УДК 535.337.01

ЛИНЕЙНАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ ТРЕХУРОВНЕВОЙ СИСТЕМЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В ПОЛЕ СИЛЬНОГО НЕМОНОХРОМАТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

С. Г. Пржибельский

Исследована линейная восприимчивость трехуровневой системы в окрестности резонанса перехода 1—2 (1 — основное состояние) в присутствии сильного немонохроматического поля, вызывающего переходы в смежном канале 2—3. Немонохроматическое поле считается комплексным гауссовым шумом со средней частотой спектра, равной частоте перехода 2—3. Получены формы линий поглощения в предельных случаях узких и широких спектров шума. Показано, что интенсивные шумы с узким спектром вызывают штарковское расщепление линии поглощения.

1. В работах [1-3] рассмотрена форма линии поглощения слабого сигнала в одном из каналов трехуровневой системы в присутствии сильного шумового излучения, действующего на смежный канал. Исследование формы линии в таких условиях позволяет проявить статистику шумового излучения. В указанных работах рассматривались случаи, когда шумовой сигнал был результатом модуляции монохроматического сигнала, либо шумом, имеющим гауссов характер [1, 2], либо случайным разрывным марковским процессом [3]. Результаты работ [1-3] показывают, что форма линии поглощения заметно зависит от способа модуляции и характера шума.

Реальный источник шумового излучения имеет спектральную структуру с произвольной статистической связью между гармониками, что не позволяет в общем случае свести такой сигнал ни к одному из типов ранее рассмотренных шумов.

В настоящей работе исследован случай, когда фазы гармоник шумового поля статистически независимы и распределены случайным образом.

2. Как и в предыдущей работе [1, 2], мы рассмотрим трехуровневую систему с нумерацией термов в порядке возрастания энергии. Спектр шумового поля E предполагается симметричным со средней частотой ω_2, равной частоте ω_{32} перехода между возбужденными состояниями 2—3. Слабый проверяющий сигнал $\mathbf{E}_1$ с частотой ω_1 действует в канале 1—2. Изменением заселенности основного состояния и релаксацией возбужденных состояний пренебрегаем.[1] Восприимчивость в канале 1—2 определяется недиагональным матричным элементом матрицы плотности f_{12}.

В представлении взаимодействия и в приближении вращающегося поля уравнения для недиагональных элементов f_{12} и f_{13} матрицы плотности имеют вид [1]

$$\left.\begin{aligned} \dot{f}_{12} &= A f_{13} + iF \exp i\varepsilon t, \\ \dot{f}_{13} &= A^* f_{12}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

[1] Влияние релаксации на форму линии можно учесть в случае равенства скоростей релаксаций 2-го и 3-го состояний $\gamma_{12} = \gamma_{13}$. Это влияние пренебрежимо мало, если уширение, создаваемое шумовым сигналом, значительно превосходит $\gamma_{12} (= \gamma_{13})$.

где $A=\mathbf{d}_{32}\mathbf{E}/2\hbar$, $F=\mathbf{d}_{12}\mathbf{E}_1/2\hbar$ — амплитуды вероятностей переходов, а $\mathbf{d}_{32}$ и $\mathbf{d}_{12}$ — дипольные моменты в каналах 3—2 и 1—2 соответственно, $\varepsilon=\omega_1-\omega_{21}$.

Представим величины A и A^* в виде

$$\left.\begin{aligned} A(t) &= \sum_{\omega} a_{\omega} \exp(-i\omega t - i\varphi_{\omega}), \\ A^*(t) &= \sum_{\omega} a_{\omega} \exp(i\omega t + i\varphi_{\omega}). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Здесь частота мод ω измерена относительно средней частоты $\omega_2=\omega_{32}$, а спектр сигнала симметричен: $a_{\omega}=a_{-\omega}$ (амплитуды вещественны, так как фазы мод выписаны явно). Амплитуды могут быть заданы как регулярным, так и случайным образом. Все фазы φ_{ω} статистически независимы и равномерно распределены в интервале $(-\pi, \pi)$ так, что

$$\langle \exp i\varphi_{\omega} \exp(-i\varphi_{\omega'})\rangle = \delta_{\omega\omega'}, \tag{3}$$

где знак $\langle\ \rangle$ обозначает усреднение по фазе с весом 1

$$\langle \dots \rangle = 1/(2\pi)^N \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int (\dots)\, d\varphi_{\omega_1} \dots d\varphi_{\omega_N}. \tag{3а}$$

Отметим некоторые статистические свойства комплексного гауссова шума (2), непосредственно следующие из (3) и (3а)

$$\langle A_1A_2\rangle = \langle A_1^*A_2^*\rangle = \langle A_1\rangle = \langle A_1^*\rangle = 0, \tag{4}$$

$$\langle A_1A_2^*\rangle = \langle A_1^*A_2\rangle = K(t_1-t_2) = \sum_{\omega} a_{\omega}^2 \exp i\omega (t_1-t_2) = K_{12}. \tag{5}$$

Здесь A_j обозначает $A(t_j)$; первое равенство в (5) есть следствие симметрии спектра

$$\langle A_1A_2^* \dots A_{2n-1}A_{2n}^*\rangle = \sum_{(i,\,j\dots l)} K_{1i}K_{3j}\dots K_{2n-1,\,l}, \tag{6}$$

где сумма взята по всем перестановкам четных чисел 2,4,.. $2n$. Кроме перечисленных свойств шума, мы будем считать, что гармоники, формирующие линию, образуют настолько плотный спектр, что суммирование по ω в (5) можно заменить интегрированием. Тогда a следует понимать как непрерывную функцию ω, полученную аналитическим продолжением с дискретного множества частот.

Пусть функция корреляции $K(t)$, определенная спектром (5), имеет характерное время убывания τ_c

$$\tau_c = 1/K_0 \int_0^{\infty} K(t)\, dt,$$

здесь $K_0=K(0)$. Тогда спектры шумового поля, удовлетворяющие соотношению $K_0\tau_c^2 \ll 1$, мы будем называть широкими. Спектры, удовлетворяющие обратному неравенству, — узкими.

4. Запишем систему (1) в виде

$$\dot f = i\hat A f + iF, \tag{7}$$

где

$$f=\begin{pmatrix} f_{12} \\ f_{13}\end{pmatrix}, \quad \hat A=\begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & 0\end{pmatrix}, \quad F=\begin{pmatrix} F\exp i\varepsilon t \\ 0\end{pmatrix}.$$

Решение системы (7) при адиабатическом условии включения $f(-\infty)=0$ представим в виде

$$f(t) = i\int_{-\infty}^{t} T\exp\left\{ i\int_{t'}^{t} \hat A(t_1)\, dt_1\right\} F(t')\, dt', \tag{8}$$

где T — хронологизующий оператор Дайсона.

Усредненное по ансамблю фаз решение (8) имеет вид

$$\langle f(t)\rangle = i\int\limits_0^\infty d\tau\,\langle \hat{S}(\tau)\rangle F(t-\tau),$$

здесь $\langle \hat{S}(\tau)\rangle = \left\langle T \exp i\int\limits_0^\tau dt_1 \hat{A}(t_1)\right\rangle.$

Легко проверить, что

$$\langle \hat{S}(t)\rangle = I\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n/(2n)!\int\limits_0^t\ldots\int\limits_0^t d_1\ldots d_{2n} T\langle A_1A_2^*\ldots A_{2n-1}A_{2n}^*\rangle \equiv IG(t), \qquad (10)$$

здесь

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad d_j\equiv dt_j.$$

Из выражений (7), (9) и (10) следует

$$\langle f_{12}(t)\rangle = iF(\exp i\varepsilon t)\int\limits_0^\infty d\tau \exp(-i\varepsilon\tau)\,G(\tau)\equiv F(\exp i\varepsilon t)\,\chi(\varepsilon). \qquad (11)$$

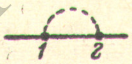
Учитывая (6), перепишем $G(t)$ в ином виде, именно

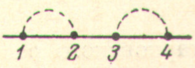
$$G(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int\limits_0^t\int\limits_0^{t_1}\ldots\int\limits_0^{t_{2n-1}} d_1\ldots d_{2n}\langle A_1A_2^*\ldots A_{2n-1}A_{2n}^*\rangle=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int\limits_0^t\int\limits_0^{t_1}\ldots\int\limits_0^{t_{2n-1}} d_1\ldots d_{2n}\sum_{(i,\,j\,\ldots\, l)}K_{1i}K_{3j}\ldots K_{2n-1,\,l}. \qquad (12)$$

5. Для анализа выражения (12) мы применим диаграммную технику, аналогичную диаграммной технике Фейнмана. Так как применение диаграммной техники в задачах со случайными процессами достаточно широко используется [4], то мы ограничимся лишь сопоставлением некоторых диаграмм членам разложения (12)

$$1 = \text{———},$$

а) $1\left[i^2\int\limits_0^t\int\limits_0^{t_1}K_{12}dt_1dt_2\right]1 =$  ,

б) $1\left[i^4\int\limits_0^t\int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{t_2}\int\limits_0^{t_3}K_{12}K_{34}d_1d_2d_3d_4\right]1 =$  , (13)

в) $1\left[i^4\int^t\int^{t_1}\int^{t_2}\int^{t_3}K_{14}K_{23}d_1d_2d_3d_4\right]1 =$  .

Мы исследуем ряд (12) в двух предельных случаях узких и широких спектров.

6. Вначале рассмотрим случай широких спектров

$$K_0\tau_c^2 \ll 1. \qquad (14)$$

Для этого отметим вклады в (12) различных диаграмм одинакового порядка для $t\gg\tau_c$. Для диаграмм второго порядка (13) несвязная диаграмма б) имеет порядок $t^2\tau_c^2K_0^2$, в то время как связная диаграмма в) имеет порядок $t\tau_c^3K_0^2$ и вносит вклад в (12) в τ_c/t раз меньший б). Анализ высших порядков показывает, что каждая связь вносит малость τ_c/t. Поэтому мы суммируем лишь главную подпоследовательность несвязных диаграмм, что приводит к уравнению Дайсена вида

$$G(t)=1-\int_0^t\int_0^{t_1} d_1 d_2 K_{12} G(t_2). \tag{15}$$

Учитывая быстрое изменение $K(t)$ на интервалах $\sim\tau_c/K_0\tau_c^2$, запишем решение уравнения (15) с точностью до малых членов $O(K_0\tau_c^2)$ в виде

$$G_w(t)=\exp(-K_0\tau_c t). \tag{16}$$

Индекс w обозначает, что $G_w(t)$ совпадает с $G(t)$ в области $t\gg\tau_c$.

Найденное выражение для $G(t)$ справедливо лишь для $t\gg\tau_c$, что не мешает, однако, вычислить восприимчивость (11) с достаточной точностью.

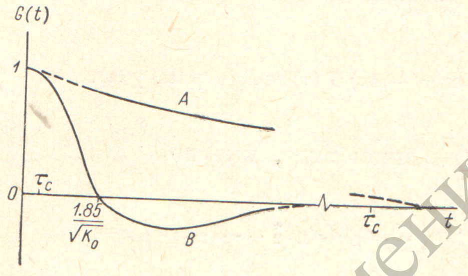


Рис. 1.

A — широкий спектр $K_0\tau_c^2\ll 1$. Сплошной линией показана $G(t)=\exp-K_0\tau_c t$. B — узкий спектр $K_0\tau_c^2\gg 1$. Сплошной линией показана $G(t)=1-\sqrt{K_0}\,tF\,(\sqrt{K_0t}/2)$. Верхняя шкала времени относится к случаю A, нижняя к B.

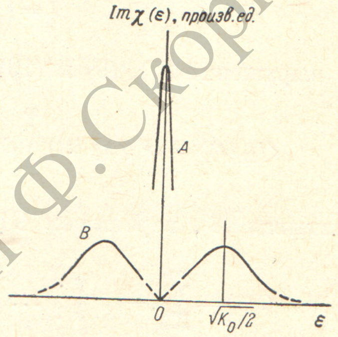


Рис. 2. Форма линии поглощения в канале 1—2 (схематически).

A — широкий спектр, B — узкий интенсивный спектр. Штрихами обозначена область большой относительной ошибки.

Дело в том, что при выполнении неравенства $K_0\tau_c^2\ll 1$ экспонента $\exp(-K_0\tau_c t)$ медленно меняется на масштабах τ_c (рис. 1), и область малых времен вносит малый вклад в интеграл (11). Таким образом, из (11) и (16) следует

$$\chi(\varepsilon)=1/(\varepsilon-iK_0\tau_c). \tag{17}$$

Линия поглощения имеет лоренцеву форму

$$\mathrm{Im}\,\chi(\varepsilon)=K_0\tau_c/(\varepsilon^2+K_0^2\tau_c^2) \tag{18}$$

и не проявляет штарковского расщепления.

7. Изучим поведение $G(t)$ в случае узких спектров $(K_0\tau_c^2\gg 1)$. Для этого рассмотрим малые времена $t\ll\tau_c$ в выражении (12). В этом случае K_{jl} не успевает заметно измениться за время t, поэтому все диаграммы одинакового порядка вносят одинаковый вклад $(-1)^n K_0^n t^{2n}/(2n)!$. Таким образом,

$$G_s(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n K_0^n n!\,t^{2n}/(2n)!=\int_0^{\infty}dx\exp(-x)\cos\sqrt{K_0x}\,t. \tag{19}$$

Индекс s показывает, что G_s совпадает с $G(t)$ в области $t\ll\tau_c$. $G_s(t)$ может быть выражена через специальную функцию $F(z)$ [5], именно

$$G_s(t)=1-\sqrt{K_0}\,tF(\sqrt{K_0}t/2). \tag{20}$$

Поведение $G_s(t)$ показано на рис. 1.

Несмотря на то что мы знаем поведение $G(t)$ лишь для $t \ll \tau_c$, можно вычислить восприимчивость (11), указав при этом ошибку, связанную с незнанием поведения $G(t)$ при $t \gg 1/\sqrt{K_0}$.[2]

Оценим ошибку, считая условие $K_0\tau_c^2 \gg 1$ выполненным. В виду того что $G(t)$ должна иметь затухающий характер, вклад в интеграл (11) от области $t \gg 1/\sqrt{K_0}$ не превосходит величины $\int\limits_\theta^\infty dt\,|G_s(t)|\,|\exp(-i\varepsilon t)|$, где $1/\sqrt{K_0} \ll \theta \ll \tau_c$; например, $\theta = (\tau_c/\sqrt{K_0})^{1/2}$. $G_s(t)$ при $t \gg 1/\sqrt{K_0}$ ведет себя как $-2/K_0 t^2$. Следовательно, ошибка не превосходит величины $(2/\sqrt{K_0})\,1/\sqrt{\sqrt{K_0}\,\tau_c}$.

Вычислим восприимчивость, подставляя вместо $G_s(t)$ в (11) значение $G_s(t)$ из (19). Меняя порядок интегрирования, мы приходим к выражению

$$\chi(\varepsilon) = \underset{\delta\to 0}{(\varepsilon/K_0)} \int\limits_0^\infty dx \exp(-x)\,(\varepsilon^2 - i\delta \operatorname{sign} \varepsilon - x)^{-1}. \tag{21}$$

Форма линии поглощения имеет вид

$$\operatorname{Im} \chi(\varepsilon) = (\pi\,|\,\varepsilon\,|/K_0) \exp(-\varepsilon^2/K_0) \tag{22}$$

и изображена на рис. 2.

Относительная ошибка $\left(2/\sqrt{K_0\sqrt{K_0}\tau_c}\right)(K_0/\pi\,|\,\varepsilon\,|) \exp(\varepsilon^2/K_0)$ велика в области низких и высоких частот и мала в области резонансов при выполнении условия $\sqrt{K_0}\,\tau_c \gg 1$. Следовательно, наличие расщепления в условиях $\sqrt{K_0}\,\tau_c \gg 1$ установлено.

По мере уменьшения K_0 расщепление уменьшается, одновременно с этим уменьшается достоверная область. При $\sqrt{K_0}\,\tau_c \sim 1$ вся область частот становится недостоверной и ничего нельзя сказать о расщеплении. Имея в виду другой предельный случай $K_0\tau_c^2 \ll 1$, не обнаруживающий расщепления, можно полагать, что с изменением параметра $\sqrt{K_0}\,\tau_c$ от больших значений к малым расщепленные пики сближаются и одновременно «затекает» провал, в пределе исчезая совсем.

Интересно выяснить вопрос о влиянии характера шума на форму линии поглощения. Сравнивая результаты работ [1-3] с полученными здесь, можно утверждать, что характер шумов с широким спектром слабо сказывается на форме линии, в то время как статистика интенсивных шумов с узким спектром оказывает влияние на форму линии поглощения. Так, например, вещественный гауссов шум с $\langle A \rangle = 0$ вообще не проявляет расщепления [1]. Из всех типов модуляций, разобранных в [3], к форме линии подобной описанной приводит лишь амплитудно-фазовый тип. По-видимому, в последнем случае информацию о характере шума дают более тонкие детали формы линии, нежели ширина и расщепление.

В заключение автор выражает глубокую благодарность В. А. Ходовому и В. В. Хромову за поддержку и внимание к работе и В. И. Перелю за критические замечания.

Литература

[1] С. Г. Пржибельский, В. А. Ходовой. Опт. и спектр., *32*, 237, 1972.
[2] С. Г. Пржибельский, В. А. Ходовой. Докл. на II Вавиловской конференции по нелинейной оптике. Новосибирск, июнь 1971.
[3] Л. Д. Зусман, А. И. Бурштейн. ЖЭТФ, *61*, 976, 1971.
[4] В. И. Татарский. Распространение волн в турбулентной атмосфере. Изд. «Наука», М., 1967.
[5] Н. Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения. ГИТТЛ, М., 1953.

Поступило в Редакцию 9 февраля 1972 г.

[2] Поведение $G(t)$ при $t \gg \tau_c$ описывает уравнение (15).