

УДК 539.3

Компьютерная реализация методики расчета контактного взаимодействия зубьев зубчатых колес из изотропного и композиционного материалов

В.В. МОЖАРОВСКИЙ, С.В. КИРГИНЦЕВА

В работе рассматривается компьютерная реализация методики расчета контактных напряжений и перемещений зубьев зубчатых колес из изотропного и анизотропного (композиционного) материалов, построенной на основе теории Герца [1] и анизотропной теории упругости [2].

Ключевые слова: зубчатые колеса, контактное напряжение, контактное перемещение, теория Герца, зона контакта, композиционный материал.

The paper considers a computer implementation of the methodology for calculating contact stresses and displacements of gear teeth from isotropic and anisotropic (composite) materials, based on the Hertz theory [1] and anisotropic theory of elasticity [2].

Keywords: gear wheels, contact stress, contact displacement, Hertz theory, contact zone, composite material.

Введение. Зубчатые передачи широко используются во всех отраслях промышленности, таких как автомобилестроение, судостроение, авиастроение и др. Цилиндрические зубчатые колеса просты в изготовлении, применяются для передачи мощности от одного вала к другому валу, изменению скорости и крутящего момента, например, в часах, коробках передач и в других механизмах. Срок службы зубьев зубчатых колес связан со способностью зубьев к выдерживанию контактных нагрузок. Контактные напряжения может вызвать точечная коррозия в зоне контакта, а также износ материала, что приводит к отказу работы зубьев зубчатых колес. Одним из способов для повышения срока службы зубьев зубчатых колес может быть использование композиционных материалов для их изготовления, поскольку композиты обеспечивают улучшенные механические свойства (отношение прочности к весу, твердость), более дешевые эксплуатационные расходы, а также характеризуются уменьшенными уровнями шума и коррозии, износа материала зубьев. Данная проблема привлекает большое внимание исследователей. Результаты исследований отражены, например, в работах [3]–[6] и в других многочисленных статьях и научных публикациях.

Увеличение прочности зубчатых колес является актуальной задачей, поскольку внезапный выход из строя зубьев зубчатых колес представляет потенциальные опасности для промышленности, а их замена необходима для восстановления работы систем, работающих с помощью шестерен, что в свою очередь, является дорогостоящим фактором и влечет за собой потерю рабочего времени.

Постановка задачи и методы решения. Рассмотрим контактную задачу о взаимодействии зубьев зубчатых колес, считая, что их контакт можно моделировать сопряжением двух цилиндров с радиусами R_1 и R_2 . Материалы зубчатых колес, работающих в зубчатой передаче, различны: анизотропный (композиционный) и изотропный материал. Зубья зубчатых колес заменим цилиндрами, прижатыми друг к другу силой P .

Схема контакта двух цилиндров из волокнистого композиционного и изотропного материалов представлена на рисунке 1.

Эрл Бэкингам (1926) использовал теорию Герца, чтобы рассчитать контактное напряжение между вращающейся парой зубьев [3], [7]. Согласно теории Герца [1], когда два изотропных цилиндра прижаты друг к другу, контактное напряжение определяется выражением:

$$\sigma_c = \frac{2P}{\pi a L}, \quad a = \sqrt{\frac{2P \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)}{\pi L \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right)}}$$

где σ_c – максимальное значение контактного напряжения (Н/мм^2); P – сила давления двух цилиндров (Н); a – полуширина зоны контакта (мм); L – осевая длина цилиндров (мм); d_1 и d_2 – диаметры двух цилиндров (мм); E_1 и E_2 – модули упругости материалов двух цилиндров (Н/мм^2); ν_1 и ν_2 – коэффициенты Пуассона материалов двух цилиндров.

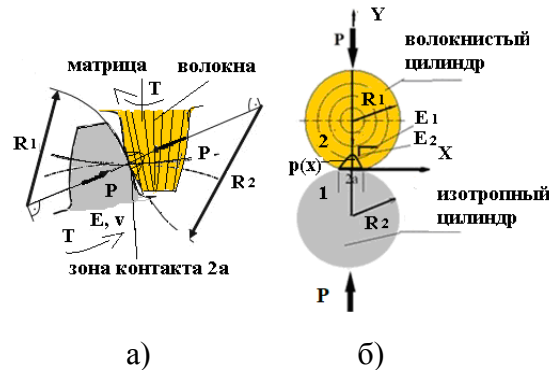


Рисунок 1 – Схема контакта двух зубьев зубчатой передачи из изотропного и композиционного материалов (а); математическая модель контакта, модуль упругости E_1 в направлении оси ox , E_2 – в направлении оси oy (б)

При контакте пары зубьев диаметры d_1 и d_2 представим диаметрами кривизны в точке контакта [1]:

$$d_1 = d_{pp} \sin \phi, \quad d_2 = d_{pg} \sin \phi,$$

где ϕ – угол давления (в градусах); d_{pp} и d_{pg} – диаметры делительной окружности шестерни и зубчатого колеса (мм).

Сила давления двух цилиндров [3], [7]:

$$P = \frac{P_t}{\cos \phi} = \frac{2T}{d_p \cos \phi},$$

где P_t – касательная нагрузка (Н); d_p – диаметр делительной окружности шестерни и зубчатого колеса (мм); T – крутящий момент ($\text{Н}\cdot\text{мм}$), определяемый из формулы [1]

$$P_m = \frac{2\pi n_p T}{60 \times 10^6}, \quad \text{где } n_p \text{ – скорость вращения шестерни и зубчатого колеса (оборотов в минуту);}$$

P_m – передаваемая мощность (кВт).

Осевая длина цилиндров L равна толщине зуба b_3 (мм). Диаметры делительной окружности шестерни и зубчатого колеса d_p могут быть вычислены по формуле $d_p = mz$, где m – модуль (мм); z – количество зубьев шестерни и зубчатого колеса.

Теория Герца отражает расчет контактного взаимодействия изотропных цилиндров. Рассмотрим задачу о взаимодействии цилиндров из волокнистых композиционных материалов. Для разработки математических моделей, учитывающих наличие волокон в контактирующих телах, используем математическую теорию упругости анизотропной среды, применяя концепцию макромеханики. При определении параметров контакта, используются характеристики материалов – объемное содержание волокна в матрице, считая материалы изотропными. А значения модулей упругости и коэффициентов Пуассона, пределов прочности являются различными в зависимости от направления волокон. Связь между напряжениями и деформациями, используя обобщенный закон Гука [6], [8], запишем в виде:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon^{el}\} \quad \text{или} \quad \{\varepsilon^{el}\} = [D]^{-1}\{\sigma\},$$

где σ, ε^{el} – компоненты тензоров напряжений и деформаций; в дальнейшем для ортотропного материала цилиндра примем, что:

$$E_x = E_1, \quad E_y = E_2, \quad \nu_{xy} = \nu_{12}, \quad \nu_{yz} = \nu_{23};$$

здесь $E_j, G_{12}, \nu_{ij}, i, j = \overline{1,3}$ – технические постоянные материала, $[D]^{-1}$ – матрица жесткости системы.

Для определения контактного напряжения при взаимодействии ортотропных цилиндров величина зоны контакта (полуширина) a (мм) определяется по формуле [2]:

$$a = \sqrt{\frac{2PR_1R_2}{\pi ML(R_1 + R_2)}},$$

где P – сила давления двух цилиндров (Н); L – осевая длина цилиндров (толщина цилиндров) (мм); R_1 и R_2 – радиусы двух взаимодействующих цилиндров (мм); параметр $M = \left[((\beta_1 + \beta_2)S_{22})^{(1)} + ((\beta_1 + \beta_2)S_{22})^{(2)} \right]^{-1}$, индексы (1) и (2) – характеризуют материалы двух цилиндров, величины $\beta_{1,2}$ для каждого цилиндра вычисляются по формулам [2]

$$\beta_{1,2} = \left(\sqrt{\frac{S_{66} + 2S_{12} \pm \sqrt{(S_{66} + 2S_{12})^2 - 4S_{11}S_{22}}}{2S_{11}}} \right)^{-1},$$

где постоянные S_{ij} при плоской деформации определяются из [2] следующим образом:

$$S_{11} = (1 - \nu_{13}\nu_{31})/E_1, \quad S_{12} = -(\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{31})/E_1, \quad S_{22} = (1 - \nu_{32}\nu_{23})/E_2, \quad S_{66} = 1/G_{12},$$

индексы i, j технических постоянных материалов цилиндров (модуля упругости E (МПа), коэффициента Пуассона ν и модуля сдвига G (МПа)) характеризуют различные направления и вычисляются по зависимостям по правилу смесей:

$$E_1 = VE_f + (1-V)E_m, \quad E_2 = \frac{E_m(1+\eta V)}{1-\eta V}, \quad G_{12} = G_m \frac{G_f(1+V) + G_m(1-V)}{G_f(1-V) + G_m(1+V)},$$

$$\eta = (E_f - E_m)/(E_f + E_m); \quad \nu_{12} = \nu_{13} = V\nu_f + (1-V)\nu_m, \quad \nu_{21} = \nu_{31} = E_2/E_1 \cdot \nu_{12}, \quad \nu_{23} = \nu_{32} = 1 - \nu_{21} - E_2/(3K),$$

$$K = K_f K_m / (VK_m + (1-V)K_f), \quad K_f = E_f / (3 - 6\nu_f), \quad K_m = E_m / (3 - 6\nu_m);$$

индексы f и m обозначают волокно и матрицу соответственно; V – объемное содержание волокна в матрице материала; K_f, K_m – объемные модули упругости волокна и матрицы.

Уравнение, описывающее давления $p(x)$ в зоне контакта a , имеет вид [2]:

$$p(x) = M \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad -a \leq x \leq a.$$

Максимальные контактные напряжения определяются по формуле $\sigma_c = \frac{2P}{\pi a L}$.

Из формулы видно, что контактные напряжения существенно зависят от ориентации волокон и модулей упругости материала. Например, считая, что все коэффициенты Пуассона для композита равны $\nu = 0.3$, а модуль упругости для цилиндра из волокнистого материала $E_2 = kE_1$ и модуль сдвига $G_{12} = E_2 / (2(1 + \nu))$, параметр M будет иметь вид:

$$M = \left\{ 2 \frac{1 - \nu^2}{E} + \left[\left(\sqrt{\frac{\frac{1 - \nu_k}{k} + \sqrt{\left(\frac{1 - \nu_k}{k}\right)^2}}{1 - \nu_k}} + \sqrt{\frac{\frac{1 - \nu_k}{k} - \sqrt{\left(\frac{1 - \nu_k}{k}\right)^2}}{1 - \nu_k}} - \frac{1}{k} \right)^{-1} + \left(\sqrt{\frac{\frac{1 - \nu_k}{k} - \sqrt{\left(\frac{1 - \nu_k}{k}\right)^2}}{1 - \nu_k}} - \sqrt{\frac{\frac{1 - \nu_k}{k} + \sqrt{\left(\frac{1 - \nu_k}{k}\right)^2}}{1 - \nu_k}} - \frac{1}{k} \right)^{-1} \right] \frac{1 - \nu_k^2}{E_k} \right\}^{-1},$$

где E и ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона изотропного цилиндра; E_k и ν_k – модуль упругости и коэффициент Пуассона цилиндра из композиционного материала.

Нетрудно видеть, что при $k=1$ имеем решение Герца σ_G , что отражено на рисунке 2(а). К примеру, рассмотрев взаимодействие двух цилиндров из изотропного ($E=207$ ГПа, $\nu=0.3$) и композиционного ($E_m=3.5$ ГПа, $E_f=85$ ГПа, $\nu_k=0.3$) материалов, влияние коэффициента k на величину контактного напряжения при различных вариантах содержания волокон в матрице композиционного материала будет следующим (см. рисунок 2б).

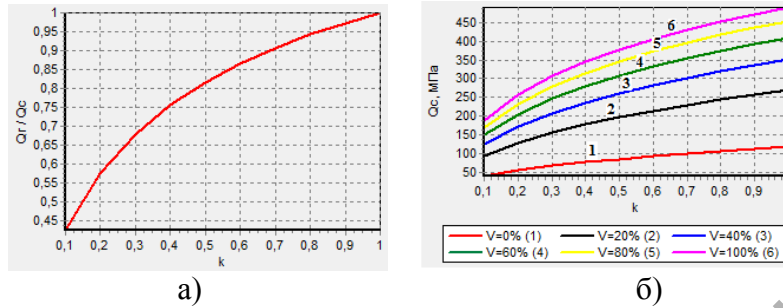


Рисунок 2 – Графики зависимости а) σ_G / σ_c от коэффициента k ; б) σ_c при различных вариантах содержания волокон в матрице композиционного материала от коэффициента k

Рассмотрев, например, композиционный материал одного из цилиндров с 20 %-ным содержанием волокон в матрице материала (модуль упругости $E_1 = 19.85$ ГПа), приходим к выводу, что при увеличении модуля упругости в направлении оси ou (сравним, к примеру, $k = 0.2$ ($E_2 = 3.97$ ГПа) и $k = 0.3$ ($E_2 = 5.96$ ГПа)) контактные напряжения зубьев зубчатых колес увеличиваются на 21 %.

При $k=1$ при содержании волокон $V = 0\%$ и $V = 100\%$ в матрице композиционного материала цилиндр будет изотропным, в итоге получаем задачу Герца. Отличия значений контактных напряжений при взаимодействии двух изотропных цилиндров, вычисленные по данной методике, от решения Герца незначительны – менее 1 %.

Одним из главных параметров, характеризующих контактное взаимодействие зубьев зубчатых колес, является контактное сближение или перемещение. Если материал зубьев колес обладает свойствами ортотропии, то контактное перемещение v (мм) определяется по зависимости [2]:

$$v = -\frac{P}{\pi} \left\{ S_{22}(\beta_1 + \beta_2) \left[\ln \frac{a}{2q} - \frac{1}{2} \right] + \frac{S_{22}}{\beta_1 - \beta_2} (\beta_1^2 \ln \beta_1 - \beta_2^2 \ln \beta_2) + \frac{S_{12}}{\beta_1 - \beta_2} \ln \frac{\beta_2}{\beta_1} \right\},$$

где q – мера контактного сближения расстояния (мм), равная, например, $20a$.

Данная зависимость легко преобразуется в формулу для определения контактного сближения изотропного цилиндра при $\beta_1 = \beta_2 = 1$ и имеет вид [2], [9]:

$$v_1 = -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} P \left[\ln \frac{a}{2q} + \frac{\nu}{2(1-\nu)} \right].$$

Сближение двух контактирующих зубьев δ (мм) представляет собой сумму контактных перемещений каждого зуба.

Расчет зубьев на контактную прочность. Для предотвращения поломок зубьев зубчатых колес необходимо производить расчет зубьев на контактную прочность. В качестве исходной примем формулу:

$$\sigma_{np} = \sqrt{\frac{2M}{\pi} \left(\frac{q}{\rho_{np}} \right)},$$

где $q = F/L$ – нормальная нагрузка на единицу L контактной линии зуба, приняв, что $F = P$ – сила давления между сопряженными зубьями; ρ_{np} – приведенный радиус кривизны профилей сцепляющихся зубьев в полюсе зацепления.

При расчете в формуле q заменим удельной расчетной окружной силой W_{Ht} и учтем, что окружная сила отклонена от линии действия нормальной силы давления на угол ϕ [10]. Тогда имеем:

$$\sigma_{np} = \sqrt{\frac{2M}{\pi} \left(\frac{W_{Ht}}{\rho_{np} \cos \phi} \right)}.$$

Удельная расчетная окружная сила (Н/мм) определяется по формуле:

$$W_{Ht} = \frac{F_t K_{H\phi} K_{H\beta} K_{Hv}}{b_3},$$

где F_t – расчетная окружная сила передачи (Н); $K_{H\phi}$ – коэффициент неравномерности распределения нагрузки между зубьями, для прямозубых передач $K_{H\phi} = 1$; $K_{H\beta}$ – коэффициент неравномерности распределения нагрузки по длине контактных линий в результате погрешностей в зацеплении и деформации зубьев; K_{Hv} – коэффициент динамической нагрузки, возникающей в зацеплении, b_3 – рабочая ширина венца зубчатого колеса (толщина зуба) (мм). Отметим, что методика определения вышеуказанных коэффициентов приводится в работе [10] для изотропных материалов.

Приведенный радиус кривизны цилиндрической прямозубой передачи:

$$\rho_{np} = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_2 \pm \rho_1},$$

где ρ_1 и ρ_2 – радиусы кривизны профилей зубьев шестерни и колеса (мм), знак плюс для наружного зацепления, минус – для внутреннего зацепления.

Так как $\rho_1 = 0.5 d_{pp} \sin \phi$; $\rho_2 = 0.5 d_{pg} \sin \phi$, то для прямозубой передачи:

$$\rho_{np} = \frac{u d_{p1} \sin \phi}{2(u \pm 1)},$$

где u – передаточное число, $u = z_2 / z_1$, где z_1 и z_2 – количество зубьев шестерни и колеса.

После подстановки в формулу значения ρ_{np} получим

$$\sigma_{np} = \sqrt{\frac{2M}{\pi} \times \frac{2(u \pm 1)}{u d_{p1} \sin \phi} \times \frac{W_{Ht}}{\cos \phi}} = Z_H Z_M \sqrt{\frac{u \pm 1}{u} \times \frac{W_{Ht}}{d_{p1}}},$$

где $Z_H = \sqrt{2 / \sin 2\phi}$ – коэффициент формы сопряженных поверхностей зубьев в полюсе зацепления; $Z_M = 2\sqrt{M} / \pi$ – коэффициент, учитывающий механические свойства сопряженных зубьев.

Для уточнения расчета зубьев необходимо ввести коэффициент Z_ξ суммарной длины контактных линий сопряженных зубьев [10], тогда формула расчета зубьев на контактную прочность будет иметь вид:

$$\sigma_{np} = Z_H Z_M Z_\xi \sqrt{\frac{u \pm 1}{u} \times \frac{W_{Ht}}{d_{p1}}} \leq [\sigma_{дон}],$$

где для прямозубых передач $Z_\xi = \sqrt{(4 - \xi) / 3}$; коэффициент торцового перекрытия $\xi = 1.88 - 3.2(1/z_1 + 1/z_2)$, z_1 и z_2 – количество зубьев шестерни и колеса соответственно; $[\sigma_{дон}]$ – допускаемое контактное напряжение для зубьев (МПа).

Реализация расчета. На основании изложенной методики разработан алгоритм и создана программа расчета зоны контакта двух взаимодействующих цилиндров из анизотропного (композиционного) и изотропного материалов, давления в зоне контакта, а также контактных напряжений и перемещений цилиндров. Для примера расчета контактного взаимодействия зубьев зубчатых колес примем случай, когда $d_{pg} = d_{pp} = d_p$. Для тестирования разработанной программы расчета по приведенной методике использовались геометрические и физико-механические данные и результаты расчетов, отраженные в работах [6], [7]. При компьютерном моделировании приняты геометрические и физико-механические характеристики шестерни и зубчатого колеса, представленные в таблице 1.

Таблица 1 – Геометрические параметры и физико-механические характеристики материалов шестерни и зубчатого колеса

Геометрические параметры шестерни и зубчатого колеса		Физико-механические характеристики материала шестерни и зубчатого колеса		
Угол давления ϕ (градусы)	20	Элемент		Зубчатое колесо
		Свойство	Шестерня	
Количество зубьев	17	Модуль упругости (МПа)	$E_m = 3500$	$E = 207000$
Модуль m (мм)	2		$E_f = 85000$	
Толщина зуба b_3 (мм)	12	Коэффициент Пуассона	$\nu_m = 0,35$	$\nu = 0,3$
Диаметр делительной окружности d_p (мм)	34		$\nu_f = 0,2$	
Скорость вращения n_p (оборотов в мин)	1500	Модуль сдвига (МПа)	$G_m = 1300$	$G = 79615$
Мощность P_m (КВт)	1	Содержание волокна V в матрице (%)	20	–

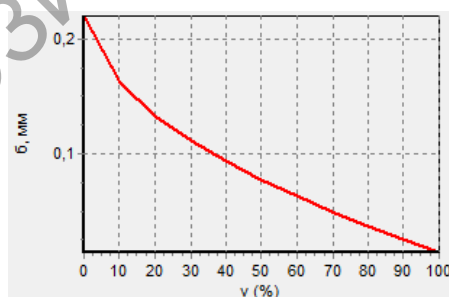
Методом компьютерного моделирования с помощью разработанной программы было проанализировано влияние скорости вращения n_p на величину зоны контакта a , контактные перемещения v_1 и v_2 , сближение цилиндров δ , контактное напряжение σ_c и контактная прочность σ_{np} при взаимодействии двух цилиндров. Входные данные соответствуют данным таблицы 1. Результаты отражены в таблице 2.

Результаты компьютерного моделирования показали значительное влияние скорости вращения на величину зоны контакта двух цилиндров из композиционного и изотропного материалов, а также на контактные напряжения и контактные перемещения, возникающие при их контакте.

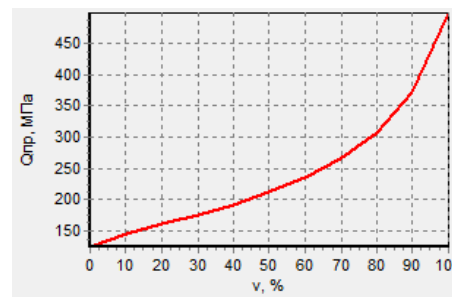
Таблица 2 – Результаты компьютерного моделирования

n_p (обор. в мин)	a (мм)	v_1 (мм)	v_2 (мм)	δ (мм)	σ_c (Н/мм ²)	σ_{np} (Н/мм ²)
1000	0,168	0,194	0,006	0,200	188,90	196,40
1500	0,137	0,130	0,004	0,134	154,30	160,40
2000	0,119	0,097	0,003	0,100	133,60	138,90

На рисунке 3 представлены графики зависимостей сближения δ двух зубьев при их взаимодействии (рисунок 3а) и контактной прочности σ_{np} (рисунок 3б) от процентного содержания волокон V в матрице композиционного материала одного из контактирующих зубьев.



а)



б)

Рисунок 3 – Графики зависимостей:

- а) сближения зубьев δ от процентного содержания волокон; б) контактной прочности σ_{np} от процентного содержания волокон

Одним из критериев работоспособности зубьев зубчатых колес является условие прочности $\sigma_{np} \leq \sigma_{HP}$, где σ_{HP} – допускаемое контактное напряжение, методика расчета которого указана в [11]. Следует обратить внимание на рисунок 2б, который дает возможность оптимально выбрать материал для зубчатого колеса, и в то же время показывает, что не все материалы можно использовать для зубьев (приведенная методика это учитывает). Отметим, что по вышеуказанному алгоритму создан расчет контактной прочности зубьев из композиционных материалов для уменьшения износа и разрушений зубьев зубчатых колес.

Заключение. Приведенная в данной статье методика и разработанная программа расчета контактного взаимодействия зубьев зубчатых колес из композиционного и изотропного материалов позволяет вычислять контактные напряжения и перемещения, максимальное давление и зону контакта двух зубьев зубчатых колес. Указанная методика дает возможность выбора оптимальных геометрических и физико-механических характеристик различных материалов для зубьев зубчатых колес.

Литература

1. Bhandari, V. B. Design of machine elements / V. B. Bhandari. – Tata McGraw-Hill Education, 2010. – 903 p.
2. Можаровский, В. В. Прикладная механика слоистых тел из композитов / В. В. Можаровский, В. Е. Старжинский. – Мн. : Наука и техника, 1988. – 280 с.
3. Rahate, Harshal P. Contact Stress Analysis of Composite Spur Gear using Photo-Stress Method and Finite Element Analysis / Harshal P. Rahate, R. A. Marne // International Research Journal of Engineering and Technology. – 2016. – № 7. – P. 540–545.
4. Pawar, P. B. Analysis of Composite Material Spur Gear under Static Loading Condition / P. B. Pawar, Abhay A. Utpat // Materials Today : Proceedings. – 2015. – № 2. – P. 2968–2974.
5. Devi, N. Mechanical characterization of Aluminium silicon carbide composite / N. Devi [et al.] // International Journal of Applied Engineering Research. – 2011. – Vol. 1, № 4. – P. 126–131.
6. Hossan, M. R. Strength evaluation of polymer composite spur gear by finite element analysis / M. R. Hossan, Z. Hu // International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Boston, October 31–November 6. – Boston, 2008. – P. 1–8.
7. Khan, M. J. Contact Stress Analysis of Stainless Steel Spur Gears using Finite Element Analysis and Comparison with Theoretical Results using Hertz Theory / M. J. Khan [et al.] // Int. J. of Engineering Research and Applications. – 2015. – Vol. 5, № 5. – P. 10–18.
8. Autear, K. K. Mechanics of Composite Materials / K. K. Autear. – Second edition. – Boca Raton, Florida, 2006. – 473 p.
9. Джонсон, К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – М. : Мир, 1989. – 510 с.
10. Иосилевич, Г. Б. Детали машин : учебник для студентов машиностроит. спец. вузов / Г. Б. Иосилевич. – М. : Машиностроение, 1988. – 368 с.
11. Белый, В. А. Металло-полимерные зубчатые передачи / В. А. Белый, В. Е. Старжинский, С. В. Щербаков. – Мн. : Наука и техника, 1981. – 352 с.