Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (129), 2021

УДК 519.17

Некоторые графы Шилла с $b = 4$ не существуют

А.А. Махнев[1,2], И.Н. Белоусов[2], Цэннь-чжуй Цай[1]

Графом Шилла называется дистанционно-регулярный граф Γ диаметра 3, имеющий второе собственное значение, равное $a = a_3$. Пусть $b = k / a$. Кулен и Пак нашли допустимые массивы пересечений графов Шилла с $b = 3$ (их оказалось 12). И.Н. Белоусов нашел допустимые массивы пересечений графов Шилла с $b = 4$ (их оказалось 50). В работе доказано, что дистанционно-регулярные графы Шилла с $b = 4$ и массивами пересечений $\{140,108,36;1,3,105\}$, $\{188,144,48;1,3,141\}$, $\{196,150,48;1,4,147\}$, $\{220,168,48;1,3,165\}$, $\{224,171,57;1,3,168\}$, $\{308,234,76;1,4,231\}$, $\{308,234,78;1,3,231\}$, $\{404,306,102;1,3,303\}$, $\{420,318,104;1,4,315\}$, $\{476,360,120;1,3,357\}$, $\{572,432,144;1,9,429\}$, $\{644,486,160;1,4,483\}$, $\{680,513,168;1,8,510\}$, $\{728,549,183;1,3,546\}$, $\{764,576,192;1,9,573\}$, $\{780,588,192;1,12,585\}$, $\{804,606,202;1,2,603\}$, $\{868,654,216;1,4,651\}$, $\{980,738,246;1,3,735\}$ не существуют.

Ключевые слова: граф, пересечение, массив, вершина.

A Schill graph is a remotely regular graph of diameter 3 that has a second physical value equal to $a = a_3$. Coolen and Pak found permissible arrays of intersections of the Schill graphs with $b = 3$ (there were 12 of them). I.N. Belousov found permissible arrays of intersections of the the Schill graphs with $b = 4$ (there were 50 of them). The work proved that remotely regular Schill graphs with $b = 4$ and intersections $\{140,108,36;1,3,105\}$, $\{188,144,48;1,3,141\}$, $\{196,150,48;1,4,147\}$, $\{220,168,48;1,3,165\}$, $\{224,171,57;1,3,168\}$, $\{308,234,76;1,4,231\}$, $\{308,234,78;1,3,231\}$, $\{404,306,102;1,3,303\}$, $\{420,318,104;1,4,315\}$, $\{476,360,120;1,3,357\}$, $\{572,432,144;1,9,429\}$, $\{644,486,160;1,4,483\}$, $\{680,513,168;1,8,510\}$, $\{728,549,183;1,3,546\}$, $\{764,576,192;1,9,573\}$, $\{780,588,192;1,12,585\}$, $\{804,606,202;1,2,603\}$, $\{868,654,216;1,4,651\}$, $\{980,738,246;1,3,735\}$ do not exist.

Keywords: graph, intersection, array, vertex.

1. Введение. Рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ – граф, $a, b \in \Gamma$, число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a,b)$ (через $\lambda(a,b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ. Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется μ*-подграфом* (λ*-подграфом*). Пусть Γ – граф диаметра d, $i \in \{2,3,...,d\}$. Граф Γ_i имеет то же самое множество вершин, и вершины u, w смежны в Γ_i, если $d_\Gamma(u,w) = i$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u,w)$ (через $c_i(u,w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$, ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно-регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u,w)$ и $c_i(u,w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0,...,d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно-регулярного графа b_0 – это степень графа, $c_1 = 1$. Далее, через $p^l_{ij}(x,y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно-регулярном графе числа $p^l_{ij}(x,y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются p^l_{ij} и называются числами пересечений графа Γ (см. [1]).

Порядок клики в дистанционно-регулярном графе степени k, имеющем наименьшее собственное значение $-m$ не больше $1+k/m$ (граница Дельсарта). Клика с $1+k/m$ вершинами называется кликой Дельсарта. Графом Тервиллигера называется связный неполный граф Г, в котором для любых вершин u, w на расстоянии 2 подграф $[u]\cap[w]$ является μ-кликой для некоторой константы μ.

Графом Шилла называется дистанционно-регулярный граф Γ диаметра 3, имеющий второе собственное значение, равное $a = a_3$. В этом случае a делит k и полагают $b = b(\Gamma) = k/a$. Далее, $a_1 = a-b$ и Γ имеет массив пересечений $\{ab,(a+1)(b-1),b_2;1,c_2,a(b-1)\}$. В [2] найдены массивы пересечений графов Шилла с $b\in\{2,3\}$.

Предложение 1. *Пусть* Γ *– граф Шилла. Тогда:*

(1) если $b = 2$, то Γ – нечетный граф степени 4, обобщенный шестиугольник порядка $(2,2)$, граф Хэмминга $H(3,3)$, граф Тервиллигера с массивом пересечений $\{10,6,4;1,2,5\}$ или граф Джонсона $J(9,3)$;

(2) если $b = 3$, то Γ имеет массив пересечений $\{12,10,5;1,1,8\}$, $\{12,10,2;1,2,8\}$,
$\{12,10,3;1,3,8\}$, $\{15,12,6;1,2,10\}$,
$\{24,18,9;1,1,16\}$, $\{27,20,10;1,2,18\}$, $\{30,22,9;1,3,20\}$,
$\{42,30,12;1,6,28\}$, $\{60,42,18;1,6,40\}$, $\{69,48,24;1,4,46\}$,
$\{93,64,24;1,6,62\}$, $\{105,72,24;1,12,70\}$.

В [3] найдены массивы пересечений графов Шилла с $b = 4$.

Предложение 2. *Пусть* Γ *– граф Шилла с* $b = 4$. *Тогда* Γ *имеет массив пересечений:*
$\{20,18,6;1,1,15\}$, $\{20,18,6;1,3,15\}$, $\{24,21,3;1,3,18\}$, $\{28,24,12;1,1,21\}$,
$\{40,33,3;1,3,30\}$, $\{44,36,12;1,3,33\}$, $\{56,45,15;1,3,42\}$, $\{60,48,16;1,1,45\}$,
$\{68,54,12;1,6,51\}$, $\{80,63,12;1,12,60\}$,
$\{80,63,21;1,3,60\}$, $\{84,66,20;1,4,63\}$, $\{100,78,18;1,3,75\}$, $\{104,81,27;1,9,78\}$,
$\{116,90,30;1,3,87\}$, $\{116,90,30;1,6,87\}$, $\{140,108,18;1,18,105\}$, $\{140,108,24;1,9,105\}$,
$\{140,108,36;1,3,105\}$, $\{152,117,39;1,9,114\}$,
$\{156,120,36;1,12,117\}$, $\{164,126,40;1,4,123\}$, $\{188,144,48;1,3,141\}$,
$\{196,150,48;1,4,147\}$, $\{200,153,48;1,8,150\}$, $\{204,156,48;1,12,153\}$,
$\{216,165,55;1,5,162\}$, $\{220,168,48;1,3,165\}$, $\{220,168,56;1,7,165\}$,
$\{224,171,57;1,3,168\}$,
$\{236,180,48;1,9,177\}$, $\{260,198,66;1,9,195\}$, $\{308,234,76;1,4,231\}$,
$\{308,234,78;1,3,231\}$, $\{320,243,36;1,36,240\}$, $\{356,270,90;1,9,267\}$,
$\{404,306,102;1,3,303\}$, $\{420,318,104;1,4,315\}$, $\{476,360,84;1,21,357\}$,
$\{476,360,120;1,3,357\}$,
$\{500,378,108;1,18,375\}$, $\{572,432,144;1,9,429\}$, $\{644,486,160;1,4,483\}$,
$\{680,513,168;1,8,510\}$, $\{728,549,183;1,3,546\}$, $\{764,576,192;1,9,573\}$,
$\{780,588,192;1,12,585\}$, $\{804,606,202;1,2,603\}$, $\{868,654,216;1,4,651\}$,
$\{980,738,246;1,3,735\}$.

Белоусов И.Н, Голубятников М.П. и Махнев А.А. доказали, что Q-полиномиальные графы Шилла, т. е. графы с массивами пересечений $\{104,81,27;1,9,78\}$, $\{156,120,36;1,12,117\}$, $\{20(q-2),3(5q-9),2q;1,2q,15(q-2)\}$, $q = 6,9,18$ не существуют.

Теорема 1. *Дистанционно-регулярный граф с массивом пересечений* $\{140,108,36;1,3,105\}$ *не существует.*

Теорема 2. *Дистанционно-регулярные графы Шилла с* $b = 4$ *и массивами пересечений:*
$\{188,144,48;1,3,141\}$, $\{196,150,48;1,4,147\}$, $\{220,168,48;1,3,165\}$,
$\{224,171,57;1,3,168\}$, $\{308,234,76;1,4,231\}$, $\{308,234,78;1,3,231\}$,

$\{404,306,102;1,3,303\}$, $\{420,318,104;1,4,315\}$, $\{476,360,120;1,3,357\}$, $\{572,432,144;1,9,429\}$, $\{644,486,160;1,4,483\}$, $\{680,513,168;1,8,510\}$, $\{728,549,183;1,3,546\}$, $\{764,576,192;1,9,573\}$, $\{780,588,192;1,12,585\}$, $\{804,606,202;1,2,603\}$, $\{868,654,216;1,4,651\}$, $\{980,738,246;1,3,735\}$ *не существуют.*

Следствие 1. *Пусть* Γ *– граф Шилла с* $b=4$. *Тогда* Γ *имеет массив пересечений:* $\{20,18,6;1,1,15\}$, $\{20,18,6;1,3,15\}$, $\{24,21,3;1,3,18\}$, $\{28,24,12;1,1,21\}$, $\{40,33,3;1,3,30\}$, $\{44,36,12;1,3,33\}$, $\{56,45,15;1,3,42\}$, $\{60,48,16;1,1,45\}$, $\{68,54,12;1,6,51\}$, $\{80,63,21;1,3,60\}$, $\{84,66,20;1,4,63\}$, $\{100,78,18;1,3,75\}$, $\{116,90,30;1,3,87\}$, $\{116,90,30;1,6,87\}$, $\{140,108,24;1,9,105\}$, $\{152,117,39;1,9,114\}$, $\{164,126,40;1,4,123\}$, $\{200,153,48;1,8,150\}$, $\{204,156,48;1,12,153\}$, $\{216,165,55;1,5,162\}$, $\{236,180,48;1,9,177\}$, $\{260,198,66;1,9,195\}$, $\{356,270,90;1,9,267\}$, $\{476,360,84;1,21,357\}$, $\{500,378,108;1,18,375\}$.

Ключевую роль в доказательстве теорем играет следующая граница Кулена-Пака [2, лемма 2].

Предложение 3. *Пусть* Γ *– дистанционно регулярный граф степени* k *и диаметра* $d\geq 2$. *Если окрестность некоторой вершины содержит* s*-коклику, то*

$$c_2-1\geq\frac{2\left(\left(a_1+1\right)s-k\right)}{s\left(s-1\right)}.$$

2. Максимальные коклики локальных подграфов.

Пусть Γ – граф Шилла с $b=4$ и окрестность некоторой вершины содержит s-коклику.

Лемма 1. *Если* Γ *имеет массив пересечений* $\{140,108,36;1,3,105\}$, *то* Γ *– граф Тервиллигера.*

Доказательство. Пусть Γ имеет массив пересечений $\{140, 108,36;1,3,105\}$. Тогда $a_1=31$ и при $s=5$ имеем равенство $2=(5\cdot 32-140)/10$ в предложении 3. По [2, теорема 4] Γ – граф Тервиллигера.

Лемма 2. *Если* Γ *имеет массив пересечений* $\{188,144,48;1,3,141\}$, $\{196,150,48;1,4,147\}$, $\{220,168,48;1,3,165\}$, $\{224,171,57;1,3,168\}$, $\{308,234,76;1,4,231\}$, $\{308,234,78;1,3,231\}$, $\{404,306,102;1,3,303\}$, $\{420,318,104;1,4,315\}$, $\{476,360,120;1,3,357\}$, $\{572,432,144;1,9,429\}$, $\{644,486,160;1,4,483\}$, $\{680,513,168;1,8,510\}$, $\{728,549,183;1,3,546\}$, $\{764,576,192;1,9,573\}$, $\{780,588,192;1,12,585\}$, $\{804,606,202;1,2,603\}$, $\{868,654,216;1,4,651\}$, $\{980,738,246;1,3,735\}$, *то* $s\leq 4$.

Доказательство. Пусть Γ имеет массив пересечений $\{196,150,48;1,4,147\}$. Тогда $a_1=45$ и при $s=5$ нарушается неравенство $3\geq(5\cdot 46-196)/10$ в предложении 3.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{220,168,48;1,3,165\}$. Тогда $a_1=51$ и при $s=5$ нарушается неравенство $2\geq(5\cdot 52-220)/10$ в предложении 3.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{224,171,57;1,3,168\}$. Тогда $a_1=52$ и при $s=5$ нарушается неравенство $2\geq(5\cdot 53-224)/10$ в предложении 3.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{308,234,76;1,4,231\}$. Тогда $a_1=73$ и при $s=5$ нарушается неравенство $3\geq(5\cdot 74-308)/10$ в предложении 3.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{308,234,76;1,4,231\}$. Тогда $a_1=73$ и при $s=5$ нарушается неравенство $3\geq(5\cdot 74-308)/10$ в предложении 3.

Аналогично имеем $s\leq 4$ для графа с массивом пересечений $\{308,234,78;1,3,231\}$.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{404,306,102;1,3,303\}$. Тогда $a_1=97$ и при $s=5$ нарушается неравенство $2\geq(5\cdot 98-404)/10$ в предложении 3.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{420, 318, 104; 1, 4, 315\}$. Тогда $a_1 = 101$ и при $s = 5$ нарушается неравенство $3 \geq (5 \cdot 102 - 420) / 10$ в предложении 3.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{476, 360, 120; 1, 3, 357\}$. Тогда $a_1 = 115$ и при $s = 5$ нарушается неравенство $2 \geq (5 \cdot 116 - 476) / 10$ в предложении 3.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{572, 432, 144; 1, 9, 429\}$. Тогда $a_1 = 139$ и при $s = 5$ нарушается неравенство $8 \geq (5 \cdot 140 - 572) / 10$ в предложении 3.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{644, 486, 160; 1, 4, 483\}$. Тогда $a_1 = 157$ и при $s = 5$ нарушается неравенство $3 \geq (5 \cdot 158 - 644) / 10$ в предложении 3.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{680, 513, 168; 1, 8, 510\}$. Тогда $a_1 = 166$ и при $s = 5$ нарушается неравенство $7 \geq (5 \cdot 167 - 680) / 10$ в предложении 3.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{728, 549, 183; 1, 3, 546\}$. Тогда $a_1 = 178$ и при $s = 5$ нарушается неравенство $2 \geq (5 \cdot 179 - 728) / 10$ в предложении 3.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{764, 576, 192; 1, 9, 573\}$. Тогда $a_1 = 187$ и при $s = 5$ нарушается неравенство $8 \geq (5 \cdot 188 - 680) / 10$ в предложении 3.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{780, 588, 192; 1, 12, 585\}$. Тогда $a_1 = 191$ и при $s = 5$ нарушается неравенство $11 \geq (5 \cdot 192 - 780) / 10$ в предложении 3.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{804, 606, 202; 1, 2, 603\}$. Тогда $a_1 = 197$ и при $s = 5$ нарушается неравенство $1 \geq (5 \cdot 199 - 804) / 10$ в предложении 3.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{868, 654, 216; 1, 4, 651\}$. Тогда $a_1 = 213$ и при $s = 5$ нарушается неравенство $3 \geq (5 \cdot 214 - 868) / 10$ в предложении 3.

Аналогично имеем $s \leq 4$ для графа с массивом пересечений $\{980, 738, 246; 1, 3, 735\}$.

3. Графы Шилла с $s \leq 4$.

В этом разделе изучаются графы с $b = 4$, в которых окрестности вершин не содержат 5-коклик.

Лемма 3. *Граф* Γ *с массивом пересечений* $\{140, 108, 36; 1, 3, 105\}$ *не существует.*

Доказательство. По лемме 1 Γ – граф Тервиллигера. С другой стороны, по [1, следствие 1.16.6] граф Γ не является графом Тервиллигера.

Теорема 1 доказана.

Лемма 4. *Графы с массивами пересечений* $\{188, 144, 48; 1, 3, 141\}$, $\{196, 150, 48; 1, 4, 147\}$, $\{220, 168, 48; 1, 3, 165\}$, $\{224, 171, 57; 1, 3, 168\}$, $\{308, 234, 76; 1, 4, 231\}$, $\{308, 234, 78; 1, 3, 231\}$, $\{404, 306, 102; 1, 3, 303\}$, $\{420, 318, 104; 1, 4, 315\}$, $\{476, 360, 120; 1, 3, 357\}$, $\{572, 432, 144; 1, 9, 429\}$, $\{644, 486, 160; 1, 4, 483\}$, $\{680, 513, 168; 1, 8, 510\}$, $\{728, 549, 183; 1, 3, 546\}$, $\{764, 576, 192; 1, 9, 573\}$, $\{780, 588, 192; 1, 12, 585\}$, $\{804, 606, 202; 1, 2, 603\}$, $\{868, 654, 216; 1, 4, 651\}$, $\{980, 738, 246; 1, 3, 735\}$ *не существуют.*

Доказательство. Пусть Γ имеет массив пересечений $\{188, 144, 48; 1, 3, 141\}$. Тогда $a_1 = 43$, противоречие с тем, что $4(43+1) < 188$.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{196, 150, 48; 1, 4, 147\}$. Тогда $a_1 = 45$, противоречие с тем, что $4(45+1) < 196$.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{220, 168, 48; 1, 3, 165\}$. Тогда $a_1 = 51$, противоречие с тем, что $4(51+1) < 220$.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{224, 171, 57; 1, 3, 168\}$. Тогда $a_1 = 52$, противоречие с тем, что $4(52+1) < 224$.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{308, 234, 76; 1, 4, 231\}$ или $\{308, 234, 78; 1, 3, 231\}$. Тогда $a_1 = 73$, противоречие с тем, что $4(73+1) < 308$.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{404, 306, 102; 1, 3, 303\}$. Тогда $a_1 = 97$, противоречие с тем, что $4(97+1) < 404$.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{420, 318, 104; 1, 4, 315\}$. Тогда $a_1 = 101$, противоречие с тем, что $4(101+1) < 420$.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{476, 360, 120; 1, 3, 357\}$. Тогда $a_1 = 115$, противоречие с тем, что $4(115+1) < 476$.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{572, 432, 144; 1, 9, 429\}$. Тогда $a_1 = 139$, противоречие с тем, что $4(139+1) < 572$.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{644, 486, 160; 1, 4, 483\}$. Тогда $a_1 = 157$, противоречие с тем, что $4(157+1) < 644$.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{680, 513, 168; 1, 8, 510\}$. Тогда $a_1 = 166$, противоречие с тем, что $4(166+1) < 680$.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{728, 549, 183; 1, 3, 546\}$. Тогда $a_1 = 178$, противоречие с тем, что $4(178+1) < 728$.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{764, 576, 192; 1, 9, 573\}$. Тогда $a_1 = 187$, противоречие с тем, что $4(188+1) < 764$.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{780, 588, 192; 1, 12, 585\}$. Тогда $a_1 = 192$, противоречие с тем, что $4(192+1) < 780$.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{804, 606, 202; 1, 2, 603\}$. Тогда $a_1 = 197$, противоречие с тем, что $4(197+1) < 804$.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{868, 654, 216; 1, 4, 651\}$. Тогда $a_1 = 213$, противоречие с тем, что $4(213+1) < 868$.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{980, 738, 246; 1, 3, 735\}$. Тогда $a_1 = 241$, противоречие с тем, что $4(241+1) < 980$.

Лемма 4 и теорема 2 доказаны.

Работа поддержана грантом РФФИ-ГФЕН Китая (проект 20-51-53013) и Естественным научным фондом Китая (проект 12171126).

Литература

1. Brouwer, A. E. Distance-Regular Graphs / A. E. Brouwer, A. M. Cohen, A. Neumaier. – Berlin–Heidelberg–New York : Springer-Verlag, 1989. – 495 p.

2. Koolen J. H., Shilla distance-regular graphs / J. H. Koolen, J. Park // Europ. J. Comb. – 2010. – № 31. – P. 2064–2073.

3. Белоусов, И. Н. Дистанционно регулярные графы Шилла с $b_2 = sc_2$ / И. Н. Белоусов // Труды ИММ УрО РАН. – 2018. – № 24:3. – С. 16–26.

[1]Университет провинции Хайнань,
г. Хэйкоу

[2]Институт математики
и механики им. Н.Н. Красовского
УрО РАН

Поступила в редакцию 29.09.2021