С. И. Жогаль, И. Е. Стародубцев
*(Белорусский государственный университет транспорта,
Гомельский государственный университет имени Ф.Скорины)*

О ПОТЕНЦИАЛЬНОСТИ УСРЕДНЕННЫХ СТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ КОЛМОГОРОВА-ФОККЕРА-ПЛАНКА ДЛЯ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ

При решении многих прикладных задач объектом исследования выступают квазилинейные колебательные системы, испытывающие случайные изменения частоты колебаний. Пусть исследуемая система описывается стохастическим дифференциальным уравнением вида

$$\ddot{x}+\omega^2 x=\varepsilon h(x,\dot{x})+\varepsilon\sum_{s=0}^{S}P_s\cos\left(\left(\frac{s^2-1}{3}\right)^{1/2}\omega t\right)x^s+\sqrt{\varepsilon}\sigma x\dot{\xi}(t), \qquad (1)$$

где параметры гармонических воздействий

$$\Omega_s=\left(\frac{s^2-1}{3}\right)^{1/2} \qquad (2)$$

удовлетворяют резонансным соотношениям

$$\Omega_s=s-2n+1,\ n=0,1,\ \dots,\ [\frac{s}{2}],\ \forall s=0,1,\dots,S, \qquad (3)$$

$$\Omega_s^2=(s+1)(s-1)/3,\ \forall s=0,1,\dots,S, \qquad (4)$$

а дифференцируемая функция своих аргументов $h(x,\dot{x})$ – соотношению

$$\frac{\partial}{\partial a}\{a^{-1}\underset{t}{M}[h(a\cos\phi,-a\omega\sin\phi)\cos\phi]\}=0. \qquad (5)$$

Тогда соответствующее усредненное уравнение Колмогорова-Фоккера-Планка обладает свойством потенциальности и его точное решение может быть получено по формуле

$$W(a,\theta)=C\exp\{\int\{-\frac{16\omega}{\sigma^2a^2}\underset{t}{M}[h(a\cos\phi,-a\omega\sin\phi)\sin\phi]-$$
$$-\frac{16\omega}{\sigma^2}\sum_{s=0}^{S}P_s\frac{a^{s-2}}{2^{s+1}}[\binom{s}{n}-\binom{s}{n-1}]\sin(\left(\frac{s^2-1}{3}\right)^{1/2}\theta)+\frac{1}{a}\}da+ \qquad (6)$$
$$+\{-\frac{16\omega}{3\sigma^2a}\underset{t}{M}[h(a\cos\phi,-a\omega\sin\phi)\cos\phi]-\frac{16\omega}{3\sigma^2}\sum_{s=0}^{S}P_s\frac{a^{s-1}}{2^{s+1}}\binom{s+1}{n}\cos(\left(\frac{s^2-1}{3}\right)^{1/2}\theta)\}d\theta\},$$

где $n=\frac{1}{2}\left[s+1-\left(\frac{s^2-1}{3}\right)^{1/2}\right]$.

В качестве конкретного примера рассмотрим систему Ван-дер-Поля, находящуюся под воздействием параметрического гармонического воздействия в главной резонансной области и случайных возмущений частоты автоколебаний, математической моделью которого служит следующее стохастическое дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x}+\omega^2x=\varepsilon(\alpha-\beta x^2)\dot{x}-\varepsilon\Delta x+\varepsilon Px^2\cos\omega t+\sqrt{\varepsilon}\sigma x\dot{\xi}(t)\,, \qquad (7)$$

где

$$\varepsilon\Delta=\omega_0^2-\omega^2\,, \qquad (8)$$

ω_0 – собственная частота порождающей системы (при ε=0); ω – частота гармонического воздействия; Δ – некоторая постоянная.

Данная система удовлетворяет условиям (2)-(5) и, следовательно, *W(a,θ)* может быть непосредственно определена по формуле (6)

$$W(a,\theta)=Ca^{\frac{\sigma^2+8\alpha\omega^2}{\sigma^2}}\cdot\exp\{-\frac{\beta\omega^2}{\sigma^2}a^2-\frac{2\omega P}{\sigma^2}a\sin\theta+\frac{8\omega\Delta}{3\sigma^2}\theta\}\,. \qquad (9)$$

Для периодичности по θ необходимо рассматривать только нулевую расстройку Δ=0.

Аналогичный результат был получен в [1, 2] с помощью метода разложения *W(a,θ)* по квазициклической координате, применение которого требует крайне трудоемких математических выкладок и зачастую приводит к представлению *W(a,θ)* в виде бесконечного ряда разложения по степеням амплитуды *a*. Следует также отметить, что для систем, не удовлетворяющих условиям (2)-(5), на основе метода, предложенного в [1, 2], авторам этих работ не удалось получить представления *W(a,θ)* в виде конечного ряда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Митропольский Ю. А., Нгуен Ван Дао, Нгуен Донг Ань. Нелинейные колебания в системах произвольного порядка. Киев: Наукова думка, 1992. 344 с.

2. Нгуен Донг Ань. Взаимное влияние различных типов случайных и периодических возбуждений на колебательные нелинейные системы. Автореф. дисс. доктора физ.-мат. наук. Киев, 1986. 32 с.