Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (129), 2021

Обсуждения

УДК 514.112 (076,2) (075,3)

Решение геометрических задач построением с помощью циркуля и линейки без шкалы с делениями

Г.В. Говор

В данной статье задачи о трисекции угла и удвоении куба решены в пределах точности, достигаемой с помощью обычного циркуля, школьной линейки и остро заточенного карандаша.
Ключевые слова: задача, линейка, циркуль, трисекция, угол, куб.

In this article, the problems of trisection of the angle and doubling of the cube are solved within the limits of accuracy, reached by means of a regular compass, a school ruler and an acutely sharpened pencil.
Keywords: task, ruler, compass, trisection, angle, cube.

История развития геометрии знает ряд задач на построение [1], которые не имеют общепризнанных решений до наших дней. Среди них задачи о трисекции угла и удвоении куба. Объединяющим эти задачи условием решения является построение с помощью двух простых приспособлений – циркуля и линейки без шкалы с делениями.

1. Задача о трисекции угла. При помощи циркуля и линейки без шкалы с делениями необходимо разделить угол на три равные части [2]. Иначе говоря, необходимо построить две трисектрисы угла – лучи, делящие угол на три равны части.

Задача о трисекции угла – древнейшая геометрическая задача. Слово «трисекция» происходит от латинского *tri* – в сложных словах означает «три», и *sectio* – «разрезание», «рассечение». Родиной этой задачи является древняя Греция (примерно V в. до н. э.). Задача о делении угла на три равные части, по-видимому, возникла из потребностей архитектуры и строительной техники. При составлении рабочих чертежей, орнаментов, разного рода украшений, многогранных колоннад и т. д., при строительстве, внутренней и внешней отделке храмов, надгробных памятников и других больших и малых сооружений древние инженеры, художники и архитекторы встретились с необходимостью уметь делить окружность на любое конечное число равных частей, а это в некоторых случаях приводило их к необходимости рассмотрения задачи о трисекции некоторых углов. Делить угол пополам древние греки умели довольно легко, а вот разделить угол на три равные части с допустимой точностью оказалось не всегда возможно. Следовательно, сама жизнь и, прежде всего, практические запросы архитектуры и строительной технологии требовали от геометров хорошо разработанной теории и практики построения правильных многоугольников.

Построить правильный восьмиугольник достаточно просто. Но картина совершенно менялась, когда приходилось строить, скажем, правильный девятиугольник. В этом случае окружность надо разделить на 9 равных частей. Разделив окружность на три равные части, получали центральные углы в 120°. Теперь для завершения построения надо произвести трисекцию угла в 120°, а этого при помощи только циркуля и линейки, оказалось выполнить точно невозможно. Здесь и в других подобных случаях вставала одна из трудных геометрических проблем, которая стала называться как «знаменитая задача о трисекции угла».

Так как в условии задачи величина заданного угла не обозначена, а в геометрии есть развёрнутый, прямой, острый и тупой – предполагаемое решение приведено для всех четырёх углов.

1.1 Трисекция развёрнутого угла. Алгоритм построения трисектрис развёрнутого угла иллюстрирует рисунок 1. Последовательность действий следующая:

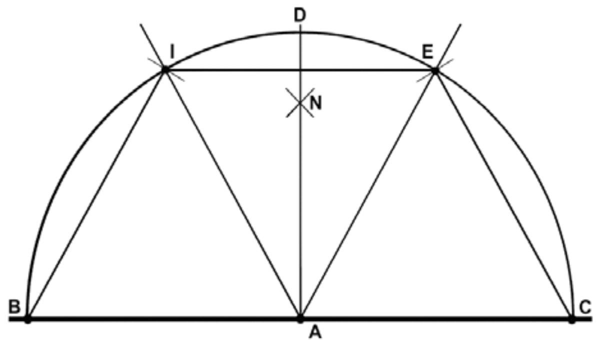

Рисунок 1 – Трисектрис развёрнутого угла

1) При помощи линейки наносим карандашом прямую, приблизительно в центре этой прямой ставим точку и обозначаем её буквой **A**. Затем, при помощи циркуля из точки **A** произвольным радиусом делаем засечки вправо и влево на прямой. Точки пересечения обозначаем буквами **B** и **C**, получая развёрнутый угол **BAC**.

2) При помощи циркуля произвольным радиусом из точек **B** и **C** делаем по засечке до пересечения друг с другом в точке **N.** При помощи линейки проводим прямую из точки **A** через точку **N**, получая биссектрису, делящую развёрнутый угол **BAC** на две равные части.

3) Ставим ножку циркуля в точку **A** и радиусом, равным **AB**, проводим дугу от точки **B** до точки **C**. Точку пересечения дуги **BC** с биссектрисой обозначаем буквой **D**.

4) При помощи циркуля радиусом, равным **AB**, из точек **B** и **C** делаем засечки на дуге **BC**, получая точки **I** и **E**.

5) Соединив при помощи линейки точки **B** с **I**, **I** с **E** и **E** с **C**, получаем хорды **BI**, **IE** и **EC**.

6) Соединив при помощи линейки точки **I** и **E** с точкой **A**, находим трисектрисы **IA** и **EA**, делящие развёрнутый угол **BAC** на три равные части.

7) С помощью циркуля и/или линейки со шкалой с делениями убеждаемся, что хорды **BI**, **IE** и **EC** идентичны.

<u>1.2 Трисекция прямого угла.</u> Последовательность шагов при построении трисектрис прямого угла иллюстрирует рисунок 2:

Рисунок 2 – Трисектрис прямого угла

1) Изображаем прямой угол **BAC** (известно несколько способов корректного построения прямого угла, что в данную задачу не входит).

2) При помощи циркуля радиусом, равным **AB**, из точки **A** проводим дугу **BC**.

3) При помощи циркуля радиусом, равным **AB**, из точек **B** и **C** делаем засечки на дуге **BC** и получаем точки **I** и **E**.

4) Соединив при помощи линейки прямыми точки **B** с **I**, **I** с **E** и **E** с **C,** получаем хорды **BI**, **IE** и **ED**.

5) Соединив при помощи линейки прямыми точки **I** с **A** и **E** с **A**, получаем искомые трисектрисы **IA** и **EA**, делящие прямой угол **BAD** на три равные части.

6) Контрольный замер с помощью циркуля и/или линейки со шкалой с делениями подтверждает, что хорды **BI**, **IE** и **ED** равны.

<u>1.3 Трисекция острого угла.</u> Рисунок 3 иллюстрирует следующую последовательность шагов при построении трисектрис острого угла:

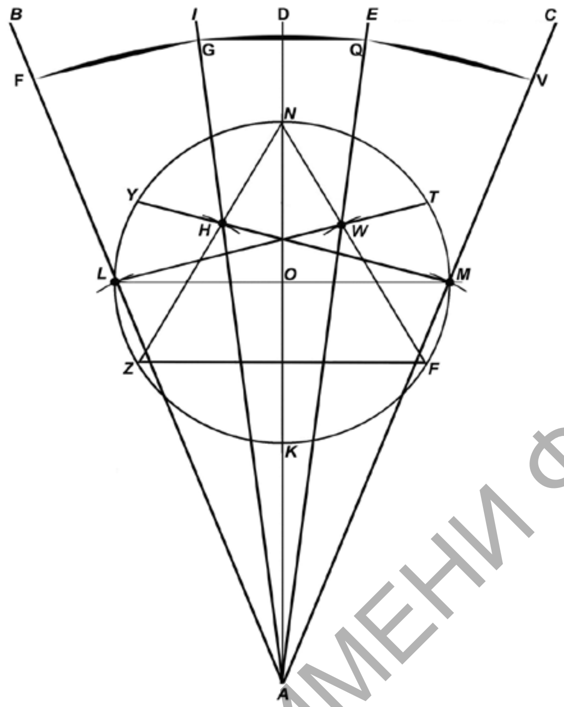

Рисунок 3 – Трисектрис острого угла

1) Строим с помощью линейки два луча **AB** и **AC**, исходящие из точки **A**, и получаем острый угол **BAC**.

2) С помощью циркуля и линейки из центра угла **A** известным способом строим биссектрису **AD**.

3) С помощью циркуля произвольным радиусом делаем засечки из точки **A** на лучах **AB** и **AC**, находим точки **L** и **M**. Затем с помощью линейки соединяем прямой точки **L** и **M**, получаем равнобедренный треугольник **ALM**.

4) На пересечении стороны **LM** равнобедренного треугольника **ALM** с биссектрисой **AD** находим точку **O**.

5) С помощью циркуля строим окружность с центром в точке **O** радиусом, равным 1/2 стороны **LM** равнобедренного треугольника **ALM**.

6) С помощью циркуля известным способом делим построенную окружность **O** на 6 равных частей с точками **K**, **Z**, **Y**, **N**, **T** и **F**.

7) С помощью линейки соединяем прямыми точки **Z** с **N**, **N** с **F**, **F** с **Z**. Получаем вписанный в окружность **O** равносторонний треугольник **ZNF**.

Дальнейшее построение имеет два равнозначных варианта:

8) вариант а) С помощью линейки без делений соединяем прямыми точки **L** с **T**, а затем точки **M** с **Y**. На пересечении отрезка **LT** и стороны равностороннего треугольника **NF** находим точку **W**, а на пересечении отрезка **MY** и стороны равностороннего треугольника **ZN** – точку **H**. Из точки **A** через точку **H** с помощью линейки без делений проводим луч **AI**. Из точки **A** через точку **W** проводим луч **AE**. Лучи **AI** и **AE** являются искомыми трисектрисами, делящими острый угол **BAC** на три равные части.

8) вариант б) С помощью циркуля из точки **Z** радиусом, равным 1/2 стороны **LM**, делаем засечку на стороне равностороннего треугольника **ZN** и находим точку **H**. Затем из точки

F радиусом, равным 1/2 стороны **LM**, делаем засечку на стороне **FN** равностороннего треугольника **N** и находим точку **W**. Из точки **A** через точку **H** с помощью линейки без делений проводим луч **AI.** Из точки **A** через точку **W** проводим луч **AE**. Лучи **AI** и **AE** являются искомыми трисектрисами, делящими угол **BAC** на три равные части.

9) Для проверки правильности деления острого угла **BAC** на три равные части при помощи циркуля с центром в точке **A** проводим дугу **FV**, пересекающую найденные трисектрисы **IA** и **EA** в точках **G** и **Q**. Затем при помощи линейки, соединив прямыми линиями точки **F** с **G**, **G** с **Q** и **Q** с **V**, получаем равные между собой хорды **FG**, **GQ** и **QV**, что подтверждают контрольные замеры с помощью циркуля и/или линейки со шкалой с делениями.

<u>1.4 Трисекция тупого угла.</u> Алгоритм построения трисектрис тупого угла следующий (рисунок 4):

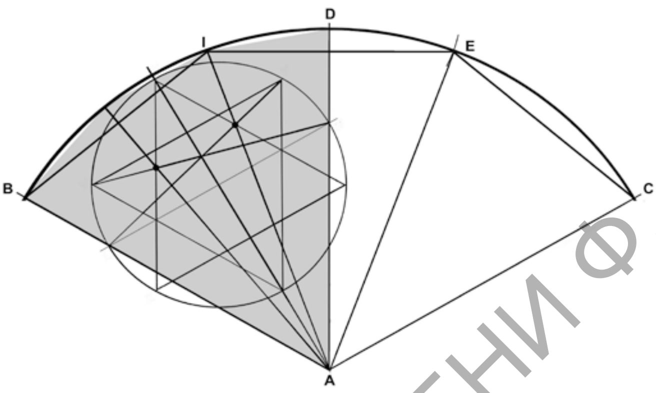

Рисунок 4 – Трисектрис тупого угла

1) Из точки **A** с помощью линейки произвольно наносим два луча **AB** и **AC** и получаем тупой угол **BAC**.

2) С помощью циркуля и линейки из центра тупого угла **A** известным способом строим биссектрису **AD**, которая делит тупой угол на два равных острых угла **BAD** и **DAC**.

3) Делим острый угол **BAD** по алгоритму построения трисектрис острого угла (см. рисунок 3).

4) Найденную **ID** треть дуги острого угла **BAD** при помощи циркуля переносим засечкой вправо от биссектрисы **AD** на дугу **DC** и находим точку **E**.

5) Соединяя прямыми лучами точку **A** с точками **I** и **E**, получаем трисектрисы **IA** и **EA** тупого угла **BAC**.

6) С помощью циркуля и/или линейки со шкалой с делениями убеждаемся, что хорды **BI**, **IE** и **EC** равны, что свидетельствует о правильности вышеприведённых геометрических построений.

<u>2. Задача об удвоении куба по ребру куба.</u> Удвоение куба – задача на построение циркулем и линейкой (без шкалы с делениями) ребра куба, объём которого вдвое больше объёма заданного куба.

Согласно античной легенде, однажды на острове Делос разразилась эпидемия чумы. Жители острова обратились к дельфийскому оракулу, и тот сообщил, что необходимо удвоить жертвенник святилища, который имел форму куба. Жители Делоса соорудили ещё один такой же куб и поставили его на первый, но эпидемия не прекратилась. После повторного обращения оракул разъяснил, что удвоенный жертвенник также должен иметь форму куба.

С тех пор делосской задачей занимались лучшие математики античного мира, было предложено несколько решений, однако выполнить такое построение, используя только циркуль и линейку, оказалось проблематичным. Поэтому постепенно сложилось общее убеждение в неразрешимости такой задачи. Ещё Аристотель в IV веке до н. э. писал: «Посредством геометрии нельзя доказать, что… два куба составляют один куб» [3].

Алгоритм решения задачи об удвоении объёма куба по ребру куба методом геометрического построения иллюстрирует рисунок 5:

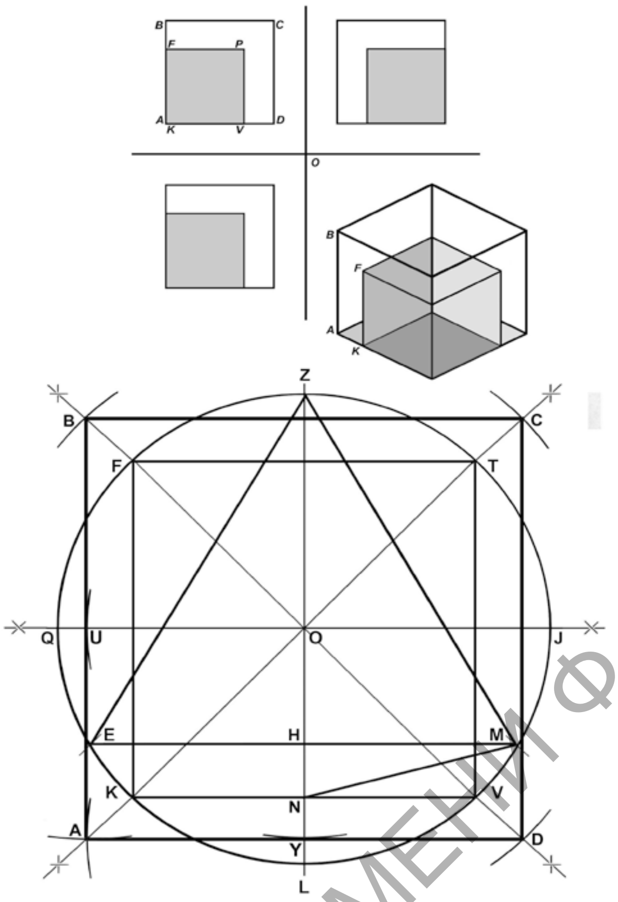

Рисунок 5 – Удвоение объёма куба по ребру куба методом геометрического построения

1) При помощи линейки проводим вертикальную прямую – будущую вертикальную ось симметрии.

2) На этой линии произвольно отмечаем точку **O**, центр будущей окружности.

3) Ставим ножку циркуля в точку **O** и произвольным радиусом строим окружность. На пересечениях её с вертикальной осью симметрии обозначаем точки **Z** и **L**.

4) Ставим ножку циркуля поочерёдно в точки **Z** и **L** и произвольным радиусом делаем в обе стороны за пределами окружности **O** по 2 засечки до пересечения друг с другом.

5) При помощи линейки соединяем точки пересечения засечек прямой, получаем горизонтальную ось симметрии и точки пересечения её с окружностью **Q** и **J**.

6) Ставим ножку циркуля поочерёдно в точки **Z** и **L** пересечения вертикальной оси с окружностью **O**. В обе стороны делаем по 2 засечки произвольным радиусом за пределами окружности **O** до пересечения друг с другом. Ставим ножку циркуля поочерёдно в точки **Q** и **J** пересечения горизонтальной оси с окружностью **O**. В обе стороны делаем по 2 засечки тем же радиусом за пределами окружности **O** до пересечения друг с другом.

7) Соединив противоположные точки пересечения друг с другом двумя прямыми, получаем вспомогательные линии, пересекающиеся в центре окружности **O** и расположенные под углом **45º** к вертикальной и горизонтальной осям.

8) На пересечениях вспомогательных линий с окружностью **O** получаем точки **K**, **F**, **T**, **V**, и соединив их последовательно прямыми **K** с **F**, **F** с **T**, **T** с **V** и **V** с **K**, получаем вписанный квадрат **KFTV** в данный круг **O**.

9) Ставим ножку циркуля в точку **L** и делаем две засечки радиусом **OL** на окружности **O**, получая точки **E** и **M**.

10) Соединив прямыми при помощи линейки точки **E** с **M**, **M** с **Z,** и **Z** с **E**, получаем вписанный в данный круг **O** равносторонний треугольник **EZM**.

11) На пересечении вертикальной оси **ZL** со стороной **KV** квадрата **KFTV** находим точку **N**.

12) Соединив прямой при помощи линейки точки **N** и **M**, получаем отрезок **NM** равный 1/2 искомого ребра, что подтверждают замеры с помощью циркуля и/или линейки со шкалой с делениями.

13) Ставим ножку циркуля в точку **O**, и делая засечки радиусом, равным отрезку **NM**, на вертикальной и горизонтальной осях вниз и влево – получаем точки **U** и **Y**.

14) Таким же способом, используя точки **U** и **Y**, радиусом, равным отрезку **NM**, находим на вспомогательной линии точку **A**.

15) При помощи циркуля из центра окружности **O** делаем засечки радиусом **OA** на вспомогательных линиях и получаем точки **B**, **C** и **D**.

16) При помощи линейки соединяем прямыми точки **A** с **B**, **B** с **C**, **C** с **D** и **D** с **A** и получаем квадрат **ABCD** со стороной **AB**, равной ребру искомого куба.

17) Для проверки правильности решения достаточно найти объёмы двух кубов по рёбрам **AB** и **KF** и разделить их, получив частное = **1,9969493461728676468694824306741** = **2**.

Это можно проверить следующим образом:

Если **R = 7**; 1/2**R = 3,5; R² = 49**.

1) Ищем длину **HM**, равной 1/2 стороны **EM** вписанного треугольника:

OM = R; OH = 1/2 R; ON = 1/2 KV;

$HM^2 = R^2 - (1/2\ R)^2$; $HM = \sqrt{(R^2 - (1/2\ R)^2)}$; HM = 6,062.

2) Ищем длину стороны **KV** вписанного квадрата:

KO = R; OV = R;

$KV^2 = R^2 + R^2$; $KV = \sqrt{(R^2 + R^2)} = 9{,}899$;

ON = 1/2KV = 4,949;

3) HN = ON – OH = 1,449;

4) $NM^2 = HM^2 + HN^2$; $NM = \sqrt{HM^2 + HN^2} = 6{,}233$;

5) AB = 2NM = 12,466;

6) V**AB = AB^3 = 1937,341;**

7) V**KV = KV^3 = 970,1502;**

8) V**AB /** V**KV = 1,9969.**

При округлении частное **1,9969 = 2.**

Примечание: *в последующем, для облегчения решения задачи удвоения объёма куба по ребру куба, будет достаточно умножить длину ребра любого данного куба на число, которое мы назвали **Ў** (бел.) **Ў** = **AB / KV** = **1,259.***

Таблица 2 – Таблица к решению Г.В. Говором задачи об удвоении куба / **Ў** = 1,25928 /

R	R^2	KF сторона квадрата TFPV	Объём куба с ребром = KF	AB сторона квадрата ABCD	Объём куба с ребром = AB	Объём куба (AB) / Объём куба (KF) = = 1,996949346	Ребро AB / ребро KF = Ў
7	49	9,89	**970,15**	12,46	**1937,34**	**2**	**1,25928**
12	144	16,97	**4887,52**	21,37	**9760,13**	**2**	**1,25928**
26	676	36,76	**49712,43**	46,3	**99273,21**	**2**	**1,25928**
39	1521	55,15	**167779,46**	69,45	**335047,1**	**2**	**1,25928**
41	1681	57,98	**194938,02**	73,01	**389281,36**	**2**	**1,25928**
55	3025	77,78	**470579,56**	97,94	**939723,55**	**2**	**1,25928**
63	3969	89,09	**707239,71**	112,19	**1412321,89**	**2**	**1,25928**
78	6084	110,3	**1342235,74**	138,9	**2680376,8**	**2**	**1,25928**
88	7744	124,45	**1927493,88**	156,71	**3849107,66**	**2**	**1,25928**
94	8836	132,93	**2349246,31**	167,4	**4691325,89**	**2**	**1,25928**

Примечание: **Ў** = AB / KF = 1,2592801.

Заключение. Предложены решения известных уже на протяжении тысячелетий геометрических задач: задачи о трисекции угла и задачи об удвоении куба по ребру куба, о неразрешимости которой посредством геометрии утверждал ещё Аристотель. Эти задачи объединяет одно условие: решение должно быть осуществлено геометрическим построением с помощью циркуля и линейки без шкалы с делениями. Выполненные нами решения геометрически изящны и вполне удовлетворяют поставленному условию.

Литература

1. Гильберт, Д. Основания геометрии / Д. Гильберт ; пер. с нем. под ред. А. В. Васильева. – Л. : «Сеятель», 1923. – 152 с.

2. Чистяков, В. Д. Три знаменитые задачи древности / В. Д. Чистяков. – М. : Гос. уч.-пед. изд-во Министерства просвещения РСФСР, 1963. – 96 с.

3. Белозеров, С. Е. Пять знаменитых задач древности (История и современная теория) / С. Е. Белозеров. – Ростов : Изд-во Ростовского ун-та, 1975. – 320 с.

Белорусский союз художников,
Союз писателей Беларуси

Поступила в редакцию 10.09.2021