А. В. Астафьева, Е. П. Кечко
(ГГУ им. Ф.Скорины, Гомель)

О НУЛЯХ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА-ПАДЕ

Диагональными аппроксимациями Эрмита-Паде I типа (Latin type) и $(n-1)$ -го порядка для набора экспонент $\{e^{pz}\}_{p=0}^{m}$ называют $m+1$ многочленов $A_n^0(z), A_n^1(z), \ldots, A_n^m$ степени не выше $n-1$, для которых

$$\sum_{p=0}^{m} A_n^p(z) e^{pz} = O(z^{mn+n-1}),\ z \to 0, \qquad (1)$$

где предполагается, что хотя бы один многочлен $A_n^p(z)$ тождественно не равен нулю. Такие аппроксимации определил Ш. Эрмит [1]. В [2] показано, что с помощью аппроксимаций Эрмита−Паде I типа можно доказать трансцендентность числа e.

Рассмотрим диагональные аппроксимации Эрмита−Паде I типа для системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^{m}$ с произвольными различными действительными показателями $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_m$. Нас интересует поведение нулей многочленов Эрмита $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^m$, имеющих степень не выше $n-1$ и удовлетворяющих условиям

$$\sum_{p=0}^{m} A_n^p(z) e^{\lambda_{\text{з}} z} = O(z^{mn+n-1}), \quad z \to 0.$$

Представленные результаты дополнят результаты Г. Шталя [3], Ф. Вилонского [4]. Сформулируем основной результат.

Теорема 2. Пусть $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_m$ – произвольные действительные числа. Тогда при $n \geq 2$, $m \geq 1$ нули многочлена $A_n^p(z)$, $0 \leq p \leq m$, лежат в круге

$$\{z : |z| < R_n^p\},$$

где

$$R_n^p = 2(n - 1/3)\left[\sum_{j=1}^{p} 1/(\lambda_p - \lambda_{p-j}) + \sum_{j=1}^{m-p} 1/(\lambda_{p+j} - \lambda_p)\right] \qquad (2)$$

В случаях, когда $p = 0$ или $p = m$, соответственно первая и вторая суммы в (2) равны нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hermite, C. Sur la fonction exponentielle/ C. Hermite// C.R. Akad. Sci. Paris. − 1873. − V. 77. − P. 18−293.

2. Mahler, K. Perfect systems/K. Mahler// Comp. Math. − 1968. − V. 19. − P. 95−166.

3. Stahl, H. Asymptotics for quadratic Hermite–Pade polynomials associated with the exponential function / H. Stahl // Electronic Trans. Num. Anal. −2002. − № 14. − P. 193–220.

4. Wielonsky, F. Asymptotics of Diagonal Hermite-Pade Approximants to e^z / F. Wielonsky// J. Approx. Theory. − 1997. − V. 90, № 2. − P. 283−298.