АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ В МАТЕМАТИКЕ

Дифференциальные уравнения, математический анализ и численные методы

Н. А. Алёшин, Т. А. Михаленко
(ГГУ им. Ф.Скорины, Гомель)

ДИСКРЕТНАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С КОНТИНИУМОМ ОГРАНИЧЕНИЙ

Рассмотрена линейная задача оптимального управления:

$$J(u) = c'x(t^*) \to \max,$$

$$x(t+1) = Ax(t) + bu(t), \quad x(0) = x_0,$$

$$g_* \le Hx(t) \le g^*,$$

$$f_*(t) \le u(t) \le f_*(t), \quad t \in T = \{0, 1, \ldots, t^* - 1\}.$$

Здесь $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R$, $t \in T$; $A \in R^{nxn}$; $H \in R^{mxn}$, $rankH = m$; c, b, g_*, g^* – заданные векторы соответствующих размеров, $f_*(t)$, $t \in T$ – заданные функции.

Понятия допустимого, оптимального, субоптимального управлений и соответствующих им траекторий вводятся стандартно.

Опорой исходной задачи назовём совокупность $K_{on} = \{I_{on}, T_{on}\}$ двух множеств $I_{on} \in I$, $T_{on} \in T$, $|I_{on}| = |T_{on}|$, для которой матрица $P_{on} = (H(I_{on}, I)F(t^*, t)b, t \in T_{on})$ неособая.

Получена формула приращения критерия качества

$$\Delta J(u) = -\sum_{t \in T_н} \Delta(t)\Delta u(t) + \sum_{s \in I_{on}} \nu(s)\omega(s),$$

где $\Delta u(t) = \bar{u}(t) - u(t)$, $t \in T$ – приращение управления, $\nu = (\nu_i, i \in I_{on})$ –

вектор потенциалов, $\Delta(t)$, $t \in T_н$ – вектор оценок, $\omega(s)$ – невязки выходных сигналов.

Введена функция $\psi(t)$, $t \in T$, – решение сопряжённой системы

$$\psi'(t-1) = \psi'(t)A,\ t \in T,\ \psi'(t-1) = c' - \nu'(I_{оп})H(I_{оп}, J).$$

Сформулирован критерий оптимальности для исходной задачи.

Теорема. Для оптимальности допустимого управления u достаточно существования такой опоры $K_{оп}$, что вдоль опорного управления $\{u, K_{оп}\}$ и сопровождающего её решения $\psi(t)$, $t \in T$, сопряжённой системы выполнялись условия:

$$\begin{aligned}
&\Delta(t) = -\psi'(t)b \geq 0, \quad при \quad u(t) = f_*(t);\\
&\Delta(t) = -\psi'(t)b \leq 0, \quad при \quad u(t) = f^*(t);\\
&\Delta(t) = -\psi'(t)b = 0, \quad при \quad f_*(t) \leq u(t) = f^*(t); \quad t \in T_н,\\
&\nu(s) \leq 0, \quad при \quad H(s, J)x(t^*) = g_*(s);\\
&\nu(s) \geq 0, \quad при \quad H(s, J)x(t^*) = g^*(s);\\
&\nu(s) = 0, \quad при \quad g_*(s) < H(s, J)x(t^*) < g^*(s); \quad s \in I_{оп}.
\end{aligned}$$

Программно реализован алгоритм решения исходной задачи.