

Лемма 2.3 [1, гл. 5, теорема 5.2.5]. *Если подгруппа H модулярна в G, то $H^G/H_G \leq Z_{\mathfrak{U}}(G/H_G)$.*

Общие свойства m-добавляемых подгрупп описывает следующая лемма.

Лемма 2.4. *Пусть G — группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если H является m-добавляемой в G подгруппой и $H \leq M \leq G$, то H является m-добавляемой в M подгруппой;*

(2) *пусть N нормальная подгруппа в G и $N \leq H$. Тогда и только тогда H является m-добавляемой в G в подгруппой, когда H/N является m-добавляемой в G/N подгруппой;*

(3) *Пусть N — нормальная подгруппа группы G, H — m-добавляемая подгруппа в G и $(|H|, |N|) = 1$. Тогда HN — m-добавляемая подгруппа в G;*

(4) *пусть π — некоторое множество простых чисел, N — нормальная π'-подгруппа в G и H — π-подгруппа в G. Если H является m-добавляемой в G подгруппой, то HN/N является m-добавляемой в G/N подгруппой;*

(5) *пусть $H \leq G$ и $L \leq \Phi(H)$. Если L является m-добавляемой в G подгруппой, то L является модулярной в G подгруппой и $L \leq \Phi(G)$.*

Доказательство. (1) Это утверждение вытекает из леммы 2.2(1).

(2) Предположим, что H/N является m-добавляемой в G/N подгруппой. Тогда существует подгруппа K/N в G/N такая, что $G/N = (H/N)(K/N)$ и $(H/N) \cap (K/N) \leq (H/N)_{m(G/N)}$. Тогда $G = HK$ и по лемме 2.2(3) имеет место $(H/N)_{m(G/N)} = H_{mG}/N$, что влечет $(H/N) \cap (K/N) \leq H_{mG}/N$. Значит, $H \cap K \leq H_{mG}$ и поэтому H является m-добавляемой в G.

Обратно, если H является m-добавляемой в G подгруппой, то существует такая подгруппа K в G, что $G = HK$ и $H \cap K \leq H_{mG}$. Покажем, что H/N является m-добавляемой в G/N подгруппой. Так как $HKN = HK = G$, то $(H/N)(KN/N) = G/N$. Из $H \cap K \leq H_{mG}$ получаем, что $(H/N) \cap (KN/N) = (H \cap KN)/N = N(H \cap K)/N \leq H_{mG}/N$. По лемме 2.2(3) имеем $H_{mG}/N = (H/N)_{m(G/N)}$. Значит, $(H/N) \cap (KN/N) \leq (H/N)_{m(G/N)}$, и поэтому H/N является m-добавляемой в G/N.

(3) Так как H — m-добавляема в G, то существует такая подгруппа T в G, что $G = HT$ и $H \cap T \leq H_{mG}$. Предположим, что $T < NT \leq G$. Заметим, что $|NT : T| = \frac{|N||T|}{|T||N \cap T|} = \frac{|N|}{|N \cap T|}$, и значит, $|NT : T|$ делит $|N|$. Так как $|G : T| = \frac{|G|}{|T|} = \frac{|H||T|}{|T||H \cap T|}$, то то $|G : T|$ делит $|H|$. Но $(|H|, |N|) = 1$. Следовательно, $T = NT$ и $N \leq T$. Покажем, что HN — m-добавляемая подгруппа в G. Очевидно, что $HNT = HT = G$. Так как $T \cap HN = N(T \cap H) \leq NH_{mG}$, то по лемме 2.1(c)(d) получаем, что $NH_{mG} \leq (NH)_{mG}$. Значит, $T \cap HN \leq (NH)_{mG}$, а это означает, что HN — m-добавляемая подгруппа в G.

(4) Вытекает из (2) и (3). Лемма доказана.

Лемма 2.5 [9]. *Пусть P — силовская 2-подгруппа группы G. Если каждая максимальная подгруппа из P обладает 2-нильпотентным дополнением в G, то G является 2-нильпотентной группой.*

Следующая лемма хорошо известна.

Лемма 2.6. *Пусть G — группа, $A, B \leq G$ и $G = AB$. Тогда $G = AB^x$ для всех $x \in G$.*

Лемма 2.7. *Пусть L — минимальная нормальная подгруппа группы G и $L \leq O_p(G)$. Если некоторая максимальная подгруппа из L является m-добавляемой в G, то $|L| = p$.*

Доказательство. Предположим, что $|L| > p$. Пусть R — максимальная подгруппа в L. Так как R является m-добавляемой в G, то существует такая подгруппа T в G, что $RT = G$ и $R \cap T \leq R_{mG}$. Предположим, что $T < G$. Тогда $G = L \rtimes T$, что влечет, $RT \neq G$. Это противоречие показывает, что $T = G$. Тогда $R = R_{mG}$ — модулярная подгруппа в G. Значит, по лемме 2.3, $R^G/R_G \leq Z_{\mathfrak{U}}(G/R_G)$. Но $R_G = 1$ и $R^G \neq 1$. Следовательно, $R^G \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$ и $L \cap Z_{\mathfrak{U}}(G) \neq 1$, что влечет $L \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$. Значит, $|L| = p$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Если P не является неабелевой 2-группой, то мы используем символ $\Omega(P)$ для обозначения подгруппы $\Omega_1(P)$. В противном случае $\Omega(P) = \Omega_2(P)$.

Лемма 2.8. *Пусть P — нормальная p-подгруппа группы G. Если $P/\Phi(P) \leq Z_{\mathfrak{U}}(G/\Phi(P))$, то $P \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$.*

Доказательство. Пусть $C = C_G(P)$ и H/K — произвольный главный фактор группы G ниже P. Тогда $O_p(G/C_G(H/K)) = 1$ согласно лемме 3.9 в [6, гл. I]. Предположим, что $P/\Phi(P) \leq Z_{\mathfrak{U}}(G/\Phi(P))$. Тогда $(G/C_G(P/\Phi(P)))^{\mathcal{A}(p-1)}$ является p-подгруппой согласно [12, лемма 2.2]. Значит, $(G/C)^{\mathcal{A}(p-1)}$ — p-группа по теореме 2.4 в [11]. Таким образом, $G/C_G(H/K) \in \mathcal{A}(p-1)$ и поэтому $|H/K| = p$ согласно теореме 4.1 в [6, гл. I]. Следовательно, $P \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$. Лемма доказана.

Следуя Дерку и Хоуксу [7], мы используем $C^p(G)$ для обозначения пересечения централизаторов всех абелевых p-главных факторов группы G ($C^p(G) = G$, если G не имеет таких главных факторов).

Для каждой функции f вида

$$f : \mathbb{P} \cup \{0\} \to \{\text{формации групп}\}, \qquad (*)$$

положим, следуя [10], $CLF(f) = \{G$ — группа $\mid G/G_{\mathfrak{S}} \in f(0)$ и $G/C^p(G) \in f(p)$ для любого простого числа $p \in \pi(\mathrm{Com}(G))\}$. Здесь $G_{\mathfrak{S}}$ обозначает $\mathfrak{S}$-радикал группы G (т.е. наибольшую нормальную разрешимую подгруппу группы G); Com(G) обозначает класс всех абелевых групп A таких, что $A \simeq H/K$ для некоторого композиционного фактора H/K группы G. Формация $\mathfrak{F}$ называется композиционной, если для некоторой функции вида (*) имеет место $\mathfrak{F} = CLF(f)$.

Лемма 2.9. *Пусть $\mathfrak{F}$ — композиционная формация, содержащая все сверхразрешимые группы, и G — группа, содержащая нормальную подгруппу E такую, что $G/E \in \mathfrak{F}$. Если E — циклическая подгруппа, то $G \in F$.*

Доказательство. Не нарушая общности, можно предположить, что E — минимальная нормальная подгруппа группы G и поэтому $|E| = p$ для некоторого простого числа p. Согласно [10, теорема 1], $\mathfrak{F} = CLF(f)$ для некоторой функции вида (*). Ясно, что группа $H = E \rtimes (G/C_G(E))$ является сверхразрешимой, поэтому $H \in \mathfrak{F}$. Значит, $G/C_G(E) \in f(p)$. Пусть $C^p/E = C^p(G/E)$. Тогда $C^p(G) = C^p \cap C_G(E)$ согласно [5, гл. A, теорема 3.2]. Но так как $G/E \in \mathfrak{F}$, то $G/C^p \simeq (G/E)/C^p(G/E) \in f(p)$ и поэтому $G \in \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

3 Доказательство основной теоремы

Предположим, что данная теорема не верна, и рассмотрим контрпример (G, E) для которого $|G||E|$ является минимальным. Пусть $Z = Z_{\mathfrak{U}}(G)$, p — наименьший простой делитель $|E|$, P — силовская p-подгруппа группы E.

(1) *Если V — p'-холлова подгруппа в E, то условие теоремы выполняется для $(G/V, E/V)$.*

Понятно, что E/V нормальна в G/V и p — наименьший простой делитель $|E/V|$. Заметим также, что $P \simeq PV/V \in \mathrm{Syl}_p(E/V)$. Пусть L/V — максимальная в PV/V

подгруппа. Так как $L/V = V(L \cap P)/V \simeq (L \cap P)/V \cap (L \cap P) = (L \cap P)/1 \simeq L \cap P$, то $L \cap P$ — максимальная в P подгруппа. Поэтому по условию теоремы, $L \cap P$ является m-добавляемой подгруппой в G. Но $L = L \cap PV = V(L \cap P)$ и $(|V|, |L \cap P|) = 1$, и значит, по лемме 2.4(4), $V(L \cap P)/V$ является m-добавляемой подгруппой в G. Таким образом, условие теоремы выполняется для $(G/V, E/V)$.

(2) *E является p-нильпотентной группой.*

Предположим, что E не p-нильпотентна.

(a) $E = G$.

Действительно, если $E < G$, то $|E||E| < |G||E|$. Но, ввиду леммы 2.4(1), условие теоремы выполняется для (E, E). Значит, E является p-нильпотентной группой по выбору группы G. Полученное противоречие показывает, что $E = G$.

(b) $O_{p'}(G) = 1$.

Пусть $D = O_{p'}(G)$. По лемме 2.4(4) условие теоремы выполняется для G/D, и поэтому в этом случае, когда $D \neq 1$, G/D является p-нильпотентной группой по выбору группы G. Но тогда G является p-нильпотентной группой. Это противоречие означает, что $O_{p'}(G) = 1$.

(c) *Если $P \leq V < G$, то V — p-нильпотентная группа.*

Действительно, по лемме 2.4(1), условие теоремы выполняется для V, и поэтому V — p-нильпотентная группа по выбору группы G.

(d) *Если N — абелева минимальная нормальная подгруппа группы G, то G/N p-нильпотентна.*

Ввиду утверждения (b), N является p-группой и поэтому $N \leq P$. Таким образом, условие теоремы выполняется для G/N по лемме 2.4(2). Следовательно, утверждение (d) выполняется по выбору группы G.

(e) *G является p-разрешимой группой.*

Ввиду утвержения (d), нужно лишь показать, что G содержит абелеву минимальную нормальную подгруппу. Предположим, что это не так. Тогда $p = 2$, согласно теореме Фейта-Томсона о разрешимости групп нечетного порядка.

Покажем, что $(V_1)_{mG} \neq 1$ для некоторой максимальной подгруппы V_1 из P. Предположим, что $(V_1)_{mG} = 1$ для любой максимальной подгруппы V_1 из P. Пусть T такая подгруппа из G, что $V_1T = G$ и $V_1 \cap T \leq (V_1)_{mG} = 1$. Тогда T является дополнением V_1 в G, и поэтому T является 2-нильпотентной группой, так как порядок силовской 2-подгруппы из T равняется 2. Применяя лемму 2.5, получаем, что G является 2-нильпотентной группой. Полученное противоречие показывает, что существуют такие максимальные в P подгруппы V_1, что $(V_1)_{mG} \neq 1$.

Пусть $L = (V_1)_{mG}$. Тогда по лемме 2.3 получаем, что $L^G/L_G \leq Z_{\mathfrak{U}}(G/L_G)$. Предположим, что $L_G \neq 1$. Пусть R — минимальная нормальная в G подгруппа и $R \leq L_G$. Тогда R абелева. Это противоречие показывает, что $L_G = 1$. Поэтому $L^G \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$, а значит, $Z_{\mathfrak{U}}(G) \neq 1$. Но $Z_{\mathfrak{U}}(G)$ — нормальная подгруппа в G, и она имеет циклические G-главные факторы. Пусть R — минимальная нормальная подгруппа из G, содержащаяся в $Z_{\mathfrak{U}}(G)$. Но тогда R абелева, что противоречит нашему предположению о группе G. Таким образом, утверждение (e) доказано.

Заключительное противоречие для (2).

Пусть N — любая минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда в силу (b) и (e), N — p-группа и значит, G/N является p-нильпотентной группой согласно (d). Поэтому N — единственная минимальная нормальная подгруппа из G и $N \nleq \Phi(G)$. Следовательно, G — примитивная группа и поэтому $N = C_G(N) = F(G)$ согласно [7, гл. A, теорема 15.2]. Пусть M — максимальная подгруппа из G такая, что $G = N \rtimes$

$\leftthreetimes M$. Пусть $M_p \in \mathrm{Syl}_p(M)$ и V — максимальная подгруппа из P такая, что $M_p \leq V$ и $N \nleq V$. Тогда $VM \neq G$, и поэтому $VM^x \neq G$ для всех $x \in G$ по лемме 2.6. Так как V — m-добавляема в G, то существует подгруппа T из G такая, что $VT = G$ и $V \cap T \leq V_{mG}$. Предположим, что $V_{mG} = 1$. Тогда T является дополнением V в G, и поэтому $|T_p| = p$, где $T_p \in \mathrm{Syl}_p(T)$. Значит, T является p-нильпотентной группой, так как p — наименьший простой делитель порядка группы G, и поэтому $T_{p'} \trianglelefteq T$, где $T_{p'}$ — p'-холлова подгрупп из T. Так как G p-разрешима, то любые две p'-холловы подгрупп из G сопряжены, и поэтому существует элемент $x \in G$ такой, что $T_{p'} \leq M^x$. Если $T_p \leq M^x$, то $T \leq M^x$, и поэтому $G = VT = VM^x$. Получили противоречие с тем, что $VM^x \neq G$. Следовательно, $T_p \nleq M^x$. Но $G/N \simeq M^x \leq N_G(T_{p'})$ и $T_p \leq N_G(T_{p'})$. Поэтому $G = \langle M^x, T_p\rangle = N_G(T_{p'})$, что противоречит (b). Значит, $L = V_{mG} \neq 1$. Согласно лемме 2.3, $L^G/L_G \leq Z_{\mathfrak{U}}(G/L_G)$. Предположим, что $L_G \neq 1$. Тогда $N \leq L_G$, а это влечёт $N \leq V$. Полученное противоречие показывает, что $L_G = 1$. Рассуждая, как и выше, приходим к противоречию, которое завершает доказательство утверждения (1).

(3) $E = P$.

Пусть V — p'-холлова подгруппа в E. Тогда согласно (2), V является нормальной подгруппой в E, а значит, и характеристической в E подгруппой. Следовательно, V является нормальной подгруппой в G. Согласно (1), условие теоремы верно для $(G/V, E/V)$. Предположим, что $V \neq 1$. Тогда $E/V \leq Z_{\mathfrak{U}}(G/V)$ по выбору (G, E). Это противоречит выбору этой пары. Значит, $V = 1$ и $E = P$.

(4) *Если N — минимальная нормальная подгруппа из G, содержащаяся в P, то $P/N \leq Z_{\mathfrak{U}}(G/N)$, N — единственная минимальная нормальная подгруппа из G и $|N| > p$.*

Действительно, по лемме 2.4(2) условие теоремы выполняется для G/R, где R — любая минимальная нормальная подгруппа R из G, содержащаяся в P. Поэтому $P/R \leq Z_{\mathfrak{U}}(G/R)$ по выбору пары $(G, E) = (G, P)$. Следовательно, $|N| > p$. Если $R \neq N$, то ввиду G-изоморфизма $RN/R \simeq N$ получаем, что $|N| = p$. Это противоречие завершает доказательство утверждения (4).

(5) $\Phi(P) \neq 1$.

Предположим, что $\Phi(P) = 1$. Тогда P является элементарной абелевой p-группой. Пусть N_1 — любая максимальная подгруппа из N. Покажем, что N_1 является модулярной в G подгруппой. Пусть B — дополнение из N в P и $V = N_1B$. Тогда V является максимальной подгруппой из P, и поэтому она m-добавляема в G. Пусть T — подгруппа из G такая, что $G = TV$ и $T \cap V \leq V_{mG}$. Предположим, что $T = G$. Тогда $V = V_{mG}$ модулярна в G и значит, $V \cap N = V_{mG} \cap N = N_1B \cap N = N_1$ является модулярной в G подгруппой по лемме 2.1(a). Пусть $T \neq G$. Тогда $1 \neq T \cap P < P$. Так как $G = VT = PT$ и P абелева, то $T \cap P$ и $T \cap V$ нормальные в G подгруппы. Ясно, что $N \nleq V$, и поэтому $T \cap V = 1$. Но тогда $|T \cap P| = p$, что влечёт $|N| = p$. Полученное противоречие показывает, что каждая максимальная подгруппа из N является модулярной в G подгруппой. Применяя лемму 2.7, получаем, что $|N| = p$. Это противоречие завершает доказательство утверждения (5).

Заключительное противоречие. Согласно (5), $\Phi(P) \neq 1$. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа из G, содержащаяся в $\Phi(P)$. Тогда условие теоремы выполняется для G/N и поэтому $P/N \leq Z_{\mathfrak{U}}(G/N)$ по выбору (G, P). Значит, $P/\Phi(P) \leq Z_{\mathfrak{U}}(G/\Phi(P)$. Таким образом, $P \leq Z$ по лемме 2.8. Это противоречие завершает доказательство теоремы.

4 Приложения теоремы 1.2

Многие результаты теории формаций связаны с изучением условий, при которых та или иная группа принадлежит насыщенной формации. В этом направлении было найдено большое количество критериев разрешимости, сверхразрешимости, p-нильпотентности, нильпотентности и т.д., а также общих критериев принадлежности группы насыщенной формации. Тем не менее, в этом направлении почти нет результатов, связанных с композиционными формациями. Одним из приложений теоремы 1.2 является следующий результат.

Теорема 4.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — композиционная формация, содержащая все сверхразрешимые группы, и G — группа, содержащая нормальные подгруппы $X \leq E$ такие, что $G/E \in \mathfrak{F}$. Предположим, что все максимальные подгруппы каждой силовской подгруппы из X являются m-добавляемыми в G. Если $X = E$ или $X = F^*(E)$, то $G \in \mathfrak{F}$ и каждый главный фактор группы G ниже E является циклическим.*

Ещё одним ключевым фактом, лежащим в основе доказательства теоремы 4.1, является следующее наблюдение.

Предложение 4.2 [13, Предложение C]. *Пусть E — нормальная подгруппа группы G. Если каждый главный фактор группы G ниже $F^*(E)$ является циклическим, то каждый главный фактор группы G ниже E также является циклическим.*

В этом предложении $F^*(E)$ обозначает обобщенную подгруппу Фиттинга группы E, т.е. произведение всех нормальных квазинильпотентных подгрупп группы E.

Доказательство теоремы 4.1. Прежде предположим, что $X = F^*(E)$. Тогда по теореме 1.2 каждый главный фактор группы G ниже $F^*(E)$ является циклическим. Значит, согласно предложению 4.2, каждый главный фактор ниже E является циклическим. Теперь, применяя лемму 2.9, заключаем, что $G \in \mathfrak{F}$. Теорема доказана.

В литературе можно встретить следующие частные случаи теоремы 4.1.

Следствие 4.3 (Ли и Го [14]). *Предположим, что группа G разрешима и содержит такую нормальную подгруппу H, что G/H сверхразрешима. Если все максимальные подгруппы каждой силовской подгруппы из $F(H)$ являются дополняемыми в G, то G сверхразрешима.*

Напомним, что подгруппа H группы G называется c-нормальной [15] в G, если существует такая нормальная подгруппа T из G, что $TH = G$ и $H \cap K \subseteq H_G$.

Следствие 4.4 (Вей, Ванг и Ли [16]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы, и G — группа, содержащая нормальную подгруппу E такую, что $G/E \in \mathfrak{F}$. Если все максимальные подгруппы силовских подгрупп из $F^*(E)$ являются c-нормальными, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Следствие 4.5 (Рамадан, Еззат Мохамед, Хелиел [17]). *Пусть p — простое число, G — p-разрешимая группа и H — нормальная подгруппа группы G такая, что G/H p-сверхразрешима. Если максимальные подгруппы силовских p-подгрупп из H являются c-нормальными в G, то G p-сверхразрешима.*

Следствие 4.6 (Вей [18]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы, и G — группа с разрешимой нормальной подгруппой E такой, что $G/E \in \mathfrak{F}$. Если все максимальные подгруппы силовских подгрупп из $F(E)$ являются c-нормальными в G, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Напомним, что подгруппа H группы G называется c-добавляемой [19] в G, если существует такая подгруппа K из G, что $G = HK$ и $H \cap K \subseteq H_G$.

Следствие 4.7 (Ванг, Вей и Ли [20]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы, и G — группа, содержащая разрешимую* *нормальную подгруппу E такую, что $G/E \in \mathfrak{F}$. Если все максимальные подгруппы всех силовских подгрупп из $F(H)$ являются c-добавляемыми в G, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Следствие 4.8 (Ванг, Вей и Ли [21]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы, и G — группа, содержащая нормальную подгруппу H такую, что $G/H \in \mathfrak{F}$. Если все максимальные подгруппы любой силовской подгруппы из $F^*(H)$ являются c-добавляемыми в G, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Литература

1. Schmidt, R. Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt; Berlin etc: Walter de Gruyter, 1994. — 572 p.
2. Schmidt, R. Modulare Untergruppen endlicher Gruppen / R. Schmidt // J. Ill. Math. — 1969. — Vol. 13. — P. 358–377.
3. Ore, O. Contributions in the theory of groups of finite order / O. Ore // Duke Math. J. — 1939. — Vol. 5. — P. 431–460.
4. Stonehewer, S.E. Permutable subgroups in Infinite Groups / S.E. Stonehewer // Math. Z. — 1972. — Vol. 125. — P. 1–16.
5. Maier, R. The embedding of permutable subgroups in finite groups / R. Maier, P. Schmid // Math. Z. — 1973. — Vol. 131. — P. 269–272.
6. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков; М.: Наука, 1978. — 272 с.
7. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes; Berlin etc: Walter de Gruyter, 1992. — 891 p.
8. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro; Dordrecht etc: Springer, 2006. — 385 p.
9. Shemetkov, L.A. On the $\mathfrak{X}\Phi$-hypercentre of finite groups / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba // Journal of Algebra — 2009. — Vol. 322. — P. 2106–2117.
10. Skiba, A.N. Multiply $\mathfrak{L}$-Composition Formations of Finite Groups / A.N. Skiba, L.A. Shemetkov // Ukrainsk. Math. Zh. — 2000. — Vol. 52, № 6. — P. 783–797.
11. Gagen, T.M. Topics in Finite Groups / T.M. Gagen; Cambridge University Press, 1976. — 85 p.
12. Skiba, A.N. On two questions of L. A. Shemetkov concerning hypercyclically embedded subgroups of finite groups / A.N. Skiba // Journal of Group Theory. — 2010. — Vol. 13, № 6. — P. 841–850.
13. Skiba, A.N. A characterization of the hypercyclically embedded subgroups of finite groups / A.N. Skiba // Journal of Pure and Applied Algebra. — 2011. — Vol. 215, № 3. — P. 257–261.
14. Li, D. On Complemented subgroups of finite groups / D. Li, X. Guo // Chinese Ann. Math. Ser. B — 2001. — Vol. 22. — P. 249–254.
15. Wang, Y. c-normality of groups and its properties / Y. Wang // J. Algebra. — 1996. — Vol. 180. — P. 954–965.
16. Wei, H. On c-normal maximal and minimal subgroups of Sylow subgroups of finite groups, II. / H. Wei, Y. Wang, Y. Li // Comm. Algebra. — 2003. — Vol. 31. — P. 4807–4816.
17. Ramadan, M. On c-normality of certain subgroups of prime power order of finite groups / M. Ramadan, M. Ezzat Mohamed, A.A. Heliel // Arch. Math. — 2005. — Vol. 85. — P. 203–210.

18. Wei, H. On c-normal maximal and minimal subgroups of Sylow subgroups of finite groups / H. Wei // Comm. Algebra. — 2001. — Vol. 29. — P. 2193–2200.

19. Ballester-Bolinches, A. c-supplemented subgroups of finite groups / A. Ballester-Bolinches, Y. Wang, X.Y. Guo // Glasgow Math. J. — 2000. — Vol. 42. — P. 383–389.

20. Wang, Y. A generalization of Kramer's theorem and its applications. / Y. Wang, H. Wei, Y. Li // Bull. Australian Math. Soc. — 2002. — Vol. 65. — P. 467–475.

21. Wei, H. On c-supplemented maximal and minimal subgroups of Sylow subgroups of finite groups / H. Wei, Y. Wang, Y. Li // Proc. Amer. Math. Soc. — 2004. — Vol. 132, № 8. — P. 2197–2204.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 18.02.11