Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (129), 2021

Математика

УДК 517.925

Дробно-линейная отражающая функция

М.С. Белокурский

Получены необходимые и достаточные условия, при которых дробно-линейная функция является отражающей функцией дифференциального уравнения. Указан оператор сдвига вдоль решений на отрезке $[-\omega;\omega]$ для таких уравнений.

Ключевые слова: отражающая функция, оператор сдвига, дробно-линейная отражающая функция.

The necessary and sufficient conditions for the linear fractional function to be a reflecting function of differential equation were obtained. The shift operator on $[-\omega;\omega]$ along the solutions for such equations is given.

Keywords: reflecting function, shift operator, linear fractional reflecting function.

Рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x} = X(t,x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x = (x_1,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

с непрерывной по совокупности переменных и непрерывно дифференцируемой по x правой частью. Пусть $\varphi(t;\tau,x)$ – общее решение в форме Коши системы (1). Пусть I_x – максимальный симметричный относительно нуля интервал существования решения $\varphi(t;0,x)$. Обозначим $D(X) := \{(t,\varphi(t;0,x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \in I_x,\ x \in \mathbb{R}^n\}$. Из теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных данных и определения множества $D(X)$ следует, что $D(X)$ – открытая область в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, содержащая гиперплоскость $t = 0$. Отражающей функцией Мироненко [1] системы (1) называется вектор-функция $F : D(X) \to \mathbb{R}^n$, действующая по правилу $(t,x) \mapsto \varphi(-t;t,x)$. Таким образом, отражающая функция определяется формулой $F(t,x) = \varphi(-t;t,x)$.

Вектор-функция $F = F(t,x) : D(X) \to \mathbb{R}^n$ является [2, с. 63] отражающей функцией системы (1) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет системе уравнений в частных производных

$$F_t + F_x X(t,x) + X(-t,F) = 0 \tag{2}$$

начальному условию

$$F(0,x) \equiv x. \tag{3}$$

Разработаны методы, которые в ряде случаев позволяют находить отражающую функцию даже у неинтегрируемых в квадратурах системах. Более того, зная лишь некоторые свойства отражающей функции системы, можно исследовать поведение ее решений, не прибегая к построению отражающей функции. Различным аспектам этого направления теории дифференциальных уравнений посвящены работы В.И. Мироненко [1]–[3], Z. Zhou [4], Э.В. Мусафирова [5]. Две системы называются эквивалентными в смысле совпадения отражающих функций [2, с. 74], если их отражающие функции совпадают в некоторой области, содержащей гиперплоскость $t = 0$. Решения эквивалентных систем обладают рядом одинаковых свойств.

Для отражающей функции системы (1) справедливо [2, с. 63] тождество:

$$F(-t, F(t,x)) \overset{t,x}{\equiv} x, \tag{4}$$

из которого следует, что не всякая вектор-функция может быть отражающей функцией. Поэтому актуальной задачей является нахождение функций, удовлетворяющих условию (4), т. е. тех функций, которые могут быть использованы для изучения дифференциальных уравнений методом отражающей функции.

В данной работе рассматриваются дробно-линейные по фазовой переменной функции с целью выделить среди них отражающие функции и построить оператор сдвига [6, с. 12] вдоль решений уравнения с дробно-линейной отражающей функцией на отрезке $[-\omega;\omega]$.

Рассмотрим функцию вида:

$$F(t,x)=\frac{f_0(t)+f_1(t)x}{g_0(t)+g_1(t)x}. \tag{5}$$

Коэффициент $g_0(0)\neq 0$, т. к. в противном случае функция (5) не удовлетворяет условию (3). Разделив числитель и знаменатель функции (5) на $g_0(t)$, получаем функцию вида:

$$F(t,x)=\frac{a_0(t)+a_1(t)x}{1+b_1(t)x}, \tag{6}$$

где $a_0(t)=\dfrac{f_0(t)}{g_0(t)},\, a_1(t)=\dfrac{f_1(t)}{g_0(t)},\, b_1(t)=\dfrac{g_1(t)}{g_0(t)}$.

Теорема 1. *Для того, чтобы функция (6) была отражающей функцией необходимо и достаточно, чтобы она имела вид:*

$$F(t,x)=\frac{\alpha(t)e^{\beta(t)}+e^{2\beta(t)}x}{1+\gamma(t)e^{\beta(t)}x}, \tag{7}$$

где $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ – нечетные дифференцируемые функции.

Доказательство. Необходимость. Пусть функция вида (6) является отражающей функцией. Сначала рассмотрим тождество (3) для функции (6):

$$\frac{a_0(0)+a_1(0)x}{1+b_1(0)x}\equiv x\,. \tag{8}$$

Переносим в (8) все слагаемые в левую часть и приводим их к общему знаменателю:

$$\frac{a_0(0)+a_1(0)x-x-b_1(0)x^2}{1+b_1(0)x}\equiv 0\,.$$

Отсюда $a_0(0)=b_1(0)=0$, $a_1(0)=1$.

Теперь рассмотрим тождество (4) для функции (6):

$$\frac{a_0(-t)+a_1(-t)\left(\dfrac{a_0(t)+a_1(t)x}{1+b_1(t)x}\right)}{1+b_1(-t)\left(\dfrac{a_0(t)+a_1(t)x}{1+b_1(t)x}\right)}\equiv x\,.$$

Умножаем числитель и знаменатель левой части полученного тождества на выражение $1+b_1(t)x$:

$$\frac{a_0(-t)(1+b_1(t)x)+a_1(-t)(a_0(t)+a_1(t)x)}{1+b_1(t)x+b_1(-t)(a_0(t)+a_1(t)x)}\equiv x\,. \tag{9}$$

В тождестве (9) переносим все слагаемые в левую часть и приводим к общему знаменателю. Тогда числитель дроби в левой части получаемого равенства должен равняться нулю. Отсюда имеем тождество:

$$a_0(-t)(1+b_1(t)x)+a_1(-t)(a_0(t)+a_1(t)x)-x(1+b_1(t)x)-b_1(-t)x(a_0(t)+a_1(t)x)\equiv 0\,.$$

Раскроем скобки и приведем подобные члены относительно степеней переменной x:

$$(a_0(-t)+a_0(t)a_1(-t))+(a_0(-t)b_1(t)+a_1(t)a_1(-t)-1-a_0(t)b_1(-t))x-$$
$$-(b_1(t)+a_1(t)b_1(-t))x^2\equiv 0.$$

Последнее тождество распадается на три:

$$\begin{cases} a_0(-t)+a_0(t)a_1(-t)\equiv 0, \\ a_0(-t)b_1(t)+a_1(t)a_1(-t)-1-a_0(t)b_1(-t)\equiv 0, \\ b_1(t)+a_1(t)b_1(-t)\equiv 0. \end{cases} \tag{10}$$

Из последнего тождества системы (10) выражаем $a_1(t)\equiv -\dfrac{b_1(t)}{b_1(-t)}$ и подставляем в первое равенство системы (10), откуда имеем тождество $a_0(t)b_1(-t)\equiv a_0(-t)b_1(t)$. В силу последнего тождества, второе равенство системы (10) принимает вид:

$$a_1(t)a_1(-t)\equiv 1. \tag{11}$$

Прологарифмируем тождество (11) по основанию e. Из (11) следует, что функции $a_1(t)$ и $a_1(-t)$ одного знака. Будем считать $a_1(t)>0$ для всех значений переменной t. Тогда $\ln a_1(t)+\ln a_1(-t)\equiv 0$. Перепишем последнее тождество в виде $\ln a_1(-t)\equiv -\ln a_1(t)$. Отсюда следует, что функция $\ln a_1(t)$ является нечетной. Тогда $a_1(t)=e^{2\beta(t)}$, где $\beta(t)$ – произвольная нечетная дифференцируемая функция.

Случай $a_1(t)<0$ для всех значений переменной t исключаем в силу условия $a_1(0)=1$. Пусть теперь функция $a_1(t)$ является знакопеременной. Тогда найдется такое значение переменной t_0, что $a_1(t_0)<0$ и $a_1(-t_0)>0$. Но в этом случае функция $a_1(t)$ не удовлетворяет тождеству (11).

Подставляя найденную функцию $a_1(t)=e^{2\beta(t)}$ в третье тождество системы (10) получаем тождество:

$$a_0(-t)+a_0(t)e^{2\beta(-t)}\equiv 0. \tag{12}$$

Переписав тождество (12) в виде $a_0(-t)e^{-\beta(-t)}\equiv -a_0(t)e^{\beta(-t)}$, получаем нечетную функцию $\alpha(t)=a_0(t)e^{-\beta(t)}$. Тогда $a_0(t)=\alpha(t)e^{\beta(t)}$, где $\alpha(t)$ – нечетная дифференцируемая функция.

Если в третьем тождестве системы (10) заменить t на $-t$, то получим функциональное соотношение вида (12). Следовательно, $b_1(t)=\gamma(t)e^{\beta(t)}$, где $\gamma(t)$ – нечетная дифференцируемая функция.

Подставляя найденные функции $a_0(t), a_1(t), b_1(t)$ в (6), получаем отражающую функцию вида (7).

Непосредственная проверка тождеств (3) и (4) для функции (7) доказывает достаточность. Теорема доказана.

Замечание. В некоторых случаях дробно-линейную отражающую функцию (7) будет удобнее использовать в виде:

$$F(t,x)=\frac{\alpha(t)+e^{\beta(t)}x}{e^{-\beta(t)}+\gamma(t)x}.$$

Если в (7) положить $\gamma(t)\equiv 0$, то получим линейную отражающую функцию $F(t,x)=\alpha(t)e^{\beta(t)}+e^{2\beta(t)}x$, что согласуется с известными результатами [2, с. 106].

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x}=X(t,x),\quad t,x\in\mathbb{R}. \tag{13}$$

Теорема 2. *Пусть правая часть уравнения (13) непрерывна по совокупности переменных и непрерывно дифференцируема по x. Если уравнение (13) имеет отражающую функцию (7), то оператор сдвига вдоль решений уравнения (13) на отрезке* $[-\omega;\omega]$ *задается формулой:*

$$T: x\mapsto \frac{-\alpha(\omega)e^{-\beta(\omega)}+e^{-2\beta(\omega)}x}{1-\gamma(\omega)e^{-\beta(\omega)}x}. \tag{14}$$

Доказательство. По определению оператор сдвига вдоль решений уравнения (13) на отрезке $[-\omega;\omega]$ задается формулой $T: x \mapsto \varphi(\omega;-\omega, x)$, где $\varphi(t;t_0, x_0)$ есть общее решение уравнения (13) в форме Коши. Но из определения отражающей функции следует, что $F(-\omega, x) = \varphi(\omega;-\omega, x)$. Тогда оператор сдвига вдоль решений уравнения (13) на отрезке $[-\omega;\omega]$ задается формулой (14). Теорема доказана.

Дробно-линейную отражающую функцию (6) можно применить для решения проблемы центра-фокуса для автономной двумерной системы $\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y)$. Эту систему заменим уравнением в полярной системе координат:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{rP(\varphi, r)}{Q(\varphi, r)}. \tag{15}$$

Далее записываем основное соотношение (2) для отражающей функции (6) уравнения (15). В случае полиномов $P(x, y), \quad Q(x, y)$ после приведения к общему знаменателю и приведения подобных членов относительно степеней переменной r в числителе, основное соотношение распадается на равенства, число которых совпадает с числом степеней переменной r в числителе. Таким образом, будут получены условия, при которых уравнение (15) имеет отражающую функцию (6). Тогда, согласно [7], точка $r = 0$ является центром для уравнения (15) тогда и только тогда, когда отражающая функция $F(\varphi, r) = \dfrac{\alpha(\varphi)e^{\beta(\varphi)} + e^{2\beta(\varphi)}r}{1+\gamma(\varphi)e^{\beta(\varphi)}r}$ уравнения (15) является 2π-периодической по φ для достаточно малых r. В том случае, когда функции $P(x, y), \quad Q(x, y)$ являются голоморфными, в основное соотношение подставляем их степенные ряды. Тогда коэффициенты отражающей функции выражаются через несколько первых членов степенных рядов функций $P(x, y), \quad Q(x, y)$. Итак, проблема центра-фокуса сводится к вопросу периодичности отражающей функции.

Литература

1. Мироненко, В. И. Классы систем с совпадающими отражающими функциями / В. И. Мироненко // Дифференц. уравнения. – 1984. – Т. 20, № 12. – С. 2173–2176.
2. Мироненко, В. И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем : монография / В. И. Мироненко. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2004. – 196 с.
3. Мироненко, В. И. Простые системы и периодические решения дифференциальных уравнений / В. И. Мироненко // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25, № 12. – С. 2109–2114.
4. Zhou, Z. On the structure of the equivalent differential systems and their reflecting integrals / Z. Zhou // Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.). – 2017. – Vol. 48, № 3. – P. 439–447.
5. Musafirov, E. V. Reflecting function and periodic solutions of differential systems with small parameter / E. V. Musafirov // Indian J. Math. – 2008. – Vol. 50, № 1. – P. 63–76.
6. Красносельский, М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М. А. Красносельский. – М. : Наука, 1958. – 332 с.
7. Мироненко, В. И. Проблема центра-фокуса и отражающая функция / В. И. Мироненко, В. В. Мироненко // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 2 (43) – С. 80–84.

Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины

Поступила в редакцию 30.08.2021