Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (90), 2015

Математика

УДК 517.925

Нелинейные дифференциальные системы, эквивалентные в смысле совпадения отражающих функций вложимым системам

М.С. Белокурский

Получены достаточные условия, при которых нелинейные неавтономные дифференциальные системы эквивалентны в смысле Мироненко вложимым системам. Указан оператор сдвига на любом отрезке $[-\omega;\omega]$ для таких систем.

Ключевые слова: отражающая функция, эквивалентность, вложимая система.

Sufficient conditions for equivalence of nonlinear nonautonomous differential systems for embeddable systems in sense of Mironenko were obtained. The shift operator on $[-\omega;\omega]$ along the solutions for such systems is given.

Keywords: reflecting function, equivalence, embeddable system.

Рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x} = X(t,x),\ t \in R,\ x^T = (x_1,\dots,x_m) \in R^n, \tag{1}$$

с непрерывно дифференцируемой правой частью. Отражающей функцией [1] системы (1) называется функция, определяемая формулой $F(t,x) = \varphi(-t;t,x)$, где $\varphi(t;\tau,x)$ есть общее решение системы (1) в форме Коши. Для любого решения $x(t)$ этой системы верно тождество $F(t,x(t)) \overset{t}{\equiv} x(-t)$.

Это свойство можно принять за определение отражающей функции [2, с. 16]. Несмотря на то, что отражающая функция определяется через решения системы, разработаны методы, которые позволяют находить отражающую функцию, не используя определение. Зная лишь некоторые свойства (например, периодичность) отражающей функции можно исследовать поведение решений самой системы, не прибегая к построению отражающей функции. Больше о методе отражающей функции и его применении можно найти в [2]–[7]. Для беглого ознакомления с теорией отражающей функции можно воспользоваться сайтом www.reflecting-function.narod.ru.

Простейшим квазимногочленом называется комплекснозначная функция переменного t вида $t^k e^{\nu t}$, где $k \in N_0, \nu \in \mathbb{C}$. Всякая линейная комбинация простейших квазимногочленов с комплексными коэффициентами называется квазимногочленом. Компонента x_i системы (1) называется вложимой [8, с. 47], если для любого решения $x(t) = (x_1(t),\dots,x_m(t))$ этой системы функция $x_i(t)$ является квазимногочленом (говоря о решениях системы, мы имеем в виду, что они действительны). Компонента x_i системы (1) вложима тогда и только тогда, когда для каждого решения $x(t)$ этой системы существует линейное стационарное уравнение вида $a_n z^{(n)} + a_{n-1} z^{(n-1)} + \dots + a_0 z = 0$, для которого $x_i(t)$ является решением. Когда компонента $x_i(t)$ любого решения $x(t)$ системы (1) является одновременно и решением некоторого общего для всех решений $x(t)$ линейного стационарного уравнения, то эта компонента называется сильно вложимой. Дифференциальная система называется вложимой (сильно вложимой), если любая ее компонента вложима (сильно вложима).

Как вложимые, так и сильно вложимые системы, как правило, являются существенно нелинейными системами. В частности, как показано в [8], они могут иметь несколько положений равновесия, предельные циклы и иметь другие качественные свойства, присущие только нелинейным системам.

С другой стороны, эти системы интегрируются в элементарных функциях. Таким образом, мы можем найти отражающую функцию вложимой системы и, значит, можем построить целый класс дифференциальных систем с такой же отражающей функцией [3, с. 71]:

$$\dot{x} = -0.5F_x(-t,F)F_t + F_x(-t,F)R(t,x) - R(-t,F),$$

где $R(t,x)$ есть произвольная вектор-функция. Дифференциальные системы из этого класса не обязаны быть вложимыми и интегрируемыми в квадратурах, однако они будут иметь те же качественные свойства, что и эквивалентная им вложимая система.

В статье [9] из всех дифференциальных систем с кубической правой частью были найдены те, которые эквивалентны в смысле совпадения отражающих функций вложимым автономным системам заданного вида. В данной статье исследуется вопрос отыскания нелинейных неавтономных систем, эквивалентных (в смысле совпадения отражающих функций) вложимым автономным системам.

Теорема 1. *Пусть для дифференциальной системы*

$$\dot{x} = a(t)x + x^2ym(t,xy), \quad \dot{y} = c(t)y - xy^2m(t,xy), \tag{2}$$

с непрерывно дифференцируемой по t *правой частью выполнены условия:*

1) функции $a(t)$ *и* $c(t)$ *– нечетные;*

2) справедливо соотношение $m(t,xy) + m(-t,xy) = 2 + 2t(a(t) + c(t))$.

Тогда дифференциальная система (2) эквивалентна вложимой автономной системе

$$\dot{x} = x^2y, \quad \dot{y} = -xy^2. \tag{3}$$

При этом оператор сдвига [10, с. 12] *вдоль решений системы (2) на отрезке* $[-\omega;\omega]$ *задается формулой:*

$$T:(x;y) \mapsto (xe^{2\omega xy}; ye^{-2\omega xy}), \tag{4}$$

Доказательство. Согласно [9] вложимая автономная система (3) имеет отражающую функцию

$$F(t,x,y) = (xe^{-2txy},\ ye^{2txy})^T, \tag{5}$$

Если мы докажем, что дифференциальная система (2) имеет отражающую функцию (5), то теорема будет доказана. Чтобы доказать это, достаточно проверить выполнение основного соотношения [3, с. 63] $F_t(t,x) + F_x(t,x)X(t,x) + X(-t,F(t,x)) \overset{t,x}{\equiv} 0$ для отражающей функции дифференциальной системы (2).

Сначала проверим выполнение первого тождества основного соотношения:

$$-2x^2ye^{-2txy} + (e^{-2txy} - 2txye^{-2txy})(a(t)x + x^2ym(t,xy)) - 2tx^2e^{-2txy}(c(t)y - xy^2m(t,xy)) + a(-t)xe^{-2txy} +$$
$$+x^2ye^{-2txy}m(-t,xy) = e^{-2txy}(-2x^2y + a(t)x + x^2ym(t,xy) - 2tx^2ya(t) - 2tx^3y^2m(t,xy) - 2tx^2yc(t) +$$
$$2tx^3y^2m(t,xy) - a(t)x + x^2ym(-t,xy)) = e^{-2txy}x^2y(m(t,xy) + m(-t,xy) - (2 + 2ta(t) + 2tc(t))) \equiv 0.$$

Теперь проверяем второе тождество:

$$2xy^2e^{2txy} + 2ty^2e^{2txy}(a(t)x + x^2ym(t,xy)) + (e^{2txy} + 2txye^{2txy})(c(t)y - xy^2m(t,xy)) + c(-t)ye^{2txy} -$$
$$-xy^2e^{-2txy}m(-t,xy) = e^{-2txy}(2xy^2 + 2txy^2a(t) + 2tx^2y^3m(t,xy) + c(t)y + 2txy^2c(t) - xy^2m(t,xy) -$$
$$-2tx^2y^3m(t,xy) - c(t)y - xy^2m(-t,xy)) = e^{2txy}xy^2(2 + 2ta(t) + 2tc(t) - (m(t,xy) + m(-t,xy))) = 0.$$

Таким образом, основное соотношение для отражающей функции дифференциальной системы (2) выполняется.

По определению оператор сдвига вдоль решений системы (2) на отрезке $[-\omega;\omega]$ задается формулой $T:(x;y) \mapsto (\varphi_1(\omega;-\omega,x,y);\varphi_2(\omega;-\omega,x,y))$, где $(\varphi_1(t;t_0,x_0,y_0),\varphi_2(t;t_0,x_0,y_0))^T$ есть общее решение системы (2) в форме Коши. Но из определения отражающей функции следует, что $F(-\omega,x,y) = (\varphi_1(\omega;-\omega,x,y),\varphi_2(\omega;-\omega,x,y))^T$. Тогда оператор сдвига вдоль решений системы (2) на отрезке $[-\omega;\omega]$ задается формулой (4). Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть для дифференциальной системы*

$$\dot{x} = a(t)x + x\sum_{k=1}^{n} b_k(t)(xy)^k, \quad \dot{y} = c(t)y - y\sum_{k=1}^{n} b_k(t)(xy)^k, \tag{6}$$

с непрерывно дифференцируемой по t *правой частью выполнены условия:*

1) функции $a(t)$, $c(t)$ *и* $b_k(t)$ $(k = 2,3,...,n)$ *– нечетные;*

2) справедливо соотношение $b_1(t) + b_1(-t) = 2 + 2t(a(t) + c(t))$.

Тогда дифференциальная система (6) эквивалентна вложимой автономной системе (3).

При этом оператор сдвига вдоль решений системы (6) на отрезке $[-\omega;\omega]$ *задается формулой (4).*

Доказательство. Из [9] следует, что система (3) имеет отражающую функцию (5). Покажем, что функция (5) является отражающей функцией и системы (6). С этой целью воспользуемся методом математической индукции. Если $k = 1$, то доказываемая теорема совпадает с теоремой 1 из [9]. Предположим, что наша теорема верна при $k = 1,2,...,n-1$. Покажем, что в таком случае теорема будет справедлива и для $k = n$. Для этого проверим выполнение основного соотношения для отражающей функции дифференциальной системы (6).

Первое тождество имеет вид:

$$-2x^2ye^{-2txy} + (e^{-2txy} - 2txye^{-2txy})(a(t)x + x\sum_{k=1}^{n} b_k(t)(xy)^k) - 2tx^2e^{-2txy}(c(t)y - y\sum_{k=1}^{n} b_k(t)(xy)^k) +$$

$$+(a(-t)xe^{-2txy} + xe^{-2txy}\sum_{k=1}^{n} b_k(-t)(xy)^k) \equiv 0.$$

Вычтем из последнего тождества аналогичное тождество для системы (6) при $k = 1,2,\ldots,n-1$. Имеем:

$$(e^{-2txy} - 2txye^{-2txy})b_n(t)x(xy)^n + 2tx^2e^{-2txy}b_n(t)y(xy)^n + b_n(-t)xe^{-2txy}(xy)^n = (xy)^n e^{-2txy}(b_n(t)(x -$$

$$-2tx^2y + 2tx^2y) + b_n(-t)x) = (xy)^n e^{-2txy}x(b_n(t) + b_n(-t)) \equiv 0.$$

Из второго тождества основного соотношения для отражающей функции системы (6)

$$2xy^2e^{2txy} + 2ty^2e^{2txy}(a(t)x + x\sum_{k=1}^{n} b_k(t)(xy)^n) + (e^{2txy} + 2txye^{2txy})(c(t)y - y\sum_{k=1}^{n} b_k(t)(xy)^n) +$$

$$+(c(-t)ye^{2txy} - ye^{2txy}\sum_{k=1}^{n} b_k(-t)(xy)^n) = 0.$$

вычтем аналогичное тождество для системы (6) при $k = 1,2,\ldots,n-1$. Имеем:

$$2ty^2e^{2txy}b_n(t)x(xy)^n - (e^{2txy} + 2txye^{2txy})b_n(t)y(xy)^n - b_n(-t)ye^{2txy}(xy)^n = (xy)^n e^{2txy}(b_n(t)(2txy^2 - y -$$

$$-2txy^2) - b_n(-t)y) = -(xy)^n e^{2txy}y(b_n(t) + b_n(-t)) \equiv 0.$$

Так как основное соотношение для отражающей функции системы (6) выполняется, то функция (5) является отражающей функцией системы (6). Поэтому системы (6) и (3) эквивалентны.

Поскольку отражающие функции систем (2) и (6) совпадают, то совпадают и операторы сдвига вдоль решений этих систем. Поэтому оператор сдвига вдоль решений системы (6) на отрезке $[-\omega;\omega]$ задается формулой (4). Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть для дифференциальной системы*

$$\dot{x} = a(t)x + c(t)y + y(x^2 + y^2)m(t,xy), \quad \dot{y} = a(t)y - c(t)x - x(x^2 + y^2)m(t,xy), \tag{7}$$

с непрерывно дифференцируемой по t *правой частью выполнены условия:*

1) функции $a(t)$ *и* $c(t)$ *– нечетные;*

2) справедливо соотношение $m(t,xy) + m(-t,xy) = 2 + 4ta(t)$.

Тогда дифференциальная система (6) эквивалентна вложимой автономной системе

$$\dot{x} = y(x^2 + y^2), \quad \dot{y} = -x(x^2 + y^2), \tag{8}$$

При этом оператор сдвига вдоль решений системы (7) на отрезке $[-\omega;\omega]$ *задается формулой*

$$T:(x,y) \mapsto (x\cos 2\omega(x^2 + y^2) + y\sin 2\omega(x^2 + y^2), -x\sin 2\omega(x^2 + y^2) + y\cos 2\omega(x^2 + y^2)), \tag{9}$$

Доказательство. Согласно [9] дифференциальная система (8) имеет отражающую функцию

$$F(t,x,y)=(x\cos 2(x^2+y^2)t-y\sin 2(x^2+y^2)t,\ x\sin 2(x^2+y^2)t+y\cos 2(x^2+y^2)t)^T, \quad (10)$$

Если мы покажем, что дифференциальная система (7) имеет отражающую функцию (10), то теорема будет доказана. Чтобы доказать этот факт, достаточно проверить выполнение основного соотношения для отражающей функции дифференциальной системы (7).

Сначала проверим выполнение первого тождества основного соотношения:

$$-2x(x^2+y^2)\sin 2(x^2+y^2)t-2y(x^2+y^2)\cos 2(x^2+y^2)t+(\cos 2(x^2+y^2)t-4tx^2\sin 2(x^2+y^2)t-$$
$$-4txy\cos 2(x^2+y^2)t)(a(t)x+c(t)y+y(x^2+y^2)m(t,xy))+(-\sin 2(x^2+y^2)t-4txy\sin 2(x^2+y^2)t-$$
$$-4ty^2\cos 2(x^2+y^2)t)(a(t)y+c(t)x-x(x^2+y^2)m(t,xy))+a(-t)(x\cos 2(x^2+y^2)t-$$
$$-y\sin 2(x^2+y^2)t)+c(-t)(x\sin 2(x^2+y^2)t+y\cos 2(x^2+y^2)t)+(x^2+$$
$$+y^2)m(-t,xy)(x\sin 2(x^2+y^2)t+y\cos 2(x^2+y^2)t)=-2x(x^2+y^2)\sin 2(x^2+y^2)t-2y(x^2+$$
$$+y^2)\cos 2(x^2+y^2)t+xa(t)\cos 2(x^2+y^2)t+yc(t)\cos 2(x^2+y^2)t+y(x^2+$$
$$+y^2)m(t,xy)\cos 2(x^2+y^2)t-4tx^3a(t)\sin 2(x^2+y^2)t-4tx^2yc(t)\sin 2(x^2+y^2)t-4tx^2y(x^2+$$
$$+y^2)m(t,xy)\sin 2(x^2+y^2)t-4tx^2ya(t)\cos 2(x^2+y^2)t-4txy^2c(t)\cos 2(x^2+y^2)t-4txy^2(x^2+$$
$$+y^2)m(t,xy)\cos 2(x^2+y^2)t-ya(t)\sin 2(x^2+y^2)t+xc(t)\sin 2(x^2+y^2)t+x(x^2+$$
$$+y^2)m(t,xy)\sin 2(x^2+y^2)t-4txy^2a(t)\sin 2(x^2+y^2)t+4tx^2yc(t)\sin 2(x^2+y^2)t+4tx^2y(x^2+$$
$$+y^2)m(t,xy)\sin 2(x^2+y^2)t-4ty^3a(t)\cos 2(x^2+y^2)t+4txy^2c(t)\cos 2(x^2+y^2)t+4txy^2(x^2+$$
$$+y^2)m(t,xy)\cos 2(x^2+y^2)t-xa(t)\cos 2(x^2+y^2)t+ya(t)\sin 2(x^2+y^2)t-xc(t)\sin 2(x^2+y^2)t-$$
$$-yc(t)\cos 2(x^2+y^2)t+m(-t,xy)(x^2+y^2)(x\sin 2(x^2+y^2)t+y\cos 2(x^2+y^2)t)=(m(t,xy)+$$
$$+m(-t,xy))(x^2+y^2)(x\sin 2(x^2+y^2)t+y\cos 2(x^2+y^2)t)-4tx(x^2+y^2)a(t)\sin 2(x^2+y^2)t-$$
$$-4ty(x^2+y^2)a(t)\cos 2(x^2+y^2)t-2(x^2+y^2)(x\sin 2(x^2+y^2)t+y\cos 2(x^2+y^2)t)=(m(t,xy)+$$
$$+m(-t,xy)-2-4ta(t))(x^2+y^2)(x\sin 2(x^2+y^2)t+y\cos 2(x^2+y^2)t)\equiv 0.$$

Теперь проверим второе равенство основного соотношения:

$$2x(x^2+y^2)\cos 2(x^2+y^2)t-2y(x^2+y^2)\sin 2(x^2+y^2)t+(\sin 2(x^2+y^2)t-4txy\sin 2(x^2+y^2)t+$$
$$+4tx^2\cos 2(x^2+y^2)t)(a(t)x+c(t)y+y(x^2+y^2)m(t,xy))+(\cos 2(x^2+y^2)t+4txy\cos 2(x^2+y^2)t-$$
$$-4ty^2\sin 2(x^2+y^2)t)(a(t)y-c(t)x-x(x^2+y^2)m(t,xy))+a(-t)(x\sin 2(x^2+y^2)t+$$
$$+y\cos 2(x^2+y^2)t)-c(-t)(x\cos 2(x^2+y^2)t-y\sin 2(x^2+y^2)t)-(x^2+$$
$$+y^2)m(-t,xy)(x\cos 2(x^2+y^2)t-y\sin 2(x^2+y^2)t)=2x(x^2+y^2)\cos 2(x^2+y^2)t-2y(x^2+$$
$$+y^2)\sin 2(x^2+y^2)t+a(t)x\sin 2(x^2+y^2)t-4ta(t)x^2y\sin 2(x^2+y^2)t+4ta(t)x^3\cos 2(x^2+y^2)t+$$
$$+c(t)y\sin 2(x^2+y^2)t-4tc(t)xy^2\sin 2(x^2+y^2)t+4tc(t)x^2y\cos 2(x^2+y^2)t+y(x^2+$$
$$+y^2)m(t,xy)\sin 2(x^2+y^2)t-4txy^2(x^2+y^2)m(t,xy)\sin 2(x^2+y^2)t+4tx^2y(x^2+$$
$$+y^2)m(t,xy)\cos 2(x^2+y^2)t+a(t)y\cos 2(x^2+y^2)t+4ta(t)xy^2\cos 2(x^2+y^2)t-$$
$$-4ta(t)y^3\sin 2(x^2+y^2)t-c(t)x\cos 2(x^2+y^2)t-4tc(t)x^2y\cos 2(x^2+y^2)t+$$
$$+4tc(t)xy^2\sin 2(x^2+y^2)t-x(x^2+y^2)m(t,xy)\cos 2(x^2+y^2)t-4tx^2y(x^2+$$
$$+y^2)m(t,xy)\cos 2(x^2+y^2)t+4txy^2(x^2+y^2)m(t,xy)\sin 2(x^2+y^2)t-a(t)x\sin 2(x^2+y^2)t-$$
$$-a(t)y\cos 2(x^2+y^2)t+c(t)x\cos 2(x^2+y^2)t-c(t)y\sin 2(x^2+y^2)t-(x^2+$$
$$+y^2)m(-t,xy)(x\cos 2(x^2+y^2)t-y\sin 2(x^2+y^2)t)=2(x^2+y^2)(x\cos 2(x^2+y^2)t-$$
$$-y\sin 2(x^2+y^2)t)+4ta(t)x^2(x\cos 2(x^2+y^2)t-y\sin 2(x^2+y^2)t)-(x^2+$$
$$+y^2)m(t,xy)(x\cos 2(x^2+y^2)t-y\sin 2(x^2+y^2)t)+4ta(t)y^2(x\cos 2(x^2+y^2)t-y\sin 2(x^2+y^2)t)-$$
$$-(x^2+y^2)m(-t,xy)(x\cos 2(x^2+y^2)t-y\sin 2(x^2+y^2)t)=(x^2+y^2)(x\cos 2(x^2+y^2)t-$$
$$-y\sin 2(x^2+y^2)t)(2+4ta(t)-(m(t,xy)+m(-t,xy)))=0.$$

Таким образом, основное соотношение для отражающей функции дифференциальной системы (7) выполняется.

По определению оператор сдвига вдоль решений системы (7) на отрезке $[-\omega;\omega]$ задается формулой $T:(x;y)\mapsto(\varphi_1(\omega;-\omega,x,y);\varphi_2(\omega;-\omega,x,y))$, где $(\varphi_1(t;t_0,x_0,y_0),\varphi_2(t;t_0,x_0,y_0))^T$ есть общее решение системы (7) в форме Коши. Но из определения отражающей функции следует, что $F(-\omega,x,y)=(\varphi_1(\omega;-\omega,x,y),\varphi_2(\omega;-\omega,x,y))^T$. Тогда оператор сдвига вдоль решений системы (7) на отрезке $[-\omega;\omega]$ задается формулой (9). Теорема доказана.

Литература

1. Мироненко, В.И. Об одном классе дифференциальных систем с элементарными решениями / В.И. Мироненко// Дифференциальные уравнения. – 1968. – Т. 4, № 6. – С. 1154–1156.
2. Мироненко, В.И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений / В.И. Мироненко. – Мн. : Университетское, 1986. – 76 с.
3. Мироненко, В.И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем / В.И. Мироненко. – Гомель : Мин. Образов. РБ, УО «ГГУ им. Ф. Скорины», 2004. – 196 с.
4. Мироненко, В.И. Возмущения систем, не изменяющие временных симметрий и отображения Пуанкаре / В.И. Мироненко, В.В. Мироненко // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44, № 10. – С. 1347–1352.
5. Musafirov, E.V. Reflecting function and periodic solutions of differential systems with small parameter / E.V. Musafirov // Indian Jornal of Mathematics. – 2008. – Vol. 50, № 1. – P. 63–76.
6. Mironenko, V.I. How to construct equivalent differential systems / V.I. Mironenko, V.V. Mironenko // Applied Mathematic Letters. – 2009. – Vol. 22. – P. 1356–1359.
7. Мироненко, В.И. Временные симметрии уравнения Риккати / В.И. Мироненко // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 1 (2). – С. 31–33.
8. Мироненко, В.И. Линейная зависимость функций вдоль решений дифференциальных уравнений / В.И. Мироненко. – Мн. : Изд-во БГУ им. В.И. Ленина, 1981. – 104 с.
9. Белокурский, М.С. Кубические неавтономные дифференциальные системы, эквивалентные в смысле совпадения отражающих функций вложимым системам / М.С. Белокурский // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4 (9). – С. 75–78.
10. Красносельский, М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М.А. Красносельский. – М. : Наука, 1958. – 332 с.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 24.02.2015