УДК 535.42+537.86

ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СКАЛЯРНЫХ 2D ПУЧКОВ КУММЕРА – ГАУССА

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

PHYSICAL PROPERTIES OF SCALAR 2D BEAMS OF KUMMER – GAUSS

S.S. Girgel

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Развит унифицированный формализм, с использованием которого можно вывести общие выражения для параксиальных двумерных световых пучков Куммера – Гаусса, подобных гауссовым, и установить взаимосвязь между ними. Детально исследованы условия их физической реализуемости. Найдены новые типы пучков Куммера – Гаусса. Такие пучки представляют в виде произведения гауссиана на функции Куммера комплексного аргумента и целочисленного индекса *n*.

Ключевые слова*: параксиальные пучки, пучки Эрмита – Гаусса, пучки Куммера – Гаусса; пучки, подобные гауссовым; квадратичная интегрируемость.*

The unified formalism allowing to deduce common expressions for paraxial two-dimensional Gaussian-like light Kummer – Gaussian beams and discover correlations between them is developed. Conditions of their physical realizability are explored in details. New types of Kummer – Gaussian beams are discovered. Such beams are presented as Gaussian product on Kummer function of complex argument and a *n* integer index.

Keywords: *paraxial beams, Hermite – Gaussian beams, Kummer – Gaussian beams, Gaussian-like beams, square integrability.*

Введение

В настоящее время повысился интерес к поиску решений нового типа для оптических полей. Наибольший интерес представляют решения, которые соответствуют локализованным в малом объёме направленным пучкам излучения, реализуемым экспериментально [1]–[2]. Обычно для вывода уравнений таких пучков используют различные подходы, поэтому установление взаимосвязей между ними затруднено. В нашей работе [3] был предложен унифицированный формализм, придерживаясь которого можно вывести выражения для пучков, подобных гауссовым, разных типов и установить взаимосвязь между ними. В настоящей работе этот формализм обобщен и представлен аналогично тому, как это реализовано в [4]. Подробно рассмотрены условия физической реализации исследуемых пучков. Установлена также возможность существования новых типов пучков и сформулированы условия квадратичной интегрируемости (КИ) сопоставляемых им выражений.

1 Фундаментальная гауссова мода

Для монохроматических волн вида

$$f(\mathbf{r},t) = f\exp(kz - i\omega t)$$

скалярное параболическое уравнение, решением которого является амплитуда f параксиального светового *2D* пучка, имеет вид [1]–[5]:

$$(\partial^2_{x,x} + 2ik\partial_z)f = 0. \qquad (1.1)$$

Целесообразно далее перейти к безразмерным переменным

$$X = x/x_0, \quad Z = z/z_0. \qquad (1.2)$$

Здесь $x_0 > 0$, $z_0 = kx_0^2/2$ – некоторые характерные размеры пучка в направлениях, параллельных осям OX и OZ соответственно. Вместо стандартного комплексного параметра пучка

$$q = z - q_0,$$

где z –расстояние от начала координат до точки, лежащей на оси пучка, в которой определяются характеристики волнового поля, введем комплексный безразмерный параметр пучка $Q = q/z_0$ и запишем, учитывая формулы (1.2):

$$Q = Z - Q_0, \text{ где } Q_0 = Q_0^{'} + iQ_0^{''}. \qquad (1.3)$$

Теперь параболическое уравнение (1.1) можно записать в безразмерном виде:

$$(\partial^2_{X,X} + 4i\,\partial_Q)f = 0. \qquad (1.4)$$

Из множества решений этого уравнения только одно является фундаментальным решением – гауссиан [1], [3], [5]

$$G(X,Q) = \exp\left(iX^2/Q\right)\Big/\sqrt{Q}. \qquad (1.5)$$

Данное решение удовлетворяет физическим принципам: при $X \to \pm\infty$ $G(X,Q) \to 0$; функция (1.5) квадратично интегрируема, если $\mathrm{Im}(Q_0) = Q_0^{''} > 0$. Гауссиан $G(X,Q)$ представляет двумерную основную гауссову моду [5].

2 Подобные гауссиану моды высших порядков

Для нахождения более сложных решений параболического уравнения (1.4) используем подстановку

$$f(X,Q) = G(X,Q) \cdot h(X,Q). \qquad (2.1)$$

Здесь на некоторую функцию $h(X,Q)$ накладывается гауссова функция $G(X,Q)$. Поэтому пучки, которым сопоставляются функции $f(X,Q)$, будем называть подобными гауссовым световыми пучками.

Новая функция $h(X,Q)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\partial^2_{X,X} h + \frac{4i}{Q} X \partial_X h + 4\, i \partial_Q h = 0. \qquad (2.2)$$

Для его решения произведём нелинейную замену переменных:

$$X_1(Q) = X \cdot b(Q), \qquad (2.3)$$

где $b(Q)$ – некоторая функция от Q. Тогда функция $h(X_1, Q)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial^2_{X_1,X_1} h - 2c X_1\, \partial_{X_1} h + 4\, i b^{-2} \partial_Q\, h = 0, \qquad (2.4)$$

где

$$c = -\frac{i}{b^2}\left(\frac{2}{Q} + \frac{1}{b^2} d_Q(b^2)\right). \qquad (2.5)$$

Уравнение (2.4) при произвольной зависимости $b(Q)$ не имеет известных аналитических решений. Оно решается, если множитель c в (2.5) не зависит от Q и является некоторой комплексной константой. Интегрируя (2.5), находим $b(Q)$ при $c = const$:

$$(b(Q))^2 = \frac{is}{Q(Q - cs)}. \qquad (2.6)$$

Здесь s – некоторая комплексная константа интегрирования.

Выполним разделение переменных в (2.4), предполагая, что

$$h(X_1, Q) = h_1(X_1) \cdot h_3(Q). \qquad (2.7)$$

При этом условии уравнение (2.4) сводится к двум уравнениям:

$$\frac{dh_3}{h_3} = -\frac{i\nu b^2}{2} dQ; \qquad (2.8)$$

$$d^2_{X_1,X_1} h_1 - 2X_1 d_{X_1} h_1 + 2\nu h_1 = 0, \qquad (2.9)$$

где ν – постоянная разделения переменных, в общем случае комплексная.

Решения уравнений (2.8) и (2.9) соответствуют параксиальным подобным гауссовым модам высших порядков и принципиально различаются при $c=0$ и при $c \neq 0$. Оба варианта обсуждались в [3]; более подробно остановимся на модах, для которых $c=0$.

3 Пучки Куммера – Гаусса с комплексным аргументом

Если $c \neq 0$, то, без ограничения общности, можно положить $c = 1$ и функцию $b(Q)$ представить в форме

$$b^2 = i\left(1/\tilde{Q} - 1/Q\right). \qquad (3.1)$$

Здесь введен второй комплексный безразмерный параметр пучка: $\tilde{Q} = Q - s$. Тогда, полагая $\tilde{Q}_0 = Q_0 + s$, имеем

$$\tilde{Q} = Z - \tilde{Q}_0, \text{ где } \tilde{Q}_0 = \tilde{Q}_0^{'} + i\tilde{Q}_0^{''}. \qquad (3.2)$$

Теперь аргумент X_1 функции $h_1(X_1)$ зависит от поперечной координаты X и двух комплексных параметров пучка Q и $\tilde{Q}$:

$$X_1^2 = i\left(1/\tilde{Q} - 1/Q\right) X^2. \qquad (3.3)$$

Решение уравнения (2.8) имеет вид:

$$h_3(Z) = \left(\tilde{Q}/Q\right)^{\nu/2}. \qquad (3.4)$$

Общее решение $h_1(X_1)$ уравнения (2.9) – скалярную амплитуду подобного гауссиану пучка здесь удобно представить [3] через конфлюэнтную гипергеометрическую функцию ${}_1F_1$ [6]–[10] – функцию Куммера M:

$$h_1(X_1) = A \cdot X_1 \cdot {}_1F_1\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}, \frac{3}{2}, X_1^2\right) +$$

$$B \cdot {}_1F_1\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, X_1^2\right) \equiv h_1^e + h_1^o, \qquad (3.5)$$

где A и B – некоторые произвольные постоянные. Индексы o и e отмечают соответственно четность (even) и нечетность (odd) функций h_1^e и h_1^o относительно изменения знака аргумента X_1.

Общее решение для амплитуды $f(X)$ в (2.1) скалярного пучка, подобного гауссову, имеет вид [3]:

$$f(X, Q, \tilde{Q}, \nu) = G(X,Q) \cdot \left(\tilde{Q}/Q\right)^{\nu/2} h_1(X_1). \quad (3.6)$$

Зависимость функции f от поперечной координаты X_1 определяется функциями Куммера и Гаусса, поэтому пучки, которым сопоставлены формулы (3.2)–(3.6), будем называть пучками Куммера – Гаусса (*K-G*). Функции (3.2)–(3.6) зависят от трех произвольных комплексных параметров Q_0, $\tilde{Q}_0$ и ν. Пучки *K-G* представляют обобщение пучков Эрмита – Гаусса (*H-G*) с комплексным аргументом [1]–[5], [11]–[13]. Функциям h_1^e и h_1^o соответствуют амплитуды f^e и f^o, сопоставляемые пучкам *K-G* различной четности. Подчеркнем, что, в соответствии с (3.5)–(3.6), для произвольного набора комплексных параметров (Q_0, $\tilde{Q}_0$, ν) всегда существуют два независимых решения f^e и f^o – четное и нечетное относительно изменения знака переменной X.

Схожие с полученными здесь решениями для амплитуды f параболического уравнения для скалярных 2D пучков были представлены в [4], (см. также [5], [12], [13]).

Заметим, что в [3] вместо Q нами использовалась переменная $L = iQ$, где $Q = Z - i$, т. е. характерный поперечный размер x_o выбирался так, чтобы выполнялось равенство $Q_0^{"} = 0$. В настоящей работе обсуждается более общий случай, когда $\tilde{Q} = Z - \tilde{Q}_0$, где $\tilde{Q}_0 = \tilde{Q}_0^{'} + i\tilde{Q}_0^{"}$ – некоторый комплексный скаляр. Отметим также, что в работе [3] допущена опечатка: формулу (3.15) в [3] следует записывать как $\mathrm{Re}(1/p) > -1$.

Таким образом, при $c \neq 0$ параксиальные двумерные световые пучки, подобные гауссовым, в общем случае являются пучками *K-G*, и им сопоставляются функции комплексного аргумента X_1, которые зависят от трех произвольных комплексных параметров: Q_0, $\tilde{Q}_0$ и ν.

Пучки *K-G* отличаются от гипергеометрически-гауссовых мод, рассмотренных в [14]–[16].

Заметим, что трехмерные скалярные решения для пучков *K-G* можно построить как произведения 2D решений типа (3.6):

$$f(X,Y,Z) = \\ = f(X, Q_X, \tilde{Q}_X, \nu_X) \cdot f(Y, Q_Y, \tilde{Q}_Y, \nu_Y). \quad (3.7)$$

При этом возможна любая комбинация четностей. Итак, в общем случае амплитуда 3D скалярного пучка *K-G* зависит от трех координат и шести свободных комплексных параметров.

4 Условия физической реализуемости пучков Куммера – Гаусса

Наибольший практический интерес представляют физически реализуемые пучки конечной мощности [1], [2]. Амплитуда такого пучка должна быть ограниченной при всех *X.* Более того, при $X \to \pm\infty$ амплитуда *f* должна стремиться к нулю и быть квадратично интегрируемой, т.е. интеграл $k^2 \int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 \, dX_1$ должен сходиться. Чтобы гауссов пучок был физически реализуемым, как отмечалось выше, достаточно одного простого ограничения: $Q_0^{"} > 0$.

В работе [4] отмечено, что полученные её авторами решения уравнений для пучков, при математическом описании представляемых как произведение функций параболического цилиндра на гауссиан *G*, инвариантны относительно преобразований (записаны с использованием введённых нами выше обозначений)

$$Q \leftrightarrow \tilde{Q}, \quad \nu \leftrightarrow (-\nu - 1). \quad (4.1)$$

Несложно показать, что соотношения симметрии (4.1) выполняются и для пучков *K-G*. Поэтому будем использовать их далее.

Проведем анализ условий КИ для пучков *K-G*. Для этого исследуем асимптотическое поведение функций *f* при $|f| \to \infty$. Асимптотическое поведение конфлюэнтной гипергеометрической функции $F_1(a,b,\Phi)$ при $|\Phi| \to \infty$ описывается формулой [7], [10]

$$F_1(a,b,\Phi) = \frac{\exp(-i\pi a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} \Phi^{-a} + \frac{\exp(\Phi) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a)} \Phi^{a-b}, \quad (4.2)$$

где Γ – гамма-функция и $a \neq 0, -1, -2, ... = -m.$ Учитывая (4.2) применительно к (3.6), получим условия КИ для пучков *K-G*, соответствующие различным частным ситуациям, рассмотренным ниже.

1. ν – целое число. При этом возможны следующие частные случаи:

1.1. $Q_0^{"} > 0$. При $\nu = 1, 3, 5, ... = 2m+1$ выражения для f^o описывают стандартные, элегантные и обобщенные пучки *H-G.* При выполнении дополнительного условия $\tilde{Q}_0^{"} \geq 0$ выражения для f^e соответствуют пучкам *K-G* нового типа, отмеченным нами в [3] и отсутствующим в [4].

1.1.1. При $\tilde{Q}_0^{"} > 0$ и каждом значении $\nu = -1, -3, -5, ... = -2m-1$ выражения для f^e соответствуют различным пучкам *H-G*. При дополнительном ограничении $\tilde{Q}_0^{"} \geq 0$ функции f^o обладают КИ и соответствуют пучкам *K-G* нового типа, не описанным ранее в научной литературе.

1.2. $Q_0^{"} > 0.$ При $\nu = 0, 2, 4, ... = 2m$ выражения для f^e описывают стандартные, элегантные и обобщенные пучки *H-G.* При дополнительном условии $\tilde{Q}_0^{"} \geq 0$ выражения для функций f^o представляют математический образ пучков *K-G* нового типа, отмеченных нами в [3].

1.2.1. При $\tilde{Q}_0^{"} > 0$ при каждом значении $\nu = -2, -4, -6, ... = -2m-2$ выражения для f^o получаем различные по типу пучки *H-G*. При дополнительном условии $Q_0^{"} \geq 0$ функции f^e обладают КИ и соответствуют пучкам *K-G* нового типа, не описанным ранее в литературе.

В рассмотренных далее частных случаях 2.1–2.4 условия физической реализуемости, т. е. КИ для четных и нечетных мод *K-G* одинаковы, поэтому далее индексы *o* и *e* при f опускаем.

2.1. При $Q_0^{"} > 0$ и $\tilde{Q}_0^{"} > 0$ пучки *K-G* обладают КИ при произвольных комплексных индексах ν.

2.2. Если $Q_0^{"} > 0$, $\tilde{Q}_0^{"} = 0$, то при различных значениях ν' вопрос о КИ решается по-разному:

2.2.1. Функция f является КИ, если $\nu' > -1/2$;

2.2.2. $|f| \to 0$ при $|x| \to \infty$, но не является КИ, если $\nu' \in [-1/2, -1)$;

2.2.3. $|f| \to const \neq 0$ и не является КИ при $|x| \to \infty$, если $\nu' = -1$;

2.2.4. $|f| \to \infty$ и не является КИ при $|x| \to \infty$, если $\nu' < -1$.

2.3. Если $Q_0^{"} = 0$, $\tilde{Q}_0^{"} > 0$, тогда решение вопроса о КИ функции *f* неоднозначно:

2.3.1. пучок является КИ, если $\nu' < -1/2$;

2.3.2. $|f| \to 0$ при $|x| \to \infty$, но не КИ, если $\nu' \in [-1/2, 0)$;

2.3.3. $|f| \to const \neq 0$, но не КИ при $|x| \to \infty$, если $\nu' = 0$;

2.3.4. $|f| \to \infty$ и не КИ при $|x| \to \infty$, если $\nu' > 0$.

Варианты 2.3 получаются из 2.2 в результате выполнения преобразований симметрии (4.1).

2.4. Наконец, если $Q_0^{"} = \tilde{Q}_0^{"} = 0$, мы имеем снова различные варианты.

2.4.1. $|f| \to 0$ при $|x| \to \infty$, но не КИ, если $\nu' \in (-1, 0)$;

2.4.2. $|f| \to const \neq 0$ и не является КИ, если $\nu' = 0$ или $\nu' = 1$;

2.4.3. $|f| \to \infty$ и не КИ при $|x| \to \infty$, если $\nu' < -1$ или $\nu' > 0$.

Все найденные выше условия КИ для функций, используемых при описании пучков *K-G*, подтверждаются при графическом моделировании их свойств.

Подчеркнем, что в варианте 2.4.3 при $\nu' > 0$ получаем $|f| \to \infty$, а в варианте 2.4.2 при $\nu' = 0$ функции $|f| \to const \neq 0$. В работе [4] в обеих этих ситуациях авторы полагают, что $|f| \to 0$, но это неверно. Наши выводы, сформулированные в 2.4, также соответствуют свойствам инвариантности (4.1) пучков *K-G*.

5 Пучки K-G целочисленного индекса ν

Остановимся на некоторых частных вариантах пучков *K-G* целочисленного индекса *ν*, которые сводятся к пучкам *H-G*. Если $\nu = 1, 3, 5, ... = 2m+1$, то функции ${}_1F_1$ редуцируются к полиномам Эрмита [6]–[8] нечетного индекса:

$$X_1 \cdot {}_1F_1\left(\frac{1-(2m+1)}{2}, \frac{3}{2}, X_1^2\right) = \frac{(-1)^m m!}{2(2m+1)!} H_{2m+1}(X_1). \tag{5.1}$$

Поэтому $h_1^o(X_1) \sim H_{2m+1}(X_1)$ и функции

$$f^o \sim G\, H_{2m+1}(X_1).$$

Таким образом, если $\nu = 1, 3, 5, ... = 2m+1$, то нечетные функции f^o, соответствующие пучкам *K-G*, редуцируются в известные [2], [4], [5] нечетные функции комплексного аргумента, сопоставляемые обобщенным пучкам *H-G*.

Аналогично, при $\nu = 0, 2, 4, ... = 2m$ функции ${}_1F_1$ редуцируются к полиномам Эрмита [6]–[8] четного индекса:

$${}_1F_1\left(-m, \frac{1}{2}, X_1^2\right) = \frac{(-1)^m m!}{(2m)!} H_{2m}(X_1). \tag{5.2}$$

При этом $h_1^e(X_1) \sim H_{2m}(X_1)$ и функции

$$f^e \sim G\, H_{2m}(X_1).$$

Следовательно, если $\nu = 0, 2, 4, ... = 2m$, то чётные функции f^e, сопоставляемые пучкам *K-G*, сводятся к известным [2], [4], [5] четным функциям комплексного аргумента, посредством которых описывают обобщенные пучки *H-G*.

Пучки *K-G*, которым соответствуют нечётные функции f^o при $\nu = 0, 2, 4, ... = 2m$, и пучки *K-G*, которым сопоставляют чётные функции f^e при $\nu = 1, 3, 5, ... = 2m+1$, являются новыми и не описаны в [4], [12], [13]. Например, авторы работы [4] искали решения параболического уравнения в виде функций параболического цилиндра, умноженных на гауссиан. Поэтому естественно, что те пучки *K-G*, которые не выражаются через функции параболического цилиндра, в [4] отсутствуют.

Используя соотношения инвариантности (4.1), получим аналогичные выводы относительно условий существования новых пучков *K-G*, которым соответствуют функции f^o, снабжённые отрицательным целочисленным индексом ν (варианты 1.1.1 и 1.2.1).

Аргумент X_1 функций Эрмита при описании пучков *H-G* может быть вещественным при любых *Z* только при выполнении условия $Q_0{*} = \tilde{Q}_0$. При этом обобщенные пучки *H-G* редуцируются к двумерным стандартным *H-G* (*sH-G*) пучкам [1], [2] с вещественным аргументом.

В пределе при $\tilde{Q}_0 \to \infty$ обобщенные пучки *H-G* комплексного аргумента сводятся к элегантным пучкам *H-G* (*eHG*), впервые введенным Сигманом [11].

Заметим, что только *sH-G* пучки распространяются в свободном пространстве, сохраняя свою форму. Остальные пучки *K-G* в процессе распространения изменяют свой поперечный профиль. Поэтому их можно назвать пучками с изменяющейся геометрией профиля. К их числу относятся и *eH-G* пучки.

Заключение

В данной работе унифицированный формализм использован для решения скалярного двумерного параболического уравнения для параксиальных световых пучков. В этих целях после предварительного перехода к безразмерным переменным произведена нелинейная замена переменных. Получены общие решения, пригодные для описания параксиальных пучков, подобных гауссову и названных пучками *K-G*, так как для их математического описания используются произведения функций Куммера и Гаусса. Функции, соответствующие пучкам *K-G*, зависят от трёх свободных комплексных параметров – Q_0, $\tilde{Q}_0$ и ν – и являются обобщением известных функций комплексного аргумента, сопоставляемых обобщенным пучкам *H-G*.

Установлено, что при каждом наборе трёх свободных комплексных параметров Q_0, $\tilde{Q}_0$, ν всегда существуют два типа световых пучков *K-G* – описываемых четными (f^e) и нечетными (f^o) функциями аргумента *X*.

Выявлено, что даже при целочисленных значениях индексов $\nu = n$, наряду с известным решением в виде функции *H-G* комплексного аргумента, всегда существует второе (новое) решение, представляемое функцией *K-G* противоположной чётности с таким же индексом $\nu = n$.

Установлена взаимосвязь пучков *K-G* с обобщенными, стандартными и элегантными пучками *H-G*.

Фазовая и амплитудная поверхности пучков *K-G* даже при распространении в свободном пространстве непрерывно деформируются. Все *2D* пучки *K-G*, кроме пучков *sH-G*, являются пучками с изменяющейся геометрией.

Найдены ограничения на параметры, при соблюдении которых полученные решения соответствуют пучкам с конечной энергией, подобным гауссовым, то есть физически реализуемым. Установлено, что условия физической реализуемости различны для пучков *K-G*, описываемых чётными и нечётными функциями с целочисленным индексом ν, и одинаковы – при нецелочисленном индексе ν.

Показано, что выражения, полученные для описания 2D пучков *K-G*, легко обобщаются в формулы, соответствующие 3D пучкам.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ананьев, Ю.А.* Оптические резонаторы и лазерные пучки / Ю.А. Ананьев. – М. : Наука, 1990. – 264 с.
2. *Гончаренко, А.М.* Гауссовы пучки света / А.М. Гончаренко. – Мн. : Наука и техника, 1977. – 142 с.
3. *Гиргель, С.С.* Скалярные параксиальные двумерные гауссовоподобные пучки / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 1 (2). – С. 7–11.
4. *Bandres, M.A.* Cartesian beams / M.A. Bandres and J.C. Gutierres-Vega // Optics Letters. – 2007. – Vol. 32, № 23. – P. 3459–3461.
5. *Киселев, А.П.* Новые структуры параксиальных гауссовых пучков / А.П. Киселев // Опт. и спектр. – 2004. – Т. 96, № 4. – С. 533–535.
6. *Лебедев, Н.Н.* Специальные функции и их приложения / Н.Н. Лебедев. – М. : ГИТТЛ, 1953. – 379 с.
7. *Справочник по специальным функциям* / под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М. : Наука, 1979. – 830 с.
8. *Янке, Е.* Специальные функции / Е. Янке Ф. Эмде, Ф. Леш.– М. : Наука, 1977. – 342 с.
9. *Полянин, А.Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики / А.Д. Полянин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 576 с.
10. *Флюгге, З.* Задачи по квантовой механике. Т. 2 / З. Флюгге. – М. : Мир, 1974. – 418 с.
11. *Siegman, A.E.* Hermite-gaussian function of complex argument as optical-beam eigenfunction / A.E. Siegman // JOSA. – 1973. – Vol. 63, № 9. – P. 1093–1094.
12. *Pratesi, R.* Generalized gaussian beams in free space / R. Pratesi, L. Ronchi // JOSA. – 1977. – Vol. 17, № 9. – P. 1274–1276.
13. *Torre, A.* A note on the general solution of paraxial wave equation: a Lie algebra view / A. Torre // Journ. Opt. A. – 2008. – Vol. 10, № 8. – P. 055006 – 055020.
14. *Hypergeometric-Gaussian modes* / E. Karimi [et al.] // Optics Letters. – 2007. – Vol. 32, № 21. – P. 3053–3055.
15. *Improved focusing with Hypergeometric-Gaussian type-II optical modes* / E. Karimi [et al.] // Optics Express. – 2008. – Vol. 16, № 25. – P. 21069–21075.
16. *Гипергеометрические моды* / В.В. Котляр [и др.] // Компьютерная оптика. – 2006. – № 3. – С. 16–22.

Поступила в редакцию 17.11.11.