Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (90), 2015

УДК 512.548

Исследование последовательностей параллелограммов *n*-арных групп

Д.И. Кирилюк

Исследуются 2k-угольники, образованные последовательностями параллелограммов n-арных групп. Установлена связь между различными параллелограммами n-арных групп на основе свойств векторных равенств.
Ключевые слова: n-арная группа, параллелограмм G, вектор G, полуабелевость

The 2k-gons formed by the sequences of parallelograms of n-ary groups are investigated. The connection between different parallelograms n-ary groups based on the properties of vector equations were obtained.
Keywords: n–ary group, parallelogram G, vector G, semiabelian.

Введение. Задачу нахождения различных приложений теории *n*-арных групп поставил на Всесоюзной алгебраической конференции (Свердловск, 1973 г.) А.И. Кострикин. Впервые приложения теории *n*–арных групп в аффинной геометрии были найдены С.А. Русаковым. Заметим, что отдельные элементы аффинной геометрии на тернарной (3-арной) группе ранее изучались Д. Вакареловым [1]. Приложения теории *n*–арных групп в аффинной геометрии получили дальнейшее развитие в работах [2]–[4].

В данной статье продолжены исследования в указанном направлении, а именно в теореме 1 исследуются *2k*-угольники *n*-арной группы, в теореме 2 устанавливаются связи между различными параллелограммами *n*-арной группы на основе свойств векторных равенств. Заметим, что в работе Ю.И. Кулаженко [3] рассмотрены *2k*–угольники *n*-арной группы, которые образованы последовательностями параллелограммов отличными от полученных в представляемой работе. Кроме того, из теоремы 1 при $k=6$ следует предложение из работы С.А. Русакова [2], которое, по его словам, выражает аффинную теорему Дезарга.

Предварительные понятия и результаты. Используемые определения и обозначения можно найти в [2]. Напомним некоторые из них.

Пусть G – *n*-арная группа.

Определение 1. *Четырехугольник* $<a,b,c,d>$ G *называется параллелограммом G, если* $[ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ c]=d$.

Определение 2. *Упорядоченная пара* $<a,b>$ *точек* $a,b\in G$ *называется направленным отрезком* G *и обозначается через* $\overline{ab}$.

Определение 3. *Пишут* $\overline{ab}=\overline{cd}$ *и говорят, что направленные отрезки* $\overline{ab}$ *и* $\overline{cd}$ G *равны, если четырехугольник* $<a,c,d,b>$ *является параллелограммом G.*

Пусть *V* – множество всех направленных отрезков *G*.

Это отношение «=» Разбивает множество *V* на классы эквивалентности [2].

Определение 4. *Если* $\overline{ab}\in V$, *то множество* $\{\overline{uv}\,|\,\overline{uv}\in V, \overline{uv}=\overline{ab}\}$ *называется вектором* G *и обозначается через* $\overrightarrow{ab}$ *или одной малой буквой латинского алфавита; например,* $\overrightarrow{ab}=\vec{p}$. *Через* $V(G)$ *обозначается множество всех векторов* G.

Определение 5. *Два вектора* $\vec{p}=\overrightarrow{ab}$ *и* $\vec{q}=\overrightarrow{cd}$ *из* $V(G)$ *называют равными и пишут* $\vec{p}=\vec{q}$, *если их представители* $\overline{ab}$ *и* $\overline{cd}$ *равны.*

Определение 6. *Пусть* G *– n-арная группа,* $\vec{p}$ *и* $\vec{q}\in V(G)$ *и* $a\in G$. *Если* $\overline{ab}$ *и* $\overline{bc}$ *такие векторы, что* $\vec{p}=\overrightarrow{ab}$ *и* $\vec{q}=\overrightarrow{bc}$, *то суммой векторов* $\vec{p}$ *и* $\vec{q}$ *называется вектор из* $V(G)$, *обозначаемый через* $\vec{p}+\vec{q}$ *и определяемый так:* $\vec{p}+\vec{q}=\overrightarrow{ac}$ *или* $\overrightarrow{ab}+\overrightarrow{bc}=\overrightarrow{ac}$.

Определение 7. *Пусть дан вектор* $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{ab}$. *Вектор* $\overrightarrow{ba}$ *называется вектором, противоположным вектору* p, *и обозначается через* $-\overrightarrow{p}$.

Определение 8. *Пусть* G *– n-арная группа. Последовательность* $e_1^{k(n-1)} \in G^{k(n-1)}$, *где* $k \geq 1$, *называется нейтральной k(n–1)-последовательностью G, если* $[e_1^{k(n-1)}u] = u = [ue_1^{k(n-1)}]$ *для любого элемента* $u \in G$.

Лемма 1 [4]. *Если четырехугольник* $< a,b,c,d >$ *полуабелевой n-арной группы G является параллелограммом G, то параллелограммами G являются и четырехугольники* $< b,c,d,a >$, $< c,d,a,b >$, $< d,a,b,c >$, $< c,b,a,d >$, $< b,a,d,c >$, $< a,d,c,b >$.

Лемма 2 [4]. *Пусть* G *– произвольная n-арная группа. Для любых точек* a,b,c,d *множества* G *справедливы равенства* $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{cd} = \overrightarrow{a[bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,d]}$, $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{cd} = \overrightarrow{[cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,a]d}$.

Лемма 3 [4]. *n-Арная группа* G *– полуабелева тогда и только тогда, когда для любых точек* x,y,z *из* G *выполняется равенство* $[xy^{[-2]}\overset{2n-4}{y}\,z] = [zy^{[-2]}\overset{2n-4}{y}\,x]$.

Основные результаты. Теорема 1. *Пусть* G *– n-арная группа,* $< a_1,a_2,a_3,a_4 >$ *– параллелограмм G,* k *– четное натуральное число (*$k \geq 6$*). Тогда*

1) если $< a_4,a_3,a_5,a_6 >$, $< a_6,a_5,a_7,a_8 >$, ..., $< a_{k-2},a_{k-3},a_{k-1},a_k >$ *– параллелограммы G, то* $< a_1,a_2,a_{k-1},a_k >$ *– параллелограмм G;*

2) если $< a_2,a_5,a_6,a_3 >$, $< a_5,a_7,a_8,a_6 >$, ..., $< a_{k-3},a_{k-1},a_k,a_{k-2} >$ *– параллелограммы G, то* $< a_1,a_{k-1},a_k,a_4 >$ *– параллелограмм G.*

Доказательство. Так как $< a_1,a_2,a_3,a_4 >$ – параллелограмм *G*, то выполняется равенство

$$[a_1a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\,a_3] = a_4. \qquad (1)$$

Пусть выполняется условие 1. Тогда по определению параллелограмма выполняются следующие равенства

$$[a_4a_3^{[-2]}\overset{2n-4}{a_3}\,a_5] = a_6, \qquad (2)$$

$$[a_6a_5^{[-2]}\overset{2n-4}{a_5}\,a_7] = a_8, \qquad (3)$$

$$\ldots,$$

$$[a_{k-2}a_{k-3}^{[-2]}\overset{2n-4}{a_{k-3}}\,a_{k-1}] = a_k.$$

Подставим (1) в (2). Имеем

$$[[a_1a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\,a_3]a_3^{[-2]}\overset{2n-4}{a_3}\,a_5] = a_6,$$

$$[a_1a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\,a_3a_3^{[-2]}\overset{2n-4}{a_3}\,a_5] = a_6.$$

Так как последовательность $a_3a_3^{[-2]}\overset{2n-4}{a_3}$ является нейтральной, то

$$[a_1a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\,[a_3a_3^{[-2]}\overset{2n-4}{a_3}\,a_5]] = a_6,$$

$$[a_1a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\,a_5] = a_6. \qquad (4)$$

Подстановкой (4) в (3), получаем

$$[[a_1a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\,a_5]a_5^{[-2]}\overset{2n-4}{a_5}\,a_7] = a_8,$$

$$[a_1a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\,a_5a_5^{[-2]}\overset{2n-4}{a_5}\,a_7] = a_8,$$

Так как последовательность $a_5a_5^{[-2]}\overset{2n-4}{a_5}$ является нейтральной, то

$$[a_1a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\,[a_5a_5^{[-2]}\overset{2n-4}{a_5}\,a_7]] = a_8,$$

$$[a_1 a_2^{[-2]} \overset{2n-4}{a_2}\ a_7] = a_8.$$

Продолжая указанный процесс, а именно с учетом нейтральности последовательностей подставляя последовательно a_{t-2} в равенства вида $[a_{t-2} a_{t-3}^{[-2]} \overset{2n-4}{a_{t-3}}\ a_{t-1}] = a_t$, . В итоге получаем $[a_1 a_2^{[-2]} \overset{2n-4}{a_2}\ a_{k-1}] = a_k$.

Следовательно, по определению 1 четырехугольник G $< a_1, a_2, a_{k-1}, a_k >$ является параллелограммом G.

Пусть теперь выполняется условие 2). Тогда по определению 1 справедливы следующие равенства

$$[a_2 a_5^{[-2]} \overset{2n-4}{a_5}\ a_6] = a_3, \tag{5}$$

$$[a_5 a_7^{[-2]} \overset{2n-4}{a_7}\ a_8] = a_6, \tag{6}$$

$$\ldots,$$

$$[a_{k-3} a_{k-1}^{[-2]} \overset{2n-4}{a_{k-1}}\ a_k] = a_{k-2}.$$

Подставим (6) в (5). Имеем

$$[a_1 a_2^{[-2]} \overset{2n-4}{a_2}\ [a_2 a_5^{[-2]} \overset{2n-4}{a_5}\ a_6]] = a_4,$$

$$[a_1 a_2^{[-2]} \overset{2n-4}{a_2}\ a_2 a_5^{[-2]} \overset{2n-4}{a_5}\ a_6] = a_4. \tag{7}$$

Учитывая нейтральность последовательности $a_2^{[-2]} \overset{2n-4}{a_2}\ a_2$, преобразуем (7)

$$[[a_1 a_2^{[-2]} \overset{2n-4}{a_2}\ a_2] a_5^{[-2]} \overset{2n-4}{a_5}\ a_6] = a_4,$$

$$[a_1 a_5^{[-2]} \overset{2n-4}{a_5}\ a_6] = a_4. \tag{8}$$

Подставляя последовательно последующие равенства в (8), получаем

$$[a_1 a_{k-1}^{[-2]} \overset{2n-4}{a_{k-1}}\ a_k] = a_4. \tag{9}$$

Равенство (9) означает, что $< a_1, a_{k-1}, a_k, a_4 >$ – параллелограмм. Таким образом теорема доказана.

При $k = 6$, полагая $a_1 = a, a_2 = b, a_3 = c, a_4 = d, a_5 = p, a_6 = q$, из теоремы 1 вытекает следствие.

Следствие 1 [2]. *Пусть четырехугольник* $< a, b, c, d >$ *n-арной группы* G *– параллелограмм G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если $< b, p, q, c >$ *– параллелограмм, то* $< a, p, q, d >$ *– параллелограмм;*

2) если $< d, c, p, q >$ *– параллелограмм, то* $< a, b, p, q >$ *– параллелограмм.*

Следствие 1 было получено С.А. Русаковым в его монографии [2], которое выражает аффинную теорему Дезарга.

Используя теорему 1 при различных *k*, получаем следующее:

Следствие 2. Пусть G – *n*-арная группа, $< a_1, a_2, a_3, a_4 >$, $< a_4, a_3, a_5, a_6 >$, $< a_6, a_5, a_7, a_8 >$, ..., $< a_{k-2}, a_{k-3}, a_{k-1}, a_k >$ – параллелограммы G, то $< a_t, a_{t-1}, a_{t+l}, a_{t+l+1} >$ – параллелограмм G, где $t = 4, 6, 8, \ldots k-2$, $l = 1, 3, \ldots, k-t-1$.

Теорема 2. *Пусть* G *– полуабелева n-арная группа,* $< a_1, a_2, a_3, a_4 >$ *– параллелограмм* G*, точки* $b_1, b_2, b_3, b_4 \in G$ *такие, что выполняются равенства:*

$$\overline{a_1 a_2} = \overline{b_1 b_2}, \tag{1}$$

$$\overline{a_2 a_3} = \overline{b_2 b_3}, \tag{2}$$

$$\overline{a_3 a_4} = \overline{b_3 b_4}, \tag{3}$$

Точки d_1, d_2, d_3, d_4 такие, что выполняются равенства:

$$\overrightarrow{a_1a_2} + \overrightarrow{b_1b_2} = \overrightarrow{a_1d_1}, \tag{4}$$

$$\overrightarrow{a_2a_3} + \overrightarrow{b_2b_3} = \overrightarrow{a_2d_2}, \tag{5}$$

$$\overrightarrow{a_3a_4} + \overrightarrow{b_3b_4} = \overrightarrow{a_3d_3}, \tag{6}$$

$$\overrightarrow{a_4a_1} + \overrightarrow{b_4b_1} = \overrightarrow{a_4d_4}, \tag{7}$$

Тогда

1) $\overrightarrow{a_1d_1} + \overrightarrow{a_2d_2} + \overrightarrow{a_3d_3} + \overrightarrow{a_4d_4} = \vec{0}$

2) $< d_1, d_2, d_3, d_4 >$ *– параллелограмм* G.

Доказательство. Сложим левые части равенств (1)–(3) с учетом определения 7

$$\overrightarrow{a_1a_2} + \overrightarrow{a_2a_3} + \overrightarrow{a_3a_4} = \overrightarrow{b_1b_2} + \overrightarrow{b_2b_3} + \overrightarrow{b_3b_4},$$

$$\overrightarrow{a_1a_4} = \overrightarrow{b_1b_4},$$

что равносильно

$$\overrightarrow{a_4a_1} = \overrightarrow{b_4b_1}. \tag{8}$$

Учитывая равенства (1)–(3),(8), перепишем равенства (4)–(7) следующим образом

$$\overrightarrow{b_1b_2} + \overrightarrow{b_1b_2} = \overrightarrow{a_1d_1}, \tag{9}$$

$$\overrightarrow{b_2b_3} + \overrightarrow{b_2b_3} = \overrightarrow{a_2d_2}, \tag{10}$$

$$\overrightarrow{b_3b_4} + \overrightarrow{b_3b_4} = \overrightarrow{a_3d_3}, \tag{11}$$

$$\overrightarrow{b_4b_1} + \overrightarrow{b_4b_1} = \overrightarrow{a_4d_4}. \tag{12}$$

Обозначим выражение $\overrightarrow{a_1d_1} + \overrightarrow{a_2d_2} + \overrightarrow{a_3d_3} + \overrightarrow{a_4d_4}$ через R. Тогда, учитывая равенства (9)–(12), имеем:

$$R = \overrightarrow{a_1d_1} + \overrightarrow{a_2d_2} + \overrightarrow{a_3d_3} + \overrightarrow{a_4d_4} = \overrightarrow{b_1b_2} + \overrightarrow{b_1b_2} + \overrightarrow{b_2b_3} + \overrightarrow{b_2b_3} + \overrightarrow{b_3b_4} + \overrightarrow{b_3b_4} + \overrightarrow{b_4b_1} + \overrightarrow{b_4b_1} =$$

$$= \overrightarrow{b_1b_2} + (\overrightarrow{b_1b_2} + \overrightarrow{b_2b_3}) + (\overrightarrow{b_2b_3} + \overrightarrow{b_3b_4}) + (\overrightarrow{b_3b_4} + \overrightarrow{b_4b_1}) + \overrightarrow{b_4b_1} = \overrightarrow{b_1b_2} + \overrightarrow{b_1b_3} + \overrightarrow{b_2b_4} + \overrightarrow{b_3b_1} + \overrightarrow{b_4b_1}. \tag{13}$$

К равенству (13) применим лемму 2

$$R = \overrightarrow{b_1[b_2b_1^{[-2]}\overset{2n-4}{b_1}\ b_3b_2^{[-2]}\overset{2n-4}{b_2}\ b_4b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}\ b_1b_4^{[-2]}\overset{2n-4}{b_4}\ b_1]}. \tag{14}$$

Так как G – полуабелева, то вправе применить лемму 3 к равенству (14).

$$R = \overrightarrow{b_1[b_2b_1^{[-2]}\overset{2n-4}{b_1}\ [b_3b_2^{[-2]}\overset{2n-4}{b_2}\ b_4]b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}\ b_1b_4^{[-2]}\overset{2n-4}{b_4}\ b_1]} = \overrightarrow{b_1[[b_2b_1^{[-2]}\overset{2n-4}{b_1}\ b_1]b_2^{[-2]}\overset{2n-4}{b_2}\ [b_4b_4^{[-2]}\overset{2n-4}{b_4}\ b_1]]} =$$

$$= \overrightarrow{b_1[b_2b_1^{[-2]}\overset{2n-4}{b_1}\ b_1b_2^{[-2]}\overset{2n-4}{b_2}\ b_1]} = \overrightarrow{b_1[[b_2b_1^{[-2]}\overset{2n-4}{b_1}\ b_1]b_2^{[-2]}\overset{2n-4}{b_2}\ b_1]} = \overrightarrow{b_1[b_2b_2^{[-2]}\overset{2n-4}{b_2}\ b_1]} = \overrightarrow{b_1b_1} = \vec{0}.$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{a_1d_1} + \overrightarrow{a_2d_2} + \overrightarrow{a_3d_3} + \overrightarrow{a_4d_4} = \vec{0}.$$

Утверждение 1) теоремы 3 доказано.

Теперь докажем, что $< d_1, d_2, d_3, d_4 >$ – параллелограмм G. Для этого необходимо доказать справедливость равенства $[d_1d_2^{[-2]}\overset{2n-4}{d_2}\ d_3] = d_4$.

Применим лемму 2 к равенствам (9)–(12)

$$\overrightarrow{b_1[b_2b_1^{[-2]}\overset{2n-4}{b_1}\ b_2]} = \overrightarrow{a_1d_1}, \tag{15}$$

$$\overrightarrow{b_2[b_3b_2^{[-2]}\overset{2n-4}{b_2}\ b_3]} = \overrightarrow{a_2d_2}, \tag{16}$$

$$\overrightarrow{b_3[b_4b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}\ b_4]} = \overrightarrow{a_3d_3}, \tag{17}$$

$$\overrightarrow{b_4[b_1b_4^{[-2]}\overset{2n-4}{b_4}\ b_1]} = \overrightarrow{a_4d_4}. \tag{18}$$

Умножим равенства (15)–(18) на (-1) (определение 7), получим:

$$-\overrightarrow{b_1[b_2b_1^{[-2]}\overset{2n-4}{b_1}b_2]} = -\overrightarrow{a_1d_1},$$

$$-\overrightarrow{b_2[b_3b_2^{[-2]}\overset{2n-4}{b_2}b_3]} = -\overrightarrow{a_2d_2},$$

$$-\overrightarrow{b_3[b_4b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}b_4]} = -\overrightarrow{a_3d_3},$$

$$-\overrightarrow{b_4[b_1b_4^{[-2]}\overset{2n-4}{b_4}b_1]} = -\overrightarrow{a_4d_4},$$

и

$$\overrightarrow{[b_2b_1^{[-2]}\overset{2n-4}{b_1}b_2]b_1} = \overrightarrow{d_1a_1}, \tag{19}$$

$$\overrightarrow{[b_3b_2^{[-2]}\overset{2n-4}{b_2}b_3]b_2} = \overrightarrow{d_2a_2}, \tag{20}$$

$$\overrightarrow{[b_4b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}b_4]b_3} = \overrightarrow{d_3a_3}, \tag{21}$$

$$\overrightarrow{[b_1b_4^{[-2]}\overset{2n-4}{b_4}b_1]b_4} = \overrightarrow{d_4a_4}. \tag{22}$$

По определению 5 перепишем равенства (19)–(22) в эквивалентном виде

$$[[b_2b_1^{[-2]}\overset{2n-4}{b_1}b_2]b_1^{[-2]}\overset{2n-4}{b_1}a_1] = d_1,$$

$$[[b_3b_2^{[-2]}\overset{2n-4}{b_2}b_3]b_2^{[-2]}\overset{2n-4}{b_2}a_2] = d_2,$$

$$[[b_4b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}b_4]b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}a_3] = d_3,$$

$$[[b_1b_4^{[-2]}\overset{2n-4}{b_4}b_1]b_4^{[-2]}\overset{2n-4}{b_4}a_4] = d_4.$$

Обозначим выражение $[d_1d_2^{[-2]}\overset{2n-4}{d_2}d_3]$ через I. Используя полученные равенства, I можно переписать в виде

$$I = [d_1d_2^{[-2]}2n-4d_2d_3] = [[[b_2b_1^{[-2]}\overset{2n-4}{b_1}b_2]b_1^{[-2]}\overset{2n-4}{b_1}a_1]d_2^{[-2]}\overset{2n-4}{d_2}[[b_4b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}b_4]b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}a_3]] =$$

$$= [b_2b_1^{[-2]}\overset{2n-4}{b_1}b_2b_1^{[-2]}\overset{2n-4}{b_1}a_1d_2^{[-2]}\overset{2n-4}{d_2}b_4b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}b_4b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}a_3] =$$

$$= [b_2b_1^{[-2]}\overset{2n-4}{b_1}b_2b_1^{[-2]}\overset{2n-4}{b_1}a_1a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}b_2b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}b_2b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}b_4b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}b_4b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}a_3].$$

Применим лемму 3, тогда

$$I = [b_2b_1^{[-2]}\overset{2n-4}{b_1}b_2b_1^{[-2]}\overset{2n-4}{b_1}a_1a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}b_2b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}b_2b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}b_4b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}[b_4b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}a_3]].$$

$$= [b_2b_1^{[-2]}\overset{2n-4}{b_1}b_2b_1^{[-2]}\overset{2n-4}{b_1}[a_1a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}a_3]b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}b_2b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}b_2b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}b_4b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}b_4].$$

Так как $< a_1, a_2, a_3, a_4 >$ – параллелограмм G, то

$$I = [b_2b_1^{[-2]}\overset{2n-4}{b_1}b_2b_1^{[-2]}\overset{2n-4}{b_1}a_4b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}b_2b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}b_2b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}b_4b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}b_4].$$

Четырехугольник $< b_1, b_2, b_3, b_4 >$ – параллелограмм G. А по лемме 1 $< b_2, b_3, b_4, b_1 >$, $< b_2, b_1, b_4, b_3 >$, $< b_3, b_4, b_1, b_2 >$ – также параллелограммы G. Следовательно

$$I = [b_2b_1^{[-2]}\overset{2n-4}{b_1}b_2b_1^{[-2]}\overset{2n-4}{b_1}a_4b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}b_2b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}[b_2b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}b_4]b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}b_4] =$$

$$= [b_2b_1^{[-2]}\overset{2n-4}{b_1}b_2b_1^{[-2]}\overset{2n-4}{b_1}a_4b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}b_2b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}b_1b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}b_4].$$

По лемме 3 получаем

$$I = [b_2b_1^{[-2]}\overset{2n-4}{b_1}b_2b_1^{[-2]}\overset{2n-4}{b_1}[b_4b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}a_4]b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}b_2b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}b_1].$$

Так как $< b_2, b_1, b_4, b_3 >$ – параллелограмм G, то с учетом нейтральности последовательностей имеем

$$I=[b_2b_1^{[-2]}\overset{2n-4}{b_1}[b_2b_1^{[-2]}\overset{2n-4}{b_1}b_4]b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}a_4b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}b_2b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}b_1]=[b_2b_1^{[-2]}\overset{2n-4}{b_1}a_4b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}b_2b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}b_1].$$

Так как $<b_3,b_4,b_1,b_2>$ – параллелограмм G, то

$$I=[[b_3b_4^{[-2]}\overset{2n-4}{b_4}b_1]b_1^{[-2]}\overset{2n-4}{b_1}a_4b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}[b_3b_4^{[-2]}\overset{2n-4}{b_4}b_1]b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}b_1]=$$

$$=[b_3b_4^{[-2]}\overset{2n-4}{b_4}a_4b_4^{[-2]}\overset{2n-4}{b_4}b_1b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}b_1].$$

По лемме 3 с учетом нейтральности последовательностей

$$I=[[b_3b_4^{[-2]}\overset{2n-4}{b_4}a_4]b_4^{[-2]}\overset{2n-4}{b_4}b_1b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}b_1]=[a_4b_4^{[-2]}\overset{2n-4}{b_4}b_1b_4^{[-2]}\overset{2n-4}{b_4}[b_3b_3^{[-2]}\overset{2n-4}{b_3}b_1]]=$$

$$=[[a_4b_4^{[-2]}\overset{2n-4}{b_4}b_1]b_4^{[-2]}\overset{2n-4}{b_4}b_1]=[b_1b_4^{[-2]}\overset{2n-4}{b_4}[a_4b_4^{[-2]}\overset{2n-4}{b_4}b_1]]=[b_1b_4^{[-2]}\overset{2n-4}{b_4}b_1b_4^{[-2]}\overset{2n-4}{b_4}a_4]=d_4.$$

То есть

$$[d_1d_2^{[-2]}\overset{2n-4}{d_2}d_3]=d_4.$$

Следовательно теорема 2 доказана.

Литература

1. Вакарелов, Д. Тернарни групи / Д. Вакарелов // Годищник Софийского ун-та. Матфак. – 1966–1968. – Т. 61.– С. 71–105.

2. Русаков, С.А. Некоторые приложения теории n-арных групп / С.А. Русаков. – Минск : Беларуская навука, 1998. – 167 с.

3. Кулаженко, Ю.И. Построение фигур аффинной геометрии на n-арной группе / Ю.И. Кулаженко // Вопросы алгебры и прикладной математики. – 1995. – С. 65–82.

4. Кулаженко, Ю.И. Полиадические операции и их приложения / Ю.И. Кулаженко. – Минск : Изд. Центр БГУ, 2014. – 311 с.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 12.02.2015