Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (129), 2021

УДК 519.872

Система массового обслуживания с декрементным обслуживанием очереди и адаптивными отдыхами прибора

Ю.В. Синюгина

Рассмотрена система массового обслуживания с декрементным обслуживанием и адаптивными отдыхами. Получено стационарное распределение числа запросов в системе в момент окончания отдыха, стационарное распределение числа запросов в системе в момент ухода запроса из системы, преобразование Лапласа-Стилтьеса времени ожидания.
Ключевые слова: система массового обслуживания, декрементное обслуживание, адаптивные отдыхи.

A queuing system with decrementing service and adaptive vacations is considered. The stationary distribution of the number of customers in the system at the end of a vacation, the stationary distribution of the number of customers in the system at a customer departure time, and the Laplace-Stieltjes transform of the waiting time are obtained.
Keywords: queuing system, decrementing service, adaptive vacations.

Введение. Системы массового обслуживания с отдыхами прибора используются для моделирования многих реальных систем (производственных, коммуникационных, компьютерных). Рассмотрение различных дисциплин обслуживания очереди и отдыхов прибора значительно расширяет возможности применения систем с отдыхами. Так, в частности, системы с отдыхами часто используются при анализе поллинговых систем, которые, в свою очередь, применяются для моделирования, например, беспроводных сетей передачи информации. В связи с интенсивным развитием последних, интерес к системам с отдыхами с каждым годом только растет. Описание моделей и методы исследования систем с отдыхами можно найти в работах [1], [2].

В данной работе рассматривается модель системы с отдыхами с декрементной дисциплиной обслуживания очереди и адаптивной длиной отдыхов, когда длительность отдыха зависит от состояния очереди в момент окончания предыдущего отдыха. Такие системы представляют значительный практический интерес и могут быть использованы, например, при анализе поллинговых систем с адаптивным механизмом опроса очередей.

Описание системы. Рассмотрим однолинейную систему с бесконечным буфером, на вход которой поступает стационарный пуассоновский поток запросов с параметром λ. Дисциплина обслуживания очереди предполагается следующая. В каждом периоде обслуживания, который начинается в момент окончания отдыха, прибор обслуживает запросы до тех пор, пока длина очереди не станет на M запросов меньше, чем была в момент окончания отдыха, либо пока очередь не опустеет. Время обслуживания запроса имеет функцию распределения $B(t)$ с преобразованием Лапласа-Стилтьеса $\beta(s)=\int_0^\infty e^{-st}dB(t), \quad Re\, s>0$ и конечными начальными моментами $b_k=\int_0^\infty t^k dB(t)$, $k\ge 1$. После того, как обслуживание запросов прекращается, прибор уходит на отдых, длительность которого характеризуется функцией распределения $H(t)$ с преобразованием Лапласа-Стилтьеса $h(s)=\int_0^\infty e^{-st}dH(t), \quad Re\, s>0$ и конечными начальными моментами $h_k=\int_0^\infty t^k dH(t)$, $k\ge 1$.

По окончании отдыха прибор возвращается в систему и, если очередь не пуста, начинается обслуживание запросов. В случае, если очередь оказывается пустой, прибор уходит на отдых специального типа, длительность которого характеризуется функцией распределения $\tilde{H}(t)$ с преобразованием Лапласа-Стилтьеса $\tilde{h}(s)=\int_0^\infty e^{-st}d\tilde{H}(t)$, $Re\, s>0$ и конечными начальными моментами $\tilde{h}_k=\int_0^\infty t^k d\tilde{H}(t)$, $k\ge 1$.

Очевидно, что процесс, описывающий состояние системы в произвольный момент времени, является немарковским, и его исследование напрямую является невозможным. Поэтому анализ системы будем проводить в несколько этапов. Сначала введем и исследуем вложенную цепь Маркова. Затем, используя метод *regeneration cycle*, предложенный в [2], найдем стационарное распределение состояний системы в момент ухода произвольного запроса, после чего можно будет найти стационарное распределение времени ожидания.

Стационарное распределение вложенной цепи Маркова. Пусть t_n – это n-ый момент окончания отдыха, $n\ge 1$, i_n – число запросов в системе в момент t_n.

Лемма 1. *Процесс* i_n, $n\ge 1$, *является цепью Маркова с дискретным временем, и ее одношаговые вероятности переходов* $p_{j,k}=P\{i_{n+1}=k\,|\,i_n=j\}$, $j,k\ge 0$, *имеют вид:*

$$p_{0,k}=\int_0^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}d\tilde{H}(t),$$

$$p_{j,k}=\int_0^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}dH(t),\ 0<j<M,$$

$$p_{j,k}=\int_0^\infty \frac{(\lambda t)^{k-j+M}}{(k-j+M)!}e^{-\lambda t}dH(t),\ j\ge M, k\ge j-M\ge 0,$$

$$p_{j,k}=0,\ j\ge M, k<j-M.$$

Теорема 1. *Цепь Маркова* i_n, $n\ge 1$, *является эргодической, если выполнены следующие условия:*

$$\rho=\lambda b_1<1, \tag{1}$$

$$\lambda h_1<M. \tag{2}$$

Доказательство. Условие (1) вытекает из необходимого и достаточного условия существования стационарного режима классической системы M/G/1.

Для доказательства условия эргодичности (2) воспользуемся теоремой Мустафы [3], согласно которой, для того, чтобы цепь Маркова i_n, $n\ge 1$, имела стационарное распределение, достаточно существование $\varepsilon>0$, натурального числа i_0 и набора неотрицательных чисел $\mathbf{x}_i$, $i\ge 0$, таких, что:

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j}\mathbf{x}_j-\mathbf{x}_i<-\varepsilon,\ i>i_0, \tag{3}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j}\mathbf{x}_j<\infty,\ i=\overline{0,i_0}. \tag{4}$$

Определим числа $\mathbf{x}_i$ как $\mathbf{x}_i=i$, $i\ge 0$, и в качестве i_0 возьмем $i_0=M-1$. Тогда, используя лемму 1, преобразуем левую часть неравенства (3) к виду:

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j}\mathbf{x}_j-\mathbf{x}_i=\sum_{j=i-M}^{\infty}\left(\int_0^\infty \frac{(\lambda t)^{j-i+M}}{(j-i+M)!}e^{-\lambda t}dH(t)\right)j-i=$$

$$= \lambda h_1 - M \le -\varepsilon.$$

Это означает, что если неравенство (2) выполнено, тогда условие (3) выполняется. Легко видеть, что условие (4) также выполняется. Теорема доказана.

Предположим, что условия (1), (2) выполнены, тогда существуют стационарные вероятности состояний системы:

$$q_k = \lim_{n\to\infty} P\{i_n = k\},\ k \ge 0.$$

Эти вероятности удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений:

$$q_k = q_0 \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} d\tilde{H}(t) + \sum_{j=1}^{M-1} q_j \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dH(t) + \sum_{j=M}^{\infty} q_j \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^{k-j+M}}{(k-j+M)!} e^{-\lambda t} dH(t),\ k \ge 0.$$

Для решения этой системы введем в рассмотрение производящую функцию $Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k$, $|z| \le 1$.

Лемма 2. *Производящая функция $Q(z)$ удовлетворяет следующему функциональному уравнению:*

$$Q(z) = \frac{q_0\left(\tilde{h}(\lambda-\lambda z) - h(\lambda-\lambda z)\right) z^M + \left(Q_M(1) z^M - Q_M(z)\right) h(\lambda - \lambda z)}{z^M - h(\lambda - \lambda z)}, \tag{5}$$

где

$$Q_M(z) = \sum_{k=0}^{M-1} q_k z^k. \tag{6}$$

Как видно, производящая функция $Q(z)$ определена с точностью до M неизвестных вероятностей $q_k,\ k = \overline{0, M-1}$. Для нахождения этих вероятностей используем факт аналитичности функции $Q(z)$ в области $|z| < 1$ комплексной плоскости.

С помощью теоремы Клименок-Руше [4] можно показать, что при выполнении условия $\lambda h_1 < M$ уравнение $z^M - h(\lambda - \lambda z) = 0$ имеет простой корень $z = 1$ и $M-1$ корней $z_m,\ m = \overline{1, M-1}$, в области $|z| < 1$.

Для нахождения корней $z_m,\ m = \overline{1, M-1}$, можно воспользоваться теоремой Лагранжа [5]:

$$z_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{2\pi m n}{M} i}}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(h(\lambda - \lambda z)\right)^{\frac{n}{M}} \Big|_{z=0},\ m = \overline{1, M-1}.$$

Так как функция $Q(z)$ аналитична в области $|z| < 1$, то числитель правой части уравнения (5) также равен нулю в точках $z = z_m,\ m = \overline{1, M-1}$, зануляющих знаменатель. Таким образом, неизвестные вероятности $q_k,\ k = \overline{0, M-1}$, удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$q_0\left(\tilde{h}(\lambda - \lambda z_m) - h(\lambda - \lambda z_m)\right) z_m^M + \sum_{k=0}^{M-1} q_k \left(z_m^M - z_m^k\right) h(\lambda - \lambda z_m) = 0,\ m = \overline{1, M-1}. \tag{7}$$

Еще одно уравнение получим из условия нормировки $Q(1) = 1$:

$$Q'_M(1) = q_0 \lambda (\tilde{h}_1 - h_1) + M(Q_M(1) - 1) + \lambda h_1, \tag{8}$$

или

$$\sum_{k=0}^{M-1} q_k (M - k) + q_0 \lambda (\tilde{h}_1 - h_1) - M + \lambda h_1 = 0. \tag{9}$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. *Производящая функция $Q(z)$ задается формулами (5) и (6), где коэффициенты $\{q_k; k = \overline{0, M-1}\}$ функции $Q_M(z)$ определяются как единственное решение системы уравнений (7), (9).*

Следствие 1. *Среднее число запросов в системе в момент окончания отдыха вычисляется по формуле:*

$$L_v = Q'(1) = q_0\lambda(\tilde{h}_1 - h_1) + \lambda h_1 + \frac{M(M-1)(Q_M(1)-1) - Q''_M(1) + q_0\lambda^2(\tilde{h}_2 - h_2) + \lambda^2 h_2}{2(M-\lambda h_1)}.$$

Стационарное распределение числа запросов в момент ухода произвольного запроса. Обозначим через $\Pi(z)$ производящую функцию числа запросов в системе в момент ухода произвольного запроса из системы.

Теорема 3. *Производящая функция* $\Pi(z)$ *задается формулой:*

$$\Pi(z) = \frac{1-\rho}{q_0\lambda(\tilde{h}_1 - h_1) + \lambda h_1} \cdot \frac{\beta(\lambda - \lambda z)}{\beta(\lambda-\lambda z) - z} \times$$

$$\times \frac{\left(Q_M(z) - Q_M(1)z^M\right)(h(\lambda-\lambda z)-1) + q_0\left(\tilde{h}(\lambda-\lambda z) - h(\lambda-\lambda z)\right)(1-z^M)}{z^M - h(\lambda-\lambda z)}.$$

Доказательство. Для нахождения производящей функции $\Pi(z)$ воспользуемся формулой (5.9) из монографии [2], которая связывает стационарное распределение числа запросов в системе в произвольный момент ухода запроса из системы со стационарным распределением числа запросов в системе в произвольный момент ухода запроса в данном периоде обслуживания:

$$\Pi(z) = \frac{E\left[\sum_{n=1}^{\Phi} z^{L_n}\right]}{E[\Phi]}, \tag{10}$$

где L_n есть число запросов в системе сразу после ухода из системы n-го запроса в период обслуживания, а $E[\Phi]$ есть среднее число запросов, обслуженных в течение периода обслуживания.

Поскольку порядок обслуживания запросов не влияет на число обслуженных запросов за период обслуживания, в дальнейших рассуждениях будем полагать, что запросы обслуживаются согласно дисциплине *LIFO*.

Для подсчета величины $E[\Phi]$ будем рассматривать весь период обслуживания как совокупность последовательных периодов занятости, порождаемых каждым запросом, присутствующим в системе в момент окончания отдыха. Это означает, что если в момент окончания отдыха в системе находилось $k < M$ запросов, то период обслуживания будет состоять из k периодов занятости, если $k \ge M$ – то из M периодов занятости. Тогда, учитывая тот факт, что среднее число запросов, обслуженных за один период занятости, равно $\frac{1}{1-\rho}$, получаем следующую формулу:

$$E[\Phi] = \sum_{k=1}^{M-1} k q_k \frac{1}{1-\rho} + \sum_{k=M}^{\infty} M q_k \frac{1}{1-\rho} = \frac{Q'_M(1)}{1-\rho} + \frac{M(1-Q_M(1))}{1-\rho},$$

или, с учетом (8),

$$E[\Phi] = \frac{q_0\lambda(\tilde{h}_1 - h_1) + \lambda h_1}{1-\rho}. \tag{11}$$

Для подсчета величины $E\left[\sum_{n=1}^{\Phi} z^{L_n}\right]$ продолжим начатые выше рассуждения. Заметим, что каждый период занятости начинается с $k, k-1, \dots, 1$ запросами в системе, если в момент окончания отдыха в системе было $k < M$ запросов, и с $k, k-1, \dots, k-M+1$ запросами, если число запросов в момент окончания отдыха было $k \ge M$. Число запросов, остающихся в системе в момент ухода запроса в текущем периоде занятости, равно числу запросов, которые находились в системе в начале этого периода занятости минус один запрос и плюс те запросы, которые поступают и обслуживаются во время данного периода занятости. Таким образом, учитывая все вышесказанное, получаем формулу:

$$E\left[\sum_{n=1}^{\Phi} z^{L_n}\right]=$$
$$=\sum_{k=1}^{M-1} q_k \sum_{j=1}^{k} z^{j-1}\frac{(1-z)\beta(\lambda-\lambda z)}{\beta(\lambda-\lambda z)-z}+\sum_{k=M}^{\infty} q_k \sum_{j=k-M+1}^{k} z^{j-1}\frac{(1-z)\beta(\lambda-\lambda z)}{\beta(\lambda-\lambda z)-z}=$$
$$=\sum_{k=1}^{M-1} q_k(1-z^k)\frac{\beta(\lambda-\lambda z)}{\beta(\lambda-\lambda z)-z}+\sum_{k=M}^{\infty} q_k(z^{k-M}-z^k)\frac{\beta(\lambda-\lambda z)}{\beta(\lambda-\lambda z)-z}=$$
$$=\frac{\beta(\lambda-\lambda z)}{\beta(\lambda-\lambda z)-z}\cdot\left(Q_M(1)-Q(z)+\frac{Q(z)-Q_M(z)}{z^M}\right).$$

Используя (5) в последнем выражении, получаем

$$E\left[\sum_{n=1}^{\Phi} z^{L_n}\right]=\frac{\beta(\lambda-\lambda z)}{\beta(\lambda-\lambda z)-z}\times$$
$$\times\frac{(Q_M(z)-Q_M(1)z^M)(h(\lambda-\lambda z)-1)+q_0(\tilde{h}(\lambda-\lambda z)-h(\lambda-\lambda z))(1-z^M)}{z^M-h(\lambda-\lambda z)}. \qquad (12)$$

Подставляя (11) и (12) в (10), получаем требуемую формулу. Теорема доказана.

Следствие 2. *Среднее число запросов в системе сразу после ухода произвольного запроса вычисляется по формуле:*

$$L_d=\Pi'(1)=\rho+\frac{1}{q_0\lambda(\tilde{h}_1-h_1)+\lambda h_1}\cdot\Big(\frac{(Q_M(1)M(M-1)-Q''_M(1))\lambda h_1}{2(M-\lambda h_1)}-$$
$$-\frac{(q_0\lambda(\tilde{h}_1-h_1)-M+\lambda h_1)\lambda^2 h_2}{2(M-\lambda h_1)}+\frac{q_0\lambda^2(\tilde{h}_2-h_2)M+q_0\lambda(\tilde{h}_1-h_1)M(M-1)}{2(M-\lambda h_1)}+$$
$$+\frac{((q_0\lambda(\tilde{h}_1-h_1)-M+\lambda h_1)\lambda h_1-q_0\lambda(\tilde{h}_1-h_1)M)(M(M-1)-\lambda^2 h_2)}{2(M-\lambda h_1)^2}-$$
$$-\frac{((q_0\lambda(\tilde{h}_1-h_1)-M+\lambda h_1)\lambda h_1-q_0\lambda(\tilde{h}_1-h_1)M)\lambda^2 b_2}{2(M-\lambda h_1)(1-\rho)}\Big).$$

Стационарное распределение времени ожидания произвольного запроса. Будем полагать, что запросы обслуживаются согласно дисциплине *FIFO*. Обозначим через $W(x)$ функцию распределения времени ожидания произвольного запроса, а через $w(s)$ – ее преобразование Лапласа-Стилтьеса.

Теорема 4. *Преобразование Лапласа-Стилтьеса* $w(s)$ *задается формулой:*

$$w(s)=\frac{1-\rho}{q_0\lambda(\tilde{h}_1-h_1)+\lambda h_1}\times$$
$$\times\frac{(Q_M(1-s/\lambda)-Q_M(1)(1-s/\lambda)^M)(h(s)-1)+q_0(\tilde{h}(s)-h(s))(1-(1-s/\lambda)^M)}{((1-s/\lambda)^M-h(s))(\beta(s)-1+s/\lambda)}.$$

Доказательство. Поскольку при дисциплине обслуживания *FIFO* запросы, остающиеся в системе в момент ухода произвольного запроса – это те запросы, которые поступили в систему за время пребывания в ней уходящего запроса, то справедливо соотношение:

$$\Pi(z)=w(\lambda-\lambda z)\beta(\lambda-\lambda z),$$

откуда, с помощью замены $z=1-s/\lambda$, получаем формулу:

$$w(s)=\Pi(1-s/\lambda)/\beta(s),$$

из которой и теоремы 3 и получаем доказываемую формулу. Теорема доказана.

Следствие 3. *Среднее время ожидания произвольного запроса задается формулой:*

$$W_1=\frac{1}{q_0\lambda(\tilde{h}_1-h_1)+\lambda h_1}\cdot\Big(\frac{(Q_M(1)M(M-1)-Q''_M(1))h_1}{2(M-\lambda h_1)}-$$

$$-\frac{(q_0\lambda(\tilde{h}_1-h_1)-M+\lambda h_1)\lambda h_2}{2(M-\lambda h_1)}+\frac{q_0\lambda(\tilde{h}_2-h_2)M+q_0(\tilde{h}_1-h_1)M(M-1)}{2(M-\lambda h_1)}+$$

$$+\frac{((q_0\lambda(\tilde{h}_1-h_1)-M+\lambda h_1)h_1-q_0(\tilde{h}_1-h_1)M)(M(M-1)-\lambda^2 h_2)}{2(M-\lambda h_1)^2}-$$

$$-\frac{((q_0\lambda(\tilde{h}_1-h_1)-M+\lambda h_1)h_1-q_0(\tilde{h}_1-h_1)M)\lambda^2 b_2}{2(M-\lambda h_1)(1-\rho)}\Bigg).$$

Заключение. Рассмотрена система массового обслуживания с декрементным обслуживанием очереди и адаптивными отдыхами прибора. Доказано условие эргодичности вложенной по моментам окончания отдыхов цепи Маркова, получены стационарное распределение вероятностей числа запросов в момент окончания отдыха, стационарное распределение числа запросов в момент ухода запроса из системы, преобразование Лапласа-Стилтьеса времени ожидания. Результаты могут быть использованы для анализа систем поллинга с адаптивным механизмом опроса очередей.

Литература

1. Doshi, B. T. Queueing Systems with Vacations – a Survey / B. T. Doshi // Queueing Systems. – 1986. – V. 1 (1). – P. 29–66.

2. Takagi, H. Queueing Analysis : A Foundation of Performance Evaluation / H. Takagi. – Amsterdam ; New York : North-Holland, 1991. – V. 1 : Vacation and Priority Systems. Pt. 1. – 488 p.

3. Moustafa, M.D. Input – output Markov process / M. D. Moustafa // Proc. Koninkl. Net. Akad. Wetensch. – 1957. – V. A60. – P. 112–118.

4. Klimenok, V. I. On the modification of Rouche's theorem for the queueing theory problems / V. I. Klimenok // Queueing Systems. – 2001. – V. 38 (4). – P. 431–434.

5. Saaty, T. L. Elements of Queueing Theory with Applications / T. L. Saaty. – N.Y. : McGraw-Hill, 1961. – 423 p.

Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины

Поступила в редакцию 01.11.2021