

Инерционная математическая модель динамического деформирования круговой трёхслойной ступенчатой пластины

М.В. МАРКОВА

В работе представлен вывод системы уравнений, описывающей процесс колебания трёхслойной круговой пластины ступенчато-переменной толщины через перемещения, возникающие при её деформации. Рассмотрена возможность применения полученной системы уравнений для моделирования процесса колебания круговой трёхслойной пластины постоянной толщины. По значениям частот свободных колебаний выполнен анализ точности численных результатов для полученной механико-математической модели.

Ключевые слова: колебание трёхслойной пластины, ступенчатая трёхслойная пластина.

The paper presents the derivation of a system of equations governing the vibration of a staged-thickness three-layer circular plate through motions that occur during the deformation. The possibility of applying the obtained system of equations to simulate the vibration of a circular constant-thickness three-layer plate is considered. The accuracy of numerical results for the obtained symbolic-form simulation model is analyzed using the estimated value of the frequencies of free vibrations.

Keywords: vibration of a three-layer plate, staged-thickness three-layer plate.

Введение. Современное конструирование базируется на выборе оптимальных с экономической и функциональной точек зрения решений. В связи с этим в авиа-, ракето-, и судостроении, а также при разработке проектов строительных сооружений, всё чаще отдаётся предпочтение трёхслойным элементам конструкций, сочетающим в себе высокие прочностные, жёсткостные, звукоизоляционные и теплотехнические показатели при одновременном минимуме весовых характеристик. Подобная совокупность факторов обусловлена применением в таких элементах конструкций тонких внешних несущих слоёв, характеризующихся высокой прочностью и жёсткостью, и лёгкого связующего срединного заполнителя, обеспечивающего совместную работу внешних несущих слоёв и соответствие конструкции в целом дополнительным функциональным требованиям, предъявляемым к ней техническим заданием на проектирование.

Исследованию статического и динамического деформирования трёхслойных элементов конструкций уже было посвящено немало работ [1]–[6]. Здесь будет разобрана механико-математическая модель колебания круговой трёхслойной пластины ступенчатой толщины.

Уравнения движения. Опираясь на вариационный принцип Гамильтона и гипотезу «ломаной» нормали, в работе [6] для круговой (радиусом r) трёхслойной пластины произвольной переменной толщины была представлена система дифференциальных уравнений, описывающая процесс колебания пластины через перемещения, возникающие в ней при деформировании:

$$a_1^+ L_2(u) + a_2^+ L_2(\psi) - a_3^+ L_2(w_{,r}) + a_1^+{}_{,r} u_{,r} + a_2^+{}_{,r} \psi_{,r} - a_3^+{}_{,r} w_{,rr} + a_1^-{}_{,r} \frac{u}{r} + a_2^-{}_{,r} \frac{\psi}{r} - a_3^-{}_{,r} \frac{w_{,r}}{r} - M_1 \ddot{u} - M_2 \ddot{\psi} + M_3 \ddot{w}_{,r} = 0;$$

$$a_2^+ L_2(u) + a_4^+ L_2(\psi) - a_5^+ L_2(w_{,r}) + a_2^+{}_{,r} u_{,r} + a_4^+{}_{,r} \psi_{,r} - a_5^+{}_{,r} w_{,rr} + a_2^-{}_{,r} \frac{u}{r} + a_4^-{}_{,r} \frac{\psi}{r} - a_5^-{}_{,r} \frac{w_{,r}}{r} - M_2 \ddot{u} - M_4 \ddot{\psi} + M_5 \ddot{w}_{,r} = 0;$$

$$a_3^+ L_3(u) + 2a_3^+{}_{,r} L_2(u) + a_5^+ L_3(\psi) + 2a_5^+{}_{,r} L_2(\psi) - a_6^+ L_3(w_{,r}) - 2a_6^+{}_{,r} L_2(w_{,r}) + \left(a_3^+{}_{,rr} + \frac{a_3^-{}_{,r}}{r} \right) u_{,r} + \left(a_5^+{}_{,rr} + \frac{a_5^-{}_{,r}}{r} \right) \psi_{,r} - \left(a_6^+{}_{,rr} + \frac{a_6^-{}_{,r}}{r} \right) w_{,rr} + \left(a_3^-{}_{,rr} - \frac{a_3^+{}_{,r}}{r} \right) \frac{u}{r} + \left(a_5^-{}_{,rr} - \frac{a_5^+{}_{,r}}{r} \right) \frac{\psi}{r} - \left(a_6^-{}_{,rr} - \frac{a_6^+{}_{,r}}{r} \right) \frac{w_{,r}}{r} -$$

$$-\left[M_{3,r} + \frac{M_3}{r}\right]\ddot{u} - \left[M_{5,r} + \frac{M_5}{r}\right]\ddot{\psi} + \left[M_{6,r} + \frac{M_6}{r}\right]\ddot{w}_{,r} - M_3\ddot{u}_{,r} - M_5\ddot{\psi}_{,r} + M_6\ddot{w}_{,rr} - M_1\ddot{w} = -q, \quad (1)$$

где $L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r}(rg)_{,r}\right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}$ и $L_3(g) \equiv \frac{1}{r}(rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}$ –

дифференциальные операторы; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате; w , ψ , u – прогиб пластины, относительный сдвиг в заполнителе и радиальное перемещение координатной поверхности соответственно; M_n и a_n^\pm – коэффициенты, зависящие от плотности, упругих свойств материалов и толщины слоёв пластины; q – внешняя осесимметричная вертикальная распределённая нагрузка.

Для рассмотренной в работе [6] пластины толщины внешних несущих слоёв были представлены некоторыми произвольными функциями, зависящими от радиуса пластины: $h_1 = h_1(r)$ и $h_2 = h_2(r)$, а толщина срединного заполнителя имела постоянную величину: $h_3 = 2c = \text{const}$. Ступенчатая же пластина представляет собой совокупность различных сопряжённых прямолинейных участков, для каждого из которых $h_{1(i)} = \text{const}$ и $h_{2(i)} = \text{const}$ (рисунок 1).

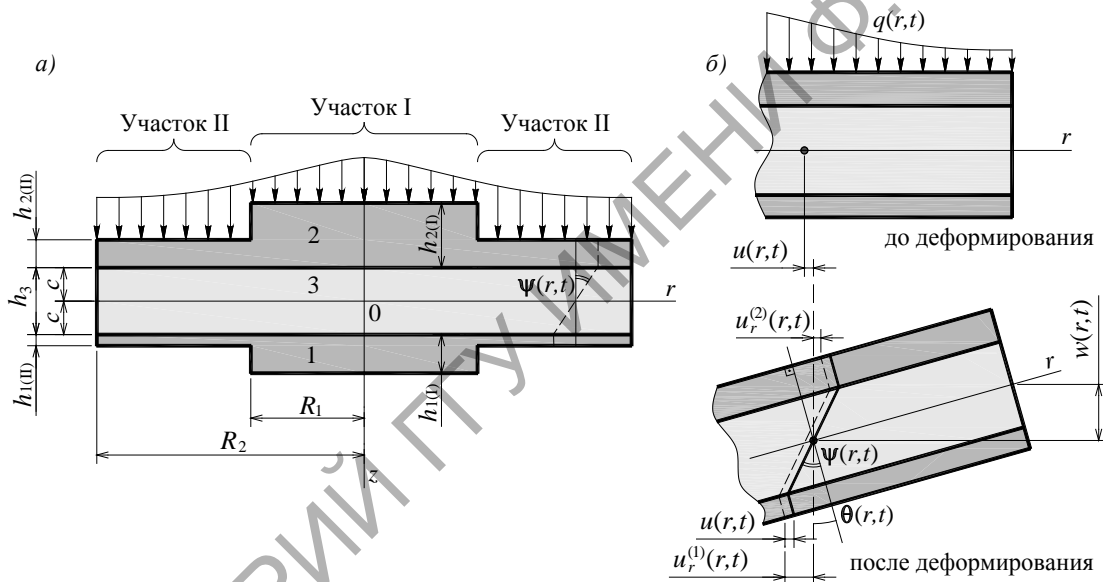


Рисунок 1 – Круговая трёхслойная ступенчатая пластина:
а – общий вид пластины; б – перемещения в деформированной пластине

При $h_1 = \text{const}$ и $h_2 = \text{const}$ система дифференциальных уравнений (1) преобразуется к виду:

$$a_1^+ L_2(u) + a_2^+ L_2(\psi) - a_3^+ L_2(w_{,r}) = M_1 \ddot{u} + M_2 \ddot{\psi} - M_3 \ddot{w}_{,r};$$

$$a_2^+ L_2(u) + a_4^+ L_2(\psi) - a_5^+ L_2(w_{,r}) = M_2 \ddot{u} + M_4 \ddot{\psi} - M_5 \ddot{w}_{,r};$$

$$a_3^+ L_3(u) + a_5^+ L_3(\psi) - a_6^+ L_3(w_{,r}) = M_3 \left[\frac{\ddot{u}}{r} + \ddot{u}_{,r} \right] + M_5 \left[\frac{\ddot{\psi}}{r} + \ddot{\psi}_{,r} \right] - M_6 \left[\frac{\ddot{w}_{,r}}{r} + \ddot{w}_{,rr} \right] + M_1 \ddot{w} - q \quad (2)$$

Данная система будет справедлива для описания перемещений, возникающих как на каждом участке ступенчатой пластины при её колебании, так и при колебании трёхслойной пластины постоянной толщины в целом.

При исследовании поперечных колебаний инерционными силами в продольном направлении и инерционными силами поворота нормали заполнителя можно пренебречь ввиду их незначительного влияния на поперечные перемещения [7]. В этом случае система уравнений движения (2) для каждого участка постоянной толщины ступенчатой пластины примет вид:

$$\begin{aligned}
 a_1^+ L_2(u) + a_2^+ L_2(\psi) - a_3^+ L_2(w_{,r}) + M_3 \ddot{w}_{,r} &= 0; \\
 a_2^+ L_2(u) + a_4^+ L_2(\psi) - a_5^+ L_2(w_{,r}) + M_5 \ddot{w}_{,r} &= 0; \\
 a_3^+ L_3(u) + a_5^+ L_3(\psi) - a_6^+ L_3(w_{,r}) + M_6 \left[\frac{\ddot{w}_{,r}}{r} + \ddot{w}_{,rr} \right] - M_1 \ddot{w} &= -q.
 \end{aligned} \quad (3)$$

С помощью математических преобразований система (3) сводится к виду:

$$\begin{aligned}
 u &= b_1 w_{,r} + r C_1 + \frac{C_2}{r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{a_4^+ M_3 - a_2^+ M_5}{a_1^+ a_4^+ - (a_2^+)^2} \int r \ddot{w} dr; \\
 \psi &= b_2 w_{,r} + r C_3 + \frac{C_4}{r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{a_1^+ M_5 - a_2^+ M_3}{a_1^+ a_4^+ - (a_2^+)^2} \int r \ddot{w} dr;
 \end{aligned}$$

$$L_3(w_{,r}) + D M_1 \ddot{w} + D (b_3 M_3 + b_2 M_5 - M_6) \left(\frac{\ddot{w}_{,r}}{r} + \ddot{w}_{,rr} \right) = D q. \quad (4)$$

Здесь $D = \frac{a_1^+ \cdot [a_1^+ a_4^+ - (a_2^+)^2]}{[a_1^+ a_6^+ - (a_3^+)^2] \cdot [a_1^+ a_4^+ - (a_2^+)^2] - (a_1^+ a_5^+ - a_2^+ a_3^+)^2}$; $b_1 = \frac{a_3^+ a_4^+ - a_2^+ a_5^+}{a_1^+ a_4^+ - (a_2^+)^2}$; $b_2 = \frac{a_1^+ a_5^+ - a_2^+ a_3^+}{a_1^+ a_4^+ - (a_2^+)^2}$;
 $b_3 = \frac{a_3^+ - b_2 a_2^+}{a_1^+}$; C_n – константы интегрирования.

Так же, как и система дифференциальных уравнений (2), система (4) будет справедлива и для каждого участка ступенчатой пластины, и для пластины постоянной толщины в целом.

Следует отметить, что система (4) отличается от аналогичной схожей системы, приведённой в [3], [4], [8] для трёхслойных пластин постоянной толщины, наличием в своём составе дополнительных инерционных членов:

$$D (b_3 M_3 + b_2 M_5 - M_6) \left(\frac{\ddot{w}_{,r}}{r} + \ddot{w}_{,rr} \right), \quad \frac{1}{r} \cdot \frac{a_4^+ M_3 - a_2^+ M_5}{a_1^+ a_4^+ - (a_2^+)^2} \int r \ddot{w} dr \quad \text{и} \quad \frac{1}{r} \cdot \frac{a_1^+ M_5 - a_2^+ M_3}{a_1^+ a_4^+ - (a_2^+)^2} \int r \ddot{w} dr.$$

На примере частот свободных колебаний (при $q = 0$) проследим насколько учёт указанных выше инерционных членов влияет на отклонения в численных результатах расчёта.

Используя оператор Лапласа [9] и приняв $|b_3 M_3 + b_2 M_5 - M_6| = m$, последнее выражение системы (4) при свободных колебаниях пластины примет вид:

$$\Delta \Delta w \pm D m \Delta \ddot{w} + D M_1 \ddot{w} = 0. \quad (5)$$

Знак « \pm » перед коэффициентом m обусловлен тем, что в зависимости от весовых и жёсткостных характеристик слоёв пластины и их взаимной толщины выражение под модулем может иметь как положительное, так и отрицательное значение.

Используя метод Фурье [9] и представив функцию прогиба рассматриваемой пластины в виде произведения двух функций $w(r, t) = W(r) \zeta(t)$, выражение (5) примет вид:

$$\zeta \Delta \Delta W + D \ddot{\zeta} (M_1 W \pm m \Delta W) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\Delta \Delta W}{D (M_1 W \pm m \Delta W)} = -\frac{\ddot{\zeta}}{\zeta}. \quad (6)$$

Здесь $W(r)$ – функция, зависящая только от переменной r (радиуса пластины); $\zeta(t)$ – функция, зависящая только от переменной t (времени колебания).

Дифференциальное уравнение (6) может быть удовлетворено при всех значениях r и t только в том случае, если обе его части будут представлять собой постоянное значение:

$$\frac{\Delta \Delta W}{D (M_1 W \pm m \Delta W)} = -\frac{\ddot{\zeta}}{\zeta} = \text{const} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \Delta \Delta W - \text{const} \cdot D (M_1 W \pm m \Delta W) = 0; \\ \ddot{\zeta} + \text{const} \cdot \zeta = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Ограничим значения const положительными числами: $\text{const} = \omega^2$. Массовый коэффициент M_1 , определяемый плотностью слоёв и их толщиной, всегда положительный, как и коэффициент m , представленный выражением под модулем. Численные исследования показывают, что коэффициент D , определяемый жёсткостью пластины, также всегда имеет положительные значения. Поэтому обозначим $\omega^2 Dm = 2\alpha^2$ и $\omega^2 DM_1 = \beta^4$ и тогда система (7) примет вид:

$$\begin{cases} \Delta\Delta W \mp 2\alpha^2\Delta W - \beta^4 W = 0; \\ \ddot{\zeta} + \omega^2\zeta = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Используя характеристические уравнения, находим решение данной системы [10]:

$$\begin{aligned} W(r) = & C_5 I_0\left(r\sqrt{\sqrt{\alpha^4 + \beta^4} + \alpha^2}\right) + C_6 K_0\left(r\sqrt{\sqrt{\alpha^4 + \beta^4} + \alpha^2}\right) + \\ & + C_7 J_0\left(r\sqrt{\sqrt{\alpha^4 + \beta^4} - \alpha^2}\right) + C_8 Y_0\left(r\sqrt{\sqrt{\alpha^4 + \beta^4} - \alpha^2}\right) \\ \zeta(t) = & A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $J_0(r)$ – функция Бесселя нулевого порядка первого рода; $Y_0(r)$ – функция Бесселя нулевого порядка второго рода (функция Неймана); $I_0(r)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка первого рода (функция Инфельда); $K_0(r)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка второго рода (функция Макдональда) [11], [12]; C_n – константы интегрирования, определяемые из граничных условий закрепления пластины; A и B – константы, определяемые из начальных условий колебания пластины.

Тогда, возвращаясь к методу Фурье, можно записать выражения для определения прогиба пластины при её колебании:

$$\begin{aligned} w = \zeta(t) \left[& C_5 \cdot I_0\left(r\sqrt{\sqrt{\alpha^4 + \beta^4} + \alpha^2}\right) + C_6 \cdot K_0\left(r\sqrt{\sqrt{\alpha^4 + \beta^4} + \alpha^2}\right) + \right. \\ & \left. + C_7 \cdot J_0\left(r\sqrt{\sqrt{\alpha^4 + \beta^4} - \alpha^2}\right) + C_8 \cdot Y_0\left(r\sqrt{\sqrt{\alpha^4 + \beta^4} - \alpha^2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Так как функции Макдональда ($K_n(x)$) и Неймана ($Y_n(x)$) включают в себя логарифм, то в центральной части пластины (при $r = 0$) их значения будут стремиться к бесконечности, и, как следствие, прогиб пластины w будет стремиться к бесконечности, что невозможно.

Поэтому константы интегрирования при $K_0\left(r\sqrt{\sqrt{\alpha^4 + \beta^4} + \alpha^2}\right)$ и $Y_0\left(r\sqrt{\sqrt{\alpha^4 + \beta^4} - \alpha^2}\right)$ принимаем равными нулю: $C_6 = 0$ и $C_8 = 0$.

В случае, если опирание пластины по её контуру представлено жёсткой заделкой, то прогиб, угол поворота нормали, относительный сдвиг в заполнителе и радиальное перемещение координатной поверхности в точке защемления будут отсутствовать:

$$w = w_{,r} = u = \psi = 0.$$

Запишем первые два условия, используя выражение (10):

$$\begin{aligned} C_5 \cdot I_0\left(r\sqrt{\sqrt{\alpha^4 + \beta^4} + \alpha^2}\right) + C_7 \cdot J_0\left(r\sqrt{\sqrt{\alpha^4 + \beta^4} - \alpha^2}\right) = 0; \\ C_5 \cdot \left(\sqrt{\sqrt{\alpha^4 + \beta^4} + \alpha^2}\right) I_1\left(r\sqrt{\sqrt{\alpha^4 + \beta^4} + \alpha^2}\right) - C_7 \cdot \left(\sqrt{\sqrt{\alpha^4 + \beta^4} - \alpha^2}\right) J_1\left(r\sqrt{\sqrt{\alpha^4 + \beta^4} - \alpha^2}\right) = 0 \end{aligned}$$

или

$$C_5 \cdot I_0\left(r\sqrt{\sqrt{\frac{\omega^4 D^2 m^2}{4} + \omega^2 DM_1} + \frac{\omega^2 Dm}{2}}\right) + C_7 \cdot J_0\left(r\sqrt{\sqrt{\frac{\omega^4 D^2 m^2}{4} + \omega^2 DM_1} - \frac{\omega^2 Dm}{2}}\right) = 0;$$

$$C_5 \cdot \sqrt{\sqrt{\frac{\omega^4 D^2 m^2}{4} + \omega^2 DM_1 + \frac{\omega^2 Dm}{2}}} \cdot I_1 \left(r \sqrt{\sqrt{\frac{\omega^4 D^2 m^2}{4} + \omega^2 DM_1 + \frac{\omega^2 Dm}{2}}} \right) -$$

$$- C_7 \cdot \sqrt{\sqrt{\frac{\omega^4 D^2 m^2}{4} + \omega^2 DM_1 - \frac{\omega^2 Dm}{2}}} \cdot J_1 \left(r \sqrt{\sqrt{\frac{\omega^4 D^2 m^2}{4} + \omega^2 DM_1 - \frac{\omega^2 Dm}{2}}} \right) = 0. \quad (12)$$

Однородная система уравнений (12) имеет нетривиальное решение для констант интегрирования C_5 и C_7 при условии равенства нулю её детерминанта. Получаемое из этого условия трансцендентное уравнение будет служить для определения частот свободных колебаний пластины ω при жёсткой заделке внешнего края.

Аналогично строится трансцендентное уравнение для определения частот свободных колебаний при шарнирном опирании внешнего края пластины ($w = M_r = u = \psi = 0$).

Численные исследования. На примере симметричной плоской пластины проследим за изменением процента отклонения в результатах расчёта частот свободных колебаний с ростом толщины внешних слоёв и срединного заполнителя. За базовую примем модель, приведённую в [4], [8] – М-1; механико-математическая модель, представленная системой (4) – М-2. Радиус рассматриваемой пластины $R = 1,0$ м. Исследование проведём для пакета с заполнителем, имеющим высокую плотность: Д16Т–фторопласт–Д16Т, и пакета с заполнителем, имеющим низкую плотность: Д16Т–пенополистирол–Д16Т. Численные результаты расчёта для пластины, защемлённой по внешнему контуру, сведены в таблицу 1.

Таблица 1 – Процент отклонения f в результатах расчёта частот свободных колебаний по различным механико-математическим моделям деформирования защемлённых круговых трёхслойных пластин

Определяемый параметр	$h_3 = 0,30$ м			$h_1 = h_2 = 0,02$ м		
	$h_1 = h_2 = 0,01$ м	$h_1 = h_2 = 0,03$ м	$h_1 = h_2 = 0,05$ м	$h_3 = 0,10$ м	$h_3 = 0,30$ м	$h_3 = 0,50$ м
Д16Т–фторопласт–Д16Т						
М-1: $\omega_0, \text{с}^{-1}$	55,20	261,95	524,25	224,28	148,33	119,46
М-2: $\omega_0, \text{с}^{-1}$	55,24	262,47	528,74	224,35	148,54	119,76
$f, \%$	0,07	0,20	0,86	0,03	0,14	0,25
Д16Т–пенополистирол–Д16Т						
М-1: $\omega_0, \text{с}^{-1}$	167,44	549,55	934,55	375,76	357,65	341,97
М-2: $\omega_0, \text{с}^{-1}$	167,47	549,56	934,17	375,73	357,70	342,15
$f, \%$	0,02	0	-0,04	-0,01	0,01	0,05

Процентное изменение отклонения в численных результатах расчёта для частот свободных колебаний более высокого порядкового номера при изменении толщины слоёв защемлённой по контуру пластины представлено на рисунках 2 и 3.

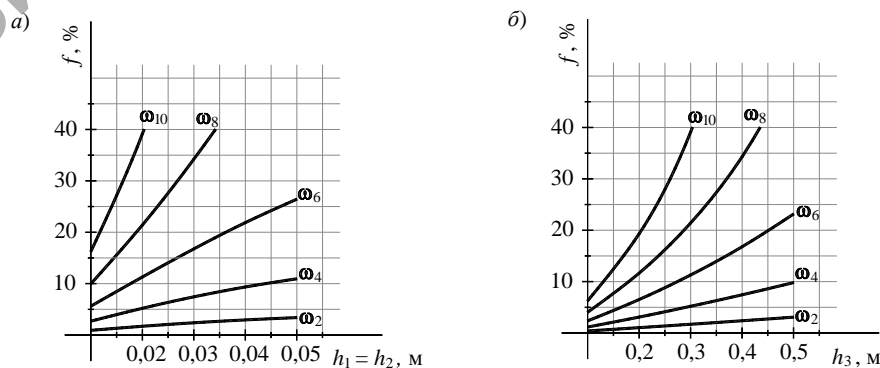


Рисунок 2 – Изменение процента отклонения в результатах расчёта частот свободных колебаний для защемлённого по контуру пакета, представленного слоями Д16Т–фторопласт–Д16Т: а – с ростом толщины внешних слоёв; б – с ростом толщины срединного заполнителя

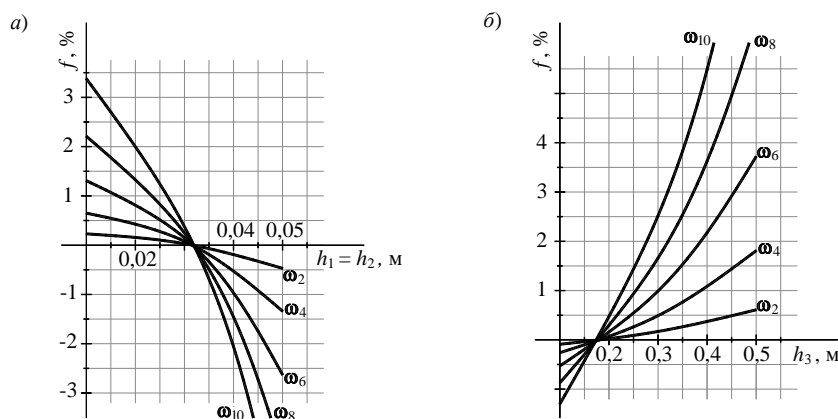


Рисунок 3 – Изменение процента отклонения в результатах расчёта частот свободных колебаний для защемлённого по контуру пакета, представленного слоями Д16Т–пенополистирол–Д16Т: а – с ростом толщины внешних слоёв; б – с ростом толщины срединного заполнителя

Для пластин с наполнителем из материала с высокой плотностью преобладающее влияние на изменение численного отклонения в результатах оказывает именно суммарная масса пластины, а не её жёсткость – увеличение массы сопровождается ростом расхождений между результатами расчёта независимо от изменения при этом жёсткости пластины в большую или меньшую сторону. В то же время для пластин, имеющих наполнитель из легковесных материалов, наблюдается преобладающее влияние изменения жёсткости пластины над изменением её общей массы. Из рисунков 2 и 3 видно, что для каждого последующего порядкового номера частоты свободных колебаний процент отклонения в численных результатах расчёта увеличивается независимо от плотности материала наполнителя, применяемого в пластине.

При шарнирном опирании контура пластины характер изменения кривых подобен случаю жёсткой заделки.

Заключение. Таким образом, в работе была получена система дифференциальных уравнений, описывающая колебания круговой трёхслойной пластины через перемещения, возникающие в ней при деформации. Данная система применима как для пластин постоянной толщины, так и для отдельных участков пластин ступенчато-переменной толщины. Ввиду учёта дополнительных инерционных членов механико-математическая модель колебания, представленная полученной системой уравнений, позволяет иметь более точные результаты расчёта по сравнению со схожей моделью, используемой в исследованиях ранее. Однако величина численных отклонений в результатах расчёта обладает весомым значением лишь для пластин с наполнителем, имеющим высокую плотность.

Работа выполнена в рамках ГПНИ «Механика, металлургия, диагностика в машиностроении».

Литература

1. Громыко, Ю. В. Колебания трёхслойной круговой пластины с отверстием при резонансе / Ю. В. Громыко // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – № 11. – С. 41–48.
2. Леоненко, Д. В. Колебания круговых трёхслойных пластин на упругом основании Пастернака / Д. В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2014. – Т. 11, № 1. – С. 59–63.
3. Леоненко, Д. В. Свободные колебания круговых трёхслойных пластин на упругом основании / Д. В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2008. – Т. 5, № 3. – С. 42–47.
4. Старовойтов, Э. И. Локальные и импульсные нагружения трёхслойных элементов конструкций / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко. – Гомель : БелГУТ, 2003. – 367 с.
5. Старовойтов, Э. И. Колебания круговых композитных пластин на упругом основании под действием локальных нагрузок / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика композитных материалов. – 2016. – Т. 52, № 5. – С. 943–954.

6. Маркова, М. В. Уравнения движения трехслойной круговой пластины переменной толщины / М. В. Маркова // *Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : материалы XXVII Междунар. симпоз. им. А. Г. Горшкова, Вятчи, 17–21 мая 2021 / Московский авиационный ин-т (Нац. исследовательский ун-т)*. – М. : ООО «ТРП», 2021. – Т. 1. – С. 157–158.
7. Гольденвейзер, А. Л. Свободные колебания тонких упругих оболочек / А. Л. Гольденвейзер, В. Б. Лидский, П. Е. Товстик. – М. : Наука, 1979. – 384 с
8. Старовойтов, Э. И. Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости : учеб. для студентов строительных спец. вузов / Э. И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2001. – 344 с.
9. Араманович, И. Г. Уравнения математической физики / И. Г. Араманович, В. И. Левин. – М. : Наука, 1969. – 288 с.
10. Власов, В. З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В. З. Власов, Н. Н. Леонтьев. – М. : Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1960. – 490 с.
11. Бейтман, Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтман, А. Эрдейн. – М. : Наука, 1974. – 296 с.
12. Ватсон, Г. Н. Теория Бесселевых функций / Г. Н. Ватсон. – М. : Изд-во иностр. лит., 1949. – 799 с.

Белорусский государственный
университет транспорта

Поступила в редакцию 29.09.2021

РЕПОЗИТОРИЙ ГГТУ ИМЕНИ Ф. СКОРЯНЫ