Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2008. Том 16. № 1. С. 9–12

УДК 512.542.63

О ГИПЕРРАДИКАЛЬНЫХ ФОРМАЦИЯХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

А. Ф. Васильев, И. Н. Халимончик

Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины
e-mail: formation56@mail.ru
Поступила 03.01.2008

Посвящается семидесятилетию со дня рождения Л.А. Шеметкова

Рассматриваются только конечные группы. Радикальные формации (формации Фиттинга) групп, т.е. нормально наследственные формации, замкнутые относительно произведений нормальных (или, что эквивалентно, относительно порождений субнормальных) подгрупп, в настоящее время занимают одно из центральных мест в теории классов групп [1].

Обобщая понятие субнормальности, в 1967 г. Р. Картер и Т.О. Хоукс [2] ввели понятие $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы в классе разрешимых групп. В 1978 г. Л.А. Шеметков в монографии [3] распространил понятие $\mathfrak{F}$-субнормальности на произвольные конечные группы.

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Подгруппа K группы G называется $\mathfrak{F}$-субнормальной [3], если либо $K = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп

$$G = K_0 \supset K_1 \supset \ldots \supset K_n = K$$

такая, что $K_{j-1}^{\mathfrak{F}} \subseteq K_j$ для всех $j = 1, \ldots, n$. Обозначается: $K sn_{\mathfrak{F}} G$.

В работах [4–6] исследовались наследственные насыщенные формации конечных групп, замкнутые относительно произведений $\mathfrak{F}$-субнормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Нормально наследственные формации с данным свойством, согласно [6], называются сверхрадикальными.

В отличие от радикальных формаций для сверхрадикальных формаций $\mathfrak{F}$ замена условия замкнутости относительно произведений $\mathfrak{F}$-субнормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп на условие замкнутости относительно порождений $\mathfrak{F}$-субнормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп не является эквивалентной. Этот факт приводит к следующему определению [7].

Определение 1. Формация $\mathfrak{F}$ называется гиперрадикальной в классе $\mathfrak{X}$, если $\mathfrak{F}$ — нормально наследственная формация в классе $\mathfrak{X}$ и любая $\mathfrak{X}$-группа $G = \langle A, B\rangle$, где A и B — $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы из G, принадлежит $\mathfrak{F}$.

Если $\mathfrak{X}$ — класс всех групп, то гиперрадикальную формацию $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{X}$ будем просто называть гиперрадикальной.

Гиперрадикальные формации возникли в связи с решением проблемы Кегеля–Шеметкова, связанной с исследованием решеточных формаций, т.е. формаций $\mathfrak{F}$, для которых множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп образует подрешетку решетки всех подгрупп в каждой группе [8, 9]. В частности, из работы [8] следует описание насыщенных наследственных гиперрадикальных формаций. В работе [7] получено конструктивное описание разрешимых гиперрадикальных формаций. В [10] установлены насыщенные наследственные формации $\mathfrak{X}$, для которых любая насыщенная наследственная формация $\mathfrak{F}$ является гиперрадикальной в $\mathfrak{X}$.

Напомним, что формация $\mathfrak{F}$ называется разрешимо насыщенной [1], если из $G/\Phi(N) \in \mathfrak{F}$, где N — нормальная разрешимая подгруппа G, следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Цель данной работы — доказать следующий результат.

Теорема. *Всякая наследственная гиперрадикальная формация является решеточной разрешимо насыщенной формацией Фиттинга.*

Для доказательства теоремы нам потребуется ряд известных результатов.

Лемма 1 [9, лемма 6.17]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если H — подгруппа группы G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, то $Hsn_{\mathfrak{F}}G$;

2) если $Hsn_{\mathfrak{F}}G$, K — подгруппа из G, то $(H \cap K)sn_{\mathfrak{F}}K$;

3) если $H_i sn_{\mathfrak{F}}G$ для $i = 1, 2$, то $(H_1 \cap H_2)sn_{\mathfrak{F}}G$.

Лемма 2 [9, лемма 6.16]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если $Hsn_{\mathfrak{F}}G$ и $N \lhd G$, то $HN/Nsn_{\mathfrak{F}}G/N$;

2) если $N \lhd G$ и $H/Nsn_{\mathfrak{F}}G$, то $Hsn_{\mathfrak{F}}G$;

3) если $Hsn_{\mathfrak{F}}K$ и $Ksn_{\mathfrak{F}}G$, то $Hsn_{\mathfrak{F}}G$.

Лемма 3 [7, предложение 3.8]. *Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ — гиперрадикальные формации, то $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{X}$ также гиперрадикальная формация.*

Лемма 4 [7, лемма 3.9]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация. Если $G \in M(\mathfrak{F})$, то $G^{\mathfrak{F}}$ — примарная группа.*

Лемма 5 [7, лемма 3.1]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — нормально наследственная гиперрадикальная формация в $\mathfrak{S}$. Тогда $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{F}$.*

Другие используемые определения, обозначения и результаты можно найти в работах [1, 3].

Доказательство теоремы. Пусть $\mathfrak{F}$ — гиперрадикальная формация. Допустим, что $\mathfrak{F}$ не является формацией Фиттинга. Предположим, что существует не $\mathfrak{F}$-группа $G = N_1N_2$, где $N_i \in \mathfrak{F}$ и $N_i \lhd G$, $i = 1, 2$. Выберем среди них группу G минимального порядка. Если N — минимальная нормальная подгруппа из G, то $G/N \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ — формация, то можно считать, что N — единственная минимальная нормальная подгруппа в G и $N = G^{\mathfrak{F}}$. Ясно, что $1 \neq N_i \neq G$, $i = 1, 2$. Тогда $N \subseteq N_1 \cap N_2$. Из $N = G^{\mathfrak{F}}$ и наследственности формации $\mathfrak{F}$ следует, что N_i/N $\mathfrak{F}$-субнормальна в G/N. По утверждению 2) леммы 2 получаем, что N_i $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, $i = 1, 2$. Так как $\mathfrak{F}$ — гиперрадикальная формация, то $G = \langle N_1, N_2 \rangle = N_1N_2 \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с выбором G. Следовательно, $\mathfrak{F}$ — формация Фиттинга.

Покажем, что $\mathfrak{F}$ — решеточная формация. Так как $\mathfrak{F}$ является наследственной формацией, то, согласно утверждению 2) леммы 1, пересечение $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп группы G является $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой в G.

Предположим, что $\mathfrak{F}$ не является решеточной формацией. Пусть G — группа минимального порядка к утверждению, что $sn_{\mathfrak{F}}(G)$ — подрешетка решетки всех подгрупп G. Тогда в G найдутся две $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы A и B такие, что подгруппа $\langle A, B \rangle$ не $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Ясно, что $\langle A, B \rangle \neq G$. Если $G \in \mathfrak{F}$, то ввиду наследственности $\mathfrak{F}$ следует, что $\langle A, B \rangle$ является $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой G. Получили противоречие. Поэтому G не принадлежит $\mathfrak{F}$.

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Если $N = G$, то G — простая группа. Так как G не принадлежит $\mathfrak{F}$, то в $G^{\mathfrak{F}} = G$. Но тогда $AG^{\mathfrak{F}} = G$, что противоречит тому, что подгруппа A является в $\mathfrak{F}$-субнормальной в G. Будем считать, что $N \neq G$. По утверждению 1) леммы 2 AN/N и BN/N — $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы в G/N. Так как $|G/N| < |G|$, то $\langle AN/N, BN/N \rangle = \langle A, B \rangle N/N$ — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа в G/N. Отсюда и из утверждения 2) леммы 2 следует, что подгруппа $\langle A, B \rangle N$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в G для любой минимальной нормальной подгруппы N группы G. Если $|\langle A, B \rangle N| < |G|$, то $\langle A, B \rangle$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в $\langle A, B \rangle N$. Но тогда по утверждению 3) леммы 2 $\langle A, B \rangle$ — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа в G. Получили противоречие. Таким образом, $\langle A,B\rangle N = G$ для любой минимальной нормальной подгруппы группы G.

Так как $\langle A,B\rangle \neq G$, то нетрудно видеть, что $\langle A,B\rangle_G = 1$. Пусть $A^{\mathfrak{F}} \neq 1$. Ввиду леммы 2.1 из [11] подгруппа $A^{\mathfrak{F}}$ субнормальна в G. Тогда по теореме 7.11 из работы [3] следует, что $1 \neq (A^{\mathfrak{F}})^G = (A^{\mathfrak{F}})^{\langle A,B\rangle N} = (A^{\mathfrak{F}})^{\langle A,B\rangle} \subseteq \langle A,B\rangle$. Это означает, что $\langle A,B\rangle_G \neq 1$. Противоречие. Значит, $A^{\mathfrak{F}} = 1$ и $A \in \mathfrak{F}$. Аналогично показывается, что $B \in \mathfrak{F}$. Из гиперрадикальности формации $\mathfrak{F}$ следует, что $\langle A,B\rangle \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ — формация, то группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу $N = G^{\mathfrak{F}}$ и $\langle A,B\rangle N = G$.

Рассмотрим подгруппу AN. Так как $N = G^{\mathfrak{F}}$ и A $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, то $AN \neq G$. Из $A \in \mathfrak{F}$ следует, что $(AN)^{\mathfrak{F}} \subseteq N$.

1. Пусть $(AN)^{\mathfrak{F}} \subset N$. Тогда из наследственности $\mathfrak{F}$ и $AN/(AN)^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ следует, что $N/(AN)^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Так как N — элементарная группа, то нетрудно видеть, что $N \in \mathfrak{F}$. Так как $G^{\mathfrak{F}} \subseteq N$, то по утверждению 1) леммы 1 N $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Из гиперрадикальности $\mathfrak{F}$ получаем, что $AN \in \mathfrak{F}$. Аналогично доказывается, что $BN \in \mathfrak{F}$. Так как AN и BN — $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы в G, то $G = \langle AN, BN\rangle \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

2. Пусть $(AN)^{\mathfrak{F}} = N$. Так как A $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, то по 2) леммы 1 следует, что A $\mathfrak{F}$-субнормальна в AN. Если $A \neq AN$, то $A(AN)^{\mathfrak{F}} \neq AN$. Противоречие. Поэтому $A = AN \in \mathfrak{F}$. Аналогично $B = BN \in \mathfrak{F}$. Из гиперрадикальности $\mathfrak{F}$ следует, что $G = \langle AN, BN\rangle \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Значит, $\mathfrak{F}$ — решеточная формация.

Докажем, что $\mathfrak{F}$ — разрешимо насыщенная формация. Так как класс всех разрешимых групп $\mathfrak{S}$ является гиперрадикальной формацией, то из леммы 3 следует, что $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$ — гиперрадикальная формация. Пусть $G/N \in \mathfrak{F}$, где $N = \Phi(G_{\mathfrak{S}})$ и $G_{\mathfrak{S}}$ — разрешимый радикал группы G. Допустим, что G не принадлежит $\mathfrak{F}$. Тогда в G найдется минимальная не $\mathfrak{F}$-группа H. Из $G/N \in \mathfrak{F}$ и наследственности формации $\mathfrak{F}$ следует, что

$$HN/N \simeq H/H \cap N \in \mathfrak{F}.$$

Следовательно, $H^{\mathfrak{F}} \subseteq N$. Если $H^{\mathfrak{F}} = H$ то H нильпотентна. Тогда ввиду лемм 4 и 5 и свойств минимальной не $\mathfrak{F}$-группы следует, что $|H| = p$, где $p \in \pi(N)$. Из $G/N \in \mathfrak{F}$ и наследственности $\mathfrak{F}$ следует, $G_{\mathfrak{S}}/N \in \mathfrak{F}$. Так как $N = \Phi(G_{\mathfrak{S}})$ и $\pi(N) \cap \pi(G_{\mathfrak{S}}/N) \neq \emptyset$, то $p \in \pi(\mathfrak{F})$, а значит, $H \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

Пусть $H^{\mathfrak{F}} \neq H$. Покажем, что H — разрешимая группа. Допустим противное. Так как $H^{\mathfrak{F}} \subseteq N \in \mathfrak{S}$, то $H/H^{\mathfrak{F}}$ не является разрешимой группой. Тогда в $H/H^{\mathfrak{F}}$ найдется ненормальная максимальная подгруппа $M/H^{\mathfrak{F}}$. Заметим, что $Msn_{\mathfrak{F}}H$ и $M \in \mathfrak{F}$. Так как $N_H(M) \neq H$, то найдется элемент $x \in H$ такой, что $H = \langle M, M^x\rangle$. Из гиперрадикальности $\mathfrak{F}$ следует, что $H \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с $H \in M(\mathfrak{F})$. Поэтому любая максимальная подгруппа из $H/H^{\mathfrak{F}}$ является нормальной в $H/H^{\mathfrak{F}}$. Следовательно, $H/H^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{S}$. Но тогда $H \in \mathfrak{S}$.

Рассмотрим $R = HG_{\mathfrak{S}}$. Ясно, что R разрешима. Так как $N = \Phi(G_{\mathfrak{S}})$, то $N \subseteq \Phi(R)$. Так как $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$ — разрешимая наследственная формация Фиттинга, то по теореме Брайса и Косси [1, XI, теорема 1.9] следует насыщенность формации $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$. Отсюда и из $R/N \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$ получаем, что $R \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$. Отсюда и наследственности $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$ следует, что $H \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{F}$. Получили противоречие с $H \in M(\mathfrak{F})$. Следовательно, наше допущение неверно и $G \in \mathfrak{F}$. Теорема доказана.

Литература

1. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Walter de Gruyter, Berlin; New York, 1992.
2. *Carter R., Hawkes T.O.* The $\mathfrak{F}$-normalizers of a finite soluble group // J. Algebra. 1967. V. 5. № 2. P. 175–202.
3. *Шеметков Л.А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

4. *Семенчук В.Н.* Характеризация Š-формаций // Вопросы алгебры. Минск: Университетское, 1992. № 7. С. 103–108.
5. *Семенчук В.Н.* Разрешимые $\mathfrak{F}$-радикальные формации // Мат. заметки. 1996. Т. 59. № 2. С. 261–266.
6. *Семенчук В.Н., Шеметков Л.А.* Сверхрадикальные формации // Докл. НАН Беларуси. 2000. Т. 44. № 5. С. 24–26.
7. *Васильев А.Ф.* Гиперрадикальные формации конечных разрешимых групп // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2004. № 6 (27). С. 62–70.
8. *Васильев А.Ф., Каморников С.Ф., Семенчук В.Н.* О решетках подгрупп конечных групп // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические системы. Киев: Ин-т математики Украины, 1993. С. 27–54.
9. *Ballester-Bolinches A., Ezquerro L.M.* Classes of Finite Groups. Springer, 2006.
10. *Wenbin Guo.* The groups generated by subnormal subgroups // Algebra Colloquium. 1998. V. 5. № 1. P. 41–48.
11. *Васильев А.Ф., Каморников С.Ф.* К проблеме Кегеля–Шеметкова о решетках обобщенно субнормальных подгрупп конечных групп // Алгебра и логика. 2002. Т. 41. № 4. С. 411–428.

A. F. Vasil'ev, I. N. Khalimonchik

On hyperradical formations of finite groups

Summary

A formation $\mathfrak{F}$ of finite groups is called a hyperradical formation if $\mathfrak{F}$ is a normally subgroup-closed formation and $\mathfrak{F}$ contains every group $G = \langle H, K\rangle$, where H and K are $\mathfrak{F}$-subnormal $\mathfrak{F}$-subgroups of G. It is proved that every subgroup-closed hyperradical formation of finite groups is a lattice solubly saturated Fitting formation.