Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (90), 2015

УДК 512.542

Конечные группы с энгелевыми циклами

Н.М. Курносенко[1], В.Е. Евдокимович[2]

Установлен ряд свойств конечных групп, в которых для всех $x, y \in G$ Установлен ряд свойств конечных групп, в которых для всех $x, y \in G$ $[y,_m x] = [y,_{m+n} x]$, где m, n – целые числа. В частности, доказана разрешимость конечной группы G при $n = 2p$, где $p > 3$ – простое число, не являющееся числом Мерсенна и $(3, |G|) = 1.$, где m, n – целые числа. В частности, доказана разрешимость конечной группы G при $n = 2p$, где $p > 3$ – простое число, не являющееся числом Мерсенна и $(3, |G|) = 1$.

Ключевые слова: конечная группа, коммутатор, энгелев цикл, разрешимость, сверхразрешимость, слабый нормализатор, слабонормальная подгруппа.

Some properties of finite groups with $[y,_m x] = [y,_{m+n} x]$ for all elements $x, y \in G$, where m, n are integer numbers, are found. In particular, it is proved that finite group G is solvable, if $n = 2p$, where $p > 3$ is a simple number, which is not a Mersenn number and $(3, |G|) = 1$.

Keywords: finite group, commutator, Engel cycle, solvability, supersolvability, weak normalizator, wearnormal subgroup.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – элементы конечной группы G. Коммутатором элементов x_1 и x_2 называется элемент $[x_1, x_2] = x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2$. Коммутаторы более высокой степени определяются по правилу $[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}], x_n]$.

Тогда, очевидно, запись $[y,_n x]$ будет обозначать коммутатор

$$[y, x, x, \ldots, x],$$

где число элементов x равно n.

Пусть x, y – элементы конечной группы G, m, n – положительные целые числа такие, что $[y,_m x] = [y,_{m+n} x]$. Пусть $x_1 = [y,_m x]$, $x_2 = [y,_{m+1} x]$, … , $x_n = [y,_{m+n-1} x]$, $x_{n+1} = [y,_{m+n} x]$.

Очевидно, что последовательность групповых элементов $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$ имеет период, который согласно [1] будем называть энгелевым циклом длины n, порождённым элементами y и x. Множество элементов $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$ называют носителем энгелева цикла.

В работах [1], [2] изучались классы конечных групп с энгелевыми циклами. Так, в частности, в [2] было доказано, что если в конечной группе G для всех $x, y \in G$ $[y,_m x] = [y,_{m+n} x]$, где n нечётно, то группа G разрешима. Как показано в [1], классы конечных групп с энгелевыми циклами длины 1 и 2 совпадают, а группы, принадлежащие этим классам, являются сверхразрешимыми. В данной работе продолжается изучение свойств энгелевых циклов в конечных группах.

Рассматриваются только конечные группы. Определения и обозначения, которые используются, можно найти в [1]–[4]. Приведём некоторые результаты, которые будут использоваться в дальнейшем.

Лемма 1 [2]. *Пусть G – конечная группа, m, n – целые числа и n нечётно. Пусть для всех $x, y \in G$ $[y,_m x] = [y,_{m+n} x]$. Тогда 1) все подгруппы нечётного порядка из G нильпотентны; 2) если p не делит 2^n+1, то G – p'-замкнутая группа.*

Определение 1 [5]. Пусть Σ_H – силовская система разрешимой подгруппы H группы G. Слабым системным нормализатором (системным квазинормализатором) Σ_H в G называют подгруппу $N_G^*(\Sigma_H)$, определяемую следующим образом: $N_G^*(\Sigma_H) = \left\langle x \in G \,\middle|\, \langle x \rangle P = P \langle x \rangle \text{ для всех } P \in \Sigma_H \right\rangle$.

Слабым нормализатором подгруппы H в G называют подгруппу $N_G^*(H) = H\,N_G^*(\Sigma_H)$.

Если $G = N_G^*(H)$, то подгруппа H называется слабонормальной в G.

Теорема 1 [5]. *Конечная группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда она имеет полное множество слабонормальных силовских p-дополнений.*

Определение 2 [8]. Подгруппа A группы G называется слабо пронормальной, если для любого $x \in G$ из того, что A и A^x нормальны в $\langle A, A^x \rangle$, следует $A = A^x$.

Лемма 2 [8]. *Если подгруппа A группы G одновременно субнормальна и слабо пронормальна, то она нормальна в G.*

Рассмотрим некоторые свойства конечных групп, в которых для любых элементов $x, y \in G$ $[y, {}_m x] = [y, {}_{m+n} x]$, где m, n – целые числа.

Теорема 2. *Пусть G – конечная группа, m, n – целые числа, где $n = 2p$ и $p > 3$ – простое число, не являющееся числом Мерсенна. Если для всех $x, y \in G$ $[y, {}_m x] = [y, {}_{m+n} x]$ и $(3, |G|) = 1$, то группа G разрешима.*

Доказательство. Допустим, что существуют группы, для которых теорема неверна. Выберем тогда среди них группу G наименьшего порядка. Пусть $p > 3$ – любое простое число, не являющееся числом Мерсенна. В этом случае получаем, что для всех $x, y \in G$ $[y, {}_m x] = [y, {}_{m+n} x]$, где $n = 2p$, 3 не делит $|G|$, но группа G неразрешима. Очевидно, что каждая собственная подгруппа из G разрешима. Предположим, что группа G непроста, то есть существует подгруппа H, такая, что $H < G$, но $H \neq 1$ и $H \neq G$. Обе группы H и G/H разрешимы, так как H собственная подгруппа группы G, группа G/H удовлетворяет условиям теоремы, а $|H|$ и $|G/H|$ меньше, чем $|G|$. Поэтому группа G также разрешима, что противоречит нашему предположению. Следовательно, G – минимальная простая группа [6]:

1) $PSL(2, 2^p)$ для любого простого p;
2) $PSL(2, 3^p)$, где p нечётное простое;
3) $PSL(2, p)$,где p простое, $p \neq 3$, $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod 5$;
4) $PSL(3, 3)$;
5) $Sz(2^p)$, где p нечётное простое.

Так как 3 не делит $|G|$, то, очевидно, что G не может быть группой $PSL(3, 3)$, $PSL(2, 3^p)$. Ввиду того, что $|\mathrm{PSL}(2, \mathrm{p})| = \frac{1}{2} p(p^2 - 1)$ делится на 3, то G не может быть группой $PSL(2, p)$.

Порядок группы $PSL(2, 2^p)$ для любого простого p равен $2^p(2^p-1)(2^p+1)$. Очевидно, что произведение трёх последовательных чисел делится на 3. Поэтому G не может быть группой $PSL(2, 2^p)$.

Как известно, $|Sz(q)| = q^2(q-1)(q^2+1)$. Так как $q = 2^p$, $|Sz(2^p)| = 2^{2p}(2^p-1)(2^{2p}+1)$. Так как для всех элементов $x, y \in G$ $[y, {}_m x] = [y, {}_{m+n} x]$, где $n = 2p$, то по теореме 4.2 [2] группа G r'-замкнута, за исключением следующих простых r: делителей 2^n+1, 3 (если $n+1$ есть степень 3), 2 (если $p+1$ есть степень 2) и $2p+1$. Следовательно, если $p+1 \neq 2^\alpha$ для некоторого $\alpha > 0$, то группа G $2'$-замкнута и не может быть группой Судзуки. Допустим, что $p+1 = 2^\alpha$. Тогда $p = 2^\alpha - 1$ – простое число Мерсенна, что невозможно, так как не может быть простым числом Мерсенна по условию.

Таким образом, G не является минимальной простой группой. Следовательно, G – разрешимая группа. Теорема доказана.

Лемма 3. *Пусть G – конечная разрешимая группа. $G_{p'}$ – дополнение к силовской p-подгруппе G_p группы G. Если группа G является p-сверхразрешимой, то $G_{p'}$ – слабонормальная подгруппа группы G.*

Доказательство. Предположим, что существуют группы, для которых лемма неверна. Выберем тогда среди них группу *G*, имеющую наименьший порядок. Таким образом, группа *G p*-сверхразрешима, но $G \neq N_G^*(G_{p'})$, где $N_G^*(G_{p'}) = G_{p'} N_G^*(\Sigma_{Gp'})$.

Пусть $\Sigma = \{G_{p_1}, G_{p_2}, ..., G_{p_k}\}$ – силовская система группы *G*, редуцируемая в $G_{p'}$. Тогда $\Sigma_{G_{p'}} = \Sigma \cap G_{p'}$ – силовская система подгруппы $G_{p'}$. Пусть *N* – минимальная нормальная подгруппа из *G*. Так как группа *G* *p*-сверхразрешима, то либо $|N| = p$, либо $|N|$ есть p'-число, и группа G/N является *p*-сверхразрешимой. Так как порядок группы G/N меньше порядка группы *G*, то $G/N = N_{G/N}^*(G_{p'} N/N)$, то есть $G_{p'} N/N$ – слабонормальная подгруппа из G/N.

Так как группа *G* разрешима, то по D-теореме Ф.Холла [7] группа *G* и любая её подгруппа удовлетворяют свойству C_π на произвольном π. Поэтому по теореме 1.3 [5] $N_{G/N}^*(G_{p'} N/N) = N_G^*(G_{p'}) N/N$.

Следовательно, $G = N_G^*(G_{p'})N = G_{p'} N_G^*(\Sigma_{G_{p'}})N$.

Если $|N| = p$, то $N = \langle x \rangle$ для некоторого $x \in G$. Очевидно, что $\langle x \rangle Q = Q \langle x \rangle$ для любого $Q \in \Sigma_{G_{p'}}$. Поэтому $x \in N_G^*(\Sigma_{G_{p'}})$ и $G = N_G^*(\Sigma_{G_{p'}})$. Следовательно, $G_{p'}$ есть слабонормальная подгруппа из *G*. Противоречие.

Значит, $|N|$ есть p'-число и $N \subseteq G_{p'}$. Если $N = G_{p'}$, то $G_{p'} \lhd G$, а, следовательно, $G_{p'}$ – слабонормальная подгруппа из *G*. Поэтому $N \subset G_{p'}$. Тогда $G = G_{p'} N_G^*(\Sigma_{G_{p'}}) = N_G^*(G_{p'})$. Пришли к противоречию с выбором группы *G*. Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть G – конечная группа, m, n – целые числа и n нечётно. Пусть для всех* $x, y \in G$ $[y,_m x] = [y,_{m+n} x]$. *Если для каждого* $p \in \pi(G)$, *делящего* 2^n+1, *силовская p-подгруппа дедекиндова и любая её подгруппа p слабо пронормальна в G, то группа G сверхразрешима.*

Доказательство. Пусть *G* – конечная группа, удовлетворяющая условиям теоремы. Так как для всех $x, y \in G$ $[y,_m x] = [y,_{m+n} x]$, где *n* нечётно, то по [2] группа *G* разрешима. Пусть $|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$ и $\pi(G) = \{p_1, p_2, ... p_k\}$. Пусть подгруппы $G_{p_1}, G_{p_2}, ..., G_{p_k}$ образуют силовскую систему Σ группы *G*: $\Sigma = \left\{G_{p_1}, G_{p_2}, ..., G_{p_k}\right\}$. Покажем, что в группе *G* имеется полное множество слабонормальных силовских *p*-дополнений.

Пусть $p \in \pi(G)$. Если *p* не делит 2^n+1, то по лемме 1 группа *G* является p'-замкнутой. Следовательно, группа *G* имеет нормальное *p*-дополнение $G_{p'}$ к силовской *p*-подгруппе G_p, и $N_G(G_{p'}) = G$. По лемме 1.1 [5] $N_G(G_{p'}) \subseteq N_G^*(G_{p'})$. Значит $N_G^*(G_{p'}) = G$ и $G_{p'}$ – слабонормальная подгруппа в группе *G*. Поэтому пусть *p* делит 2^n+1.

Если группа *G* в этом случае p'-замкнута, то $G_{p'} \lhd G$ и аналогично предыдущему получим, что $G_{p'}$ – слабонормальная подгруппа из *G*. Поэтому пусть группа *G* не является p'-замкнутой. Покажем, что если в группе *G* имеются инвариантные p'-подгруппы, то *p*-дополнение $G_{p'}$ слабонормально в *G*. Пусть *G* – группа наименьшего порядка, которая удовлетворяет условию теоремы, но которая не *p*-сверхразрешимая в *G* для данного *p*. Пусть $N \lhd G$ – p'-подгруппа. Тогда фактор-группа G/N *p*-сверхразрешима по индукции. Так как *N* – p'-подгруппа, то из *p*-сверхразрешимости G/N следует *p*-сверхразрешимость *G*. А тогда по лемме 3 получаем, что $G_{p'}$ – слабонормальная подгруппа в *G*. Следовательно, в группе *G* имеется полное множество слабонормальных силовских p-дополнений и по теореме 1 группа G сверхразрешима. Значит, в группе G нет инвариантных p'-подгрупп. Так как p делит 2^n+1, то силовская p-подгруппа G_p дедекиндова в G по условию. Группа G разрешима. Поэтому по [9] $l_p(G)=1$. Отсюда получаем, что $G_p \lhd G$. Пусть P – любая подгруппа из G_p. Тогда $P \lhd G$ и P – субнормальная подгруппа группы G. Так как P является слабонормальной подгруппой в G по условию, то по лемме 2 P – нормальная подгруппа из G. Поэтому $PG_{p'}$ есть подгруппа группы G. Значит p-подгруппа P перестановочна с $G_{p'}$. Тогда по теореме из [10] группа G p-сверхразрешима. В этом случае по лемме 3 p-дополнение $G_{p'}$ есть слабонормальная подгруппа группы G. Таким образом показано, что в группе G имеется полное множество слабонормальных силовских p-дополнений. Тогда по теореме 1 группа G сверхразрешима. Теорема доказана.

Из доказательства теоремы получаем следующий признак p-сверхразрешимости конечных групп.

Теорема 4. *Пусть G – конечная p-разрешимая группа с дедекиндовой силовской p-подгруппой G_p. Если любая подгруппа P из G_p слабо пронормальна в G, то группа G p-сверхразрешима.*

Согласно [12], если H – подгруппа группы G, B – подгруппа из H, то подгруппа B сильно замкнута в H (по отношению к G), когда $H \cap B^x \subseteq B$, где x – любой элемент из G.

Теорема 5. *Пусть G – конечная группа, m, n – целые числа и n нечётно. Пусть для всех $x, y \in G$ $[y,_m x]=[y,_{m+n} x]$. Тогда для каждого $p \in \pi(G)$, которое не делит 2^n+1, максимальные подгруппы силовской p-подгруппы G_p из G сильно замкнуты в G_p относительно G.*

Доказательство. Пусть G – конечная группа, удовлетворяющая условиям теоремы. Тогда по [2] группа G разрешима. Пусть $|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$. Пусть $p \in \pi(G)$ не делит 2^n+1. Тогда по лемме 1 группа G является p'-замкнутой, то есть $G_{p'} \lhd G$. Пусть M – максимальная подгруппа силовской p-подгруппы G_p из G. Тогда $M \lhd G_p$. Так как $G_{p'} \lhd G$, то $MG_{p'}$ – подгруппа группы G. Легко видно, что $MG_{p'} \lhd G$. Тогда по теореме 3.8 [11] M является силовской p-подгруппой из $MG_{p'}$. Пусть $x \in G$. Тогда $M^* \subseteq (MG_{p'})^* = MG_{p'}$. Так как $|M^*| = |M|$, то M^* также является силовской p-подгруппой из $MG_{p'}$. Используя тождество Дедекинда, получим $G_p \cap MG_{p'} = M(G_p \cap G_{p'}) = M$.

Поэтому $G_p \cap M^* = G_p \cap (M^* \cap MG_{p'}) = (G_p \cap MG_{p'}) \cap M^* = M \cap M^* \subseteq M$. Значит, M сильно замкнута в G_p относительно G. Теорема доказана.

Пусть $x, y \in G$. Если $[y,_n x]=1$ для некоторого целого числа n, то y называют правым энгелевым элементом группы G относительно x. Множество элементов группы G, которые являются правыми энгелевыми элементами относительно x, будем обозначать $E_G(x)$. Для произвольной конечной группы G множество $E_G(x)$ не обязательно является подгруппой. Однако существуют конечные группы, в которых $E_G(x)$ является подгруппой для каждого элемента x из G. Следуя [13] будем называть такие группы E-группами. Из леммы Цорна [3] очевидно следует, что нильпотентные группы являются E-группами. Группу G будем называть E_p-группой, если для каждого p-элемента x из G множество $E_G(x)$ является подгруппой. Очевидно, что разрешимая E-группа является p-разрешимой E_p-группой для каждого простого $p \in \pi(G)$.

Следующая теорема позволяет установить связь между E-группами и группами с энгелевыми циклами длины 3.

Теорема 6. *Пусть G – конечная группа, m – целое число. Если для всех $x, y \in G$ $[y,_m x]=[y,_{m+3} x]$, то коммутант G' нильпотентен.*

Доказательство. Пусть G – конечная группа, удовлетворяющая условию теоремы. Так как для всех $x, y \in G$ $[y,_m x]=[y,_{m+3} x]$, то по [2] группа G разрешима. Так как по лемме 1 все подгруппы нечётного порядка из G нильпотентны, то получаем, что коммутант G' нильпотентен. Поэтому пусть $p = 2 \in \pi(G)$. Так как группа G имеет энгелевы циклы длины 3, то по лемме 1 группа G будет p-нильпотентна для всех $p \neq 3$. Значит, если 3 не делит $|G|$, то группа G p-нильпотентна для любого $p \in \pi(G)$. Следовательно, G – нильпотентная группа, и коммутант G' нильпотентен. Поэтому пусть $p = 3 \in \pi(G)$. Если группа G 3-нильпотентна, то, очевидно, G – нильпотентная группа и G' нильпотентен. Поэтому допустим, что G не является *3*-нильпотентной группой и пусть G – контрпример минимального порядка в этом случае. Тогда по лемме 2.5 [2] коммутант G' является *3*-группой и минимальной нормальной подгруппой из G. Следовательно, коммутант G' нильпотентен. Противоречие. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть G – конечная группа, m – целое число и для всех $x, y \in G$ $[y,_m x] = [y,_{m+3} x]$. Тогда G – E-группа.*

Доказательство. Пусть G – конечная группа, m – целое число. Так как для всех $x, y \in G$ $[y,_m x] = [y,_{m+3} x]$, то по теореме 6 коммутант G' нильпотентен. По теореме 1 [13] группа G с нильпотентным коммутантом является E-группой.

Следствие 2. *Пусть G – конечная группа, m – целое число и для всех $x, y \in G$ $[y,_m x] = [y,_{m+3} x]$. Тогда главные p-факторы в группе $G/O_p(G)$ имеют порядок p или ≤ 4.*

Доказательство. По следствию 1 группа G является E-группой. По теореме 4.3 [2] группа G разрешима. Поэтому G является p-разрешимой E_p-группой для любого $p \in \pi(G)$. Тогда по теореме 5 [13] главные p-факторы из $G/O_p(G)$ имеют порядок p или ≤ 4.

Литература

1. Brandl, R. Engel cycles in finite groups / R. Brandl // Arch. Math. – 1983. – Vol. 41. – P. 97–102.

2. Gupta, N., Heineken, H. Groups with a two-variable commutator identity / N. Gupta, H. Heineken // Math. Z. – 1967. – Vol. 95. – P. 276–287.

3. Huppert, B. Endliche Gruppen / B. Huppert // Berlin : Heidelberg ; New York : Springer, 1967. – Bd. 1. – 793 s.

4. Чунихин, С.А., Шеметков, Л.А. Конечные группы / С.А. Чунихин, Л.А. Шеметков // Алгебра. Топология. Геометрия. – 1969. – С. 7–70.

5. Venzke, P.A. Contribution to the theory of finite supersolvable groups / P.A. Venzke // J. Algebra. – 1979. – Vol. 57. – P. 567–579.

6. Tompson, J.G. Non-solvable finite groups all of whose local subgroups are solvable / J.G. Tompson // Bull. A.M.S. – 1968. – Vol. 74 – P. 383–437.

7. Hall, P. A note on soluble groups / P. Hall // J. London Math. Soc. – 1928. – Vol. 3 – P. 98–105.

8. Шеметков, Л.А. О подгруппах π-разрешимых групп / Л.А. Шеметков // Конечные группы. – Мн. : Наука и техника, 1975. – С. 207–212.

9. Bauman, S. p-Normality and p-length of a finite groups / S. Bauman // Math. Z. – 1965. – Vol. 87, № 2. – P. 345–347.

10. Боровиков, М.Т. Группы с перестановочными подгруппами взаимно простых порядков / М.Т. Боровиков // Вопросы алгебры. – 1990. – Вып. 5. – С. 80–82.

11. Gorenstein, D. Finite groups / D. Gorenstein // New York : Harper and Row, 1964. – 527 p.

12. Goldschmidt, D.M. Strogly closed 2-subgroups of finite groups of finite groups / D.M. Goldschmidt // Annals of Mathematics. – 1975. – Vol. 102. – P. 475–489.

13. Peng, T.A. Finite soluble groups with an Engel condition / T.A. Peng // J. Algebra. – 1969. – № 11. – P. 319–330.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

[2]Белорусский государственный

университет транспорта

Поступила в редакцию 08.03.2015