

## ОПТИМИЗАЦИЯ РЕЖИМА РЕГИСТРАЦИИ ФАЗОВЫХ ГОЛОГРАММ СОВОКУПНОСТИ ДИФФУЗНЫХ И ТОЧЕЧНЫХ ОБЪЕКТОВ

И. С. Барбанель и Э. И. Крупицкий

В статье поставлены задачи оптимизации режимов записи фазовых голограмм по ряду критериев как для общего случая, так и для случая специального объекта, представляющего собой совокупность диффузных и точечных источников. Для последнего разработан аппарат решения поставленных задач. Приведен пример расчета.

### В в е д е н и е

Коэффициент амплитудного пропускания фазовых голограмм выражается, как известно [1], в виде

$$T = e^{iF[H]} \quad (1)$$

где  $H$  — экспозиция, обусловленная создающим голограмму интерференционным полем,  $F(H)$  — зависимость величины фазового рельефа изготовленной голограммы от экспозиции (или другого физического агента при иных способах изготовления голограмм).

В статье развивается аппарат оптимизации фазовых голограмм, который для случая линейно-фазовых разновидностей дает удобные расчетные соотношения.

Линейно-фазовыми голограммами [1] называются такие, для которых

$$F(H) \equiv kH, \quad (2)$$

где  $k = \text{const}$ , т. е. имеющие линейную зависимость фазового рельефа от экспозиции.

Приложение развиваемого аппарата к линейно-фазовым голограммам оправдано, либо при использовании прямолинейных участков для существующих характеристик (что, правда, может привести к неоптимальности полученных решений), либо при создании линейных процессов регистрации фазовых голограмм.

Последнее весьма целесообразно, ибо линейно-фазовые голограммы, как было показано [4], обеспечивают максимум дифракционной эффективности  $\eta$  при одновременной минимизации нелинейных искажений восстановленного поля в случае неравномерного распределения голографируемых интерференционных полей по пространственным координатам.

В качестве голографируемого объекта рассматривается обобщенная модель Леонарда и Упатниекса [1] — совокупность  $n$  диффузных объектов и точечных источников, которые в пространстве могут располагаться произвольным образом.

Хотя в этом случае распределение голографируемого поля от пространственных координат не зависит, общая постановка задач оптимизации будет приведена ниже с учетом этой зависимости.

## П о с т а н о в к а   з а д а ч и

Математически постановка задач оптимизации параметров голограмм (в частности, и линейно-фазовых) может быть представлена в следующем виде:

$$p_k \{H(x; y)\} = \text{extremum}, \quad (3)$$

$$p_n \{F[H(x; y)]\} \leq p_{n\text{доп}}, \quad n=1, 2, \dots, r, \quad (4)$$

где  $p_i$  — параметр голограммы, функционально зависящий от экспозиции; и задан ряд функций

$$f_i(H) \leq f_{i\text{доп}}, \quad i=1, 2, \dots, k, \quad (5)$$

ограничивающих область изменения аргумента  $H$ .

Такая постановка задачи оптимизации является общей и сводит последнюю к задаче нелинейного программирования.

Для решения задачи необходимо найти явные выражения для параметров голограмм  $p_i$ , что требует конкретизации вида голограмм и голографируемых объектов.

### Р е ш е н и е   з а д а ч и

Ниже будет рассмотрен аппарат решения задачи оптимизации дифракционной эффективности  $\eta$  фазовых голограмм при ограничении двух других параметров — отношения сигнал/шум  $\gamma$  и уровня высших порядков  $\xi$ . Для линейно-фазовых голограмм с помощью первого удается получить расчетные формулы.

В качестве объекта голографирования используется обобщенная модель Леонарда и Упатниекса.

Формулировку задачи оптимизации в виде (3) ÷ (5) нетрудно получить, найдя явные соотношения для указанных параметров от экспозиции  $H$ .

Для рассматриваемой модели объекта голографирования поле в плоскости регистрации определяется соотношением

$$A = \left[ \sum_{i=0}^n A_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n A_i A_0 \cos \Phi_i + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{l=2}^n A_i A_l \cos \Phi_{il} \right], \quad (6)$$

где  $A_i$  и  $A_0$  ( $i=1; 2 \dots n$ ) — амплитуды предметных и опорных волн соответственно;  $\Phi_i = \varphi_i - \varphi_0$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) — разности фаз предметных и опорной волн;  $\Phi_{il} = \varphi_i - \varphi_l$  ( $i < l$ ) — разности фаз предметных волн, создающих паразитные кросс-модуляционные члены.

При строгом рассмотрении фазовых голограмм этими членами пренебречь нельзя, ибо  $T(H)$  для первых всегда нелинейна даже при линейности функции  $F(H)$ , т. е. кросс-модуляционные члены интерферируют при восстановлении с основными.

Экспозиция  $H_0$  для фазовой голограммы с учетом (6) определится в виде:

$$H = H_0 \left[ 1 + \sum_{i=1}^h a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^h a_i \cos \Phi_i + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{l=2}^n a_i a_l \cos \Phi_{il} \right], \quad (7)$$

где  $H_0 = A_0^2 / 2t_3$  — экспозиция, соответствующая опорному пучку;  $t_3$  — время экспозиции;  $a_i = A_i / A_0$ ; ( $i=1, 2 \dots n$ ) — отношения амплитуд предметных и опорного пучков.

Таким образом, амплитудное пропускание фазовой голограммы с учетом (1) и (7) выразится в виде

$$T(H) = e \left\{ H_0 \left[ 1 + \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_i \cos \Phi_i + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{l=2}^n a_i a_l \cos \Phi_{il} \right] \right\}. \quad (8)$$

Для определения явных соотношений для оптимизируемых параметров  $\eta$ ,  $\xi$  и  $\gamma$  воспользуемся аппаратом  $n$ -мерной оптимизации, подробно изло-

женным в более ранней работе [2]. Отметим, что в данной статье аппарат обобщен для учета влияния перекрестных членов [двойная сумма в показателе степени выражения (8)], которые в предыдущей статье, посвященной в основном изложению метода, для упрощения выкладок не рассматривались.

Раскладывая четную периодическую функцию  $T(H)$  в  $n + C_n^2$ -мерный ряд Фурье по углам  $\Phi$  на интервале  $[-\pi; \pi]$ , получим

$$T(H) = \sum_{m_1 \dots m_n; m_{1,2} \dots m_{n-1}, n=0}^{\infty} B_{m_1 \dots m_n; m_{1,2} \dots m_{n-1}, n} \times \prod_{i=1}^n \cos m_i \Phi_i \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{l=2}^n \cos m_{il} \Phi_{il}, \quad (9)$$

где коэффициенты  $B$  имеют вид

$$B_{m_1 \dots m_n; m_{1,2} \dots m_{n-1}, n} = \frac{\sum_{i=1}^n \delta_{m_i} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{l=2}^n \delta_{m_{il}}}{(2\pi)^{n+C_n^2}} \times \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} e^{iF \left\{ H_0 \left[ 1 + \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_i \cos \Phi_{i+2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{l=2}^n a_i a_l \cos \Phi_{il} \right] \right\}} \times \prod_{i=1}^n \cos m_i \Phi_i \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{l=2}^n \cos m_{il} \Phi_{il} d\Phi_1 \dots d\Phi_n d\Phi_{1,2} \dots d\Phi_{n-1,n}, \quad (10)$$

где

$$\delta_{m_i} = \begin{cases} 1 & m_i > 0 \\ 0 & m_i = 0 \end{cases}, \quad (i = 1, 2 \dots n);$$

$$\delta_{m_{il}} = \begin{cases} 1 & m_{il} > 0 \\ 0 & m_{il} = 0 \end{cases} \quad (i = 1, 2 \dots n-1 \quad i < l).$$

Далее, воспользовавшись определениями оптимизируемых параметров по аналогии с [2], нетрудно получить выражения для  $\eta$ ,  $\gamma$ ,  $\xi$  фазовых голограмм в виде

$$\eta = \frac{1}{4} \left| \sum_{m_1 \dots m_{n-1}, n=0}^{\infty} B_{m_1 \dots m_n; m_{1,2} \dots m_{n-1}} (H_0; a_1 \dots a_n) \right|^2, \quad (11)$$

при  $\sum_{i=1}^n m_i = 1; \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{l=2}^n m_{il} = 0$

$$\xi = \frac{\sum_{m_1 \dots m_{n-1}, n=0}^{\infty} B_{m_1 \dots m_n; m_{1,2} \dots m_{n-1}, n} (H_0; a_1 \dots a_n)}{\sum_{m_1 \dots m_{n-1}, n=0}^{\infty} B_{m_1 \dots m_n; m_{1,2} \dots m_{n-1}, n} (H_0; a_1 \dots a_n)}, \quad (12)$$

при  $\sum_{i=1}^n m_i > 1; \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{l=2}^n m_{il} \geq 1$

$$\gamma = \frac{\eta (H_0; a_1 \dots a_n)}{|B_{0,0 \dots 0} (H_0; a_1 \dots a_n) [1 - |B_{0,0 \dots 0} (H_0; a_1 \dots a_n)|]^\mu}, \quad (13)$$

<sup>1</sup>  $\mu = S_h/S_g$ ,  $S_h$  и  $S_g$  — площадь голограммы и средняя площадь зерна фотоэмульсии соответственно. Отметим, что выражение для шума справедливо лишь для весьма

Теперь задача оптимизации в постановке (3) ÷ (5) запишется в виде

$$\eta [B (H_0; \mathbf{a})] = \max, \quad (14)$$

$$\xi [B (H_0; \mathbf{a})] \leq \xi_{\text{доп}}, \quad (15)$$

$$\gamma [B (H_0; \mathbf{a})] \geq \gamma_{\text{доп}}, \quad (16)$$

где  $\mathbf{a} (a_1 \dots a_n)$   $n$ -мерный вектор параметров регистрации, совместно с экспозицией по опорному пучку  $H_0$  определяющий режим регистрации, а функционалы  $B$  для фазовых голограмм определяются соотношениями (10).

Ограничения (5) на параметры регистрации в данном случае примут вид

$$\left. \begin{aligned} F \{H_{\max}\} &= F \left\{ H_0 \left( 1 + \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_i + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{l=2}^n a_i a_l \right) \right\} = \pi; (-\pi), \\ F \{H_{\min}\} &= F \left\{ H_0 \left( 1 + \sum_{i=1}^n a_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n a_i - 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{l=2}^n a_i a_l \right) \right\} = -\pi; (\pi). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$(i < l)$

Формулировка (14) ÷ (17) является общей для любых разновидностей фазовых голограмм, а для линейно-фазовых соотношения (9) и (14) ÷ (17) с учетом  $F(H) \equiv kH$  приведутся к удобным расчетным соотношениям, действительно

$$B_{m_1 \dots m_{n-1}, n} = \frac{(2) \sum_{i=1}^n \delta_{m_i} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{l=2}^n \delta_{m_{il}}}{(2\pi)^{2+n}} \prod_{i=1}^n \delta_{m_i} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{l=2}^n \delta_{m_{il}} \times$$

$$\times e^{ikH_0 \left[ 1 + \sum_{i=1}^n a_i^2 \right]} \prod_{i=1}^n J_{m_i} (2a_i H_0 k) \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{l=2}^n J_{m_{il}} (2a_i a_l H_0 k), \quad (18)$$

где  $J_k$  — функция Бесселя первого рода  $k$ -го порядка, тогда <sup>2</sup>

$$\eta = \left| \sum_{i=1}^n J_1 (2a_i H_0 k) \prod_{l=1}^n J_0 (2a_l k H_0) \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{l=2}^n J_0 (2a_i a_l H_0 k) \right|^2 e^{ikH_0 \left[ 1 + \sum_{i=1}^n a_i^2 \right]} =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^n J_1 (2a_i H_0 k) \prod_{l=1}^n J_0 (2a_l k H_0) \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{l=2}^n J_0 (2a_i a_l H_0 k) \right|^2, \quad (19)$$

$$\xi = \frac{\sum_{m_1 \dots m_{n-1}, n=0}^{\infty} \prod_{i=1}^n J_{m_i} (2a_i H_0 k) \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{l=2}^n J_{m_{il}} (2a_i a_l H_0 k)}{\sum_{i=1}^n J_1 (2a_i H_0 k) \prod_{l=2}^n J_0 (2a_l k H_0) \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{l=2}^n J_0 (2a_i a_l H_0 k)}, \quad (20)$$

при  $\sum_{i=1}^n m_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{l=2}^n m_{il} > 1$

$$\gamma = \frac{\left| \sum_{i=1}^n J_1 (2a_i H_0 k) \prod_{l=1}^n J_0 (2a_l k H_0) \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{l=2}^n J_0 (2a_i a_l H_0 k) \right|^2}{4 \left| \prod_{i=1}^n J_0 (2a_i k H_0) \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{l=2}^n J_0 (2a_i a_l k H_0) \right|^2 \left[ 1 - \prod_{i=1}^n J_0 (2a_i k H_0) \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{l=2}^n J_0 (2a_i a_l k H_0) \right]}, \quad (21)$$

грубой математической модели носителя и привлекательно для расчета только в силу своей замкнутости.

<sup>2</sup> Знак штрих у произведения означает отсутствие множителя с индексом  $i=l$ .

$$\begin{cases} kH_0 \left( 1 + \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_i + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{l=2}^n a_i a_l \right) = \pi, \\ kH_0 \left( 1 + \sum_{i=1}^n a_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n a_i - 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{l=2}^n a_i a_l \right) = -\pi. \end{cases} \quad (22)$$

Таким образом, задача оптимизации в постановке (14) ÷ (17) для линейно-фазовых голограмм сведена в явном виде к задаче нелинейного программирования для  $n + 1$  параметра, которая может далее решаться с применением ЭВМ.

Следует отметить, что для случая линейно-фазовых голограмм все приведенные параметры не зависят от постоянной составляющей экспозиции  $H_0 \left( 1 + \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)$ , как это следует из выражений (19) ÷ (21).<sup>3</sup> Поэтому в ограничениях на параметры регистрации (22) необходимо исключить постоянную составляющую, для чего достаточно почленно вычесть уравнения одно из другого. При этом имеем

$$\begin{cases} H_0 k \left( 2 \sum_{i=1}^n a_i + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{l=2}^n a_i a_l \right) \geq 0, \\ H_0 k \left( 2 \sum_{i=1}^n a_i + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{l=2}^n a_i a_l \right) \leq \pi. \end{cases} \quad (23a)$$

$$\begin{cases} H_0 k \left( 2 \sum_{i=1}^n a_i + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{l=2}^n a_i a_l \right) \geq 0, \\ H_0 k \left( 2 \sum_{i=1}^n a_i + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{l=2}^n a_i a_l \right) \leq \pi. \end{cases} \quad (23б)$$

В том случае, если амплитуды предметных волн связаны между собой конкретными соотношениями, а именно

$$A_l = p_l A_1 \quad (l = 2, 3 \dots n); \quad p_1 = 1, \quad (24)$$

выражения (19) ÷ (22), как нетрудно убедиться непосредственной подстановкой в них соотношения для амплитуд (24), будут зависеть только от двух параметров режима регистрации  $H_0$  и  $a_1$ . При этом задачи нелинейного программирования (14) ÷ (17) или (19) ÷ (22) сводятся к двухпараметрической, метод решения которой уже рассматривался [2].

Для упрощения расчета удобно ввести новые переменные вида

$$\begin{cases} X = 2H_0 a_1 k, \\ Y = 2H_0 a_1^2 k. \end{cases} \quad (25)$$

Тогда можно заметить, что хотя параметры регистрации зависят от угла наклона  $k$  характеристики  $F(H)$ , однако оптимальные значения параметров голограмм от него не зависят.

### Пример расчета

Рассмотрим решение задачи оптимизации дифракционной эффективности линейно-фазовых голограмм в постановке (19) ÷ (22) для частного случая  $n = 2$  и  $p_2 = 0.1$ . С учетом (25) соотношения (19) ÷ (22) для второго случая существенно упростятся, и задача оптимизации запишется в виде<sup>4</sup>

<sup>3</sup> Можно показать, что данное утверждение справедливо для любых разновидностей фазовых голограмм.

<sup>4</sup> В данном примере мы рассматриваем высшие порядки с индексами  $\sum_{i=1}^n m_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{l=2}^n m_{il} = 2$ , хотя рассмотрение легко обобщается для учета влияния более высоких порядков дифракции.

$$\eta = |J_0(0.1Y) [J_1(X) J_0(0.1X) + J_1(0.1X) J_0(X)]|^2, \quad (26)$$

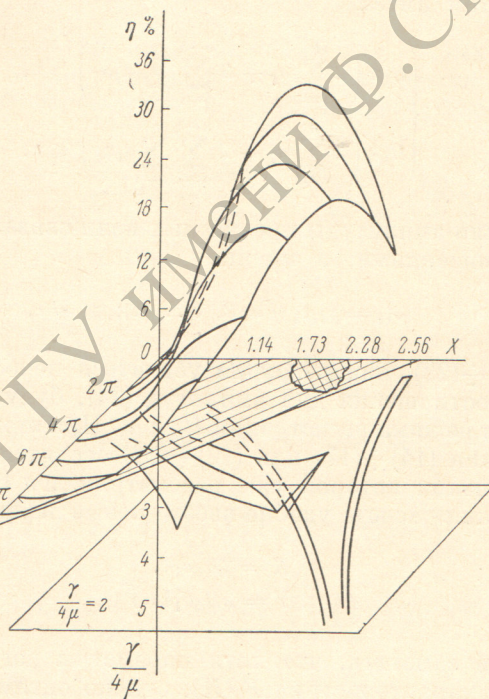
$$\xi_2 = \left[ \frac{J_0(0.1Y) [J_2(X) J_0(0.1X) + J_0(X) J_2(0.1X) + J_1(X) J_1(0.1X)] + J_1(X) J_0(0.1X) J_2(0.1Y)}{J_0(0.1Y) [J_1(X) J_0(0.1X) + J_0(X) J_1(0.1X)]} + \frac{J_1(0.1Y)}{J_0(0.1Y)} \right]^2 + \left[ \frac{J_1(X) J_0(0.1X) J_1(Y)}{J_0(0.1Y) [J_1(X) J_0(0.1X) + J_0(X) J_1(0.1X)]} \right]^2, \quad (27)$$

$$\gamma = \frac{1}{4} \frac{\{J_0(0.1Y) [J_1(X) J_0(0.1X) + J_0(X) J_1(0.1X)]\}^2}{|J_0(0.1Y) J_0(X) J_0(0.1X)| |1 - |J_0(0.1Y) J_0(X) J_0(0.1X)||}, \quad (28)$$

$$0.1Y + 1.1X \geq 0, \quad (29a)$$

$$0.1Y + 1.1X \leq \pi. \quad (29b)$$

Отметим, что условие (29a) выполняется автоматически в силу  $X > 0$  и  $Y > 0$ .



Геометрическое построение.

Задача оптимизации (26)–(28), как уже отмечалось, является двухпараметрической и может быть решена графоаналитически, без применения ЭВМ. Однако в силу того, что переменные  $X$  и  $Y$  не разделяются, процесс ее решения значительно усложняется.

Укажем один из возможных путей решения, реализованный нами.

1. На плоскости  $XOY$  строится область изменения переменных  $X$  и  $Y$ , ограниченная осями координат и прямой  $X \leq \pi/1.1 - 0.091 Y$ , определяемой условием (29b). (Напомним, что условие 29a выполняется всегда).

2. Строятся поверхности  $\eta(X; Y)$ ;  $\xi(X; Y)$  и  $\gamma(X; Y)$

3. Строятся плоскости  $\xi = \xi_{\text{доп}}$  и  $\gamma = \gamma_{\text{доп}}$ ;

4. Кривые сечений этих плоскостей с соответствующими поверхностями проектируются на плоскость  $XOY$ , и общие площади определяют область допустимых значений  $X$  и  $Y$  для  $\eta$ .

5. В пределах этих областей отыскивается  $\eta(X_0; Y_0) = \eta_{\text{max}}$ , что и означает решение задачи.

Координаты  $X_0$  и  $Y_0$ , обеспечивающие  $\eta = \eta_{\max}$  в пределах области, определяют оптимальный режим регистрации.

Картина такого построения приведена на рисунке. В целях упрощения анализа ограничение (27) нами не рассматривалось. При учете последнего необходимо дополнительно построить поверхность  $\xi(X; Y)$ . Отметим, что указанный способ графоаналитического решения не является единственно пригодным и наилучшим и применен в данной работе в силу «хорошего поведения» функций  $\eta$  и  $\gamma$ .

На основе расчета сделаем ряд заключений.

1. Абсолютный максимум  $\eta$  (без ограничения по  $\gamma$ ) достигается в точке  $X=1.46; Y=0$ . Этот режим реализуется лишь при  $a_1=0$  (что лишено физического смысла) или при  $a_1 \neq 0; p_l=0$  для  $l=2, 3, \dots, n$ . Последнее означает наличие лишь одной предметной волны ( $n=1$ ),<sup>5</sup> и в этом случае абсолютный  $\eta_{\max}$  составляет 33.5%, т. е. стремится к предельно достижимой  $\eta$  для линейно-фазовых голограмм [3].

2. В данном примере область изменения  $X$  и  $Y$  такова, что при достаточно больших значениях  $\eta$  (порядка 25—30%) уровень шумов, определяемый шумами носителя и зависящий от постоянной составляющей дифрагировавшего поля, становится чрезвычайно мал.<sup>6</sup> Для этой области  $\gamma$  может принимать очень большие значения (однако  $\gamma$  не обращается в бесконечность, поскольку на уровень шумов влияют неучтенные в данном рассмотрении факторы). Отметим также, что для других случаев расчета данная область может не существовать или существовать при очень малых  $\eta$ .

3. За исключением указанной области, с уменьшением отношения сигнал/шум происходит падение дифракционной эффективности  $\eta$ .

4. Наконец, отметим, что все данные выводы справедливы лишь для конкретного числового примера.

#### В ы в о д ы

В статье приведена постановка задач оптимизации параметров фазовых голограмм и в явном виде сформулирована задача оптимизации для конкретного объекта, представляющего собой совокупность диффузных и точечных источников.

Для случая линейно-фазовых голограмм получены расчетные соотношения и приведен пример расчета для  $n=2$  и неравных амплитуд предметных волн.

Как вытекает из расчета, абсолютный максимум  $\eta_{\max}$  дифракционной эффективности (без ограничения по  $\gamma$ ), равный 33.5%, достигается лишь при  $n=1$ , а при больших  $n$  он несколько спадает, и обеспечивается при режимах с малыми амплитудами предметных волн относительно опорной, что, очевидно, объясняется быстрым ростом паразитных порядков дифракции при росте первых.

Развитый аппарат применим при решении задач оптимизации для любого избранного объекта из совокупности  $\{n\}$ , а также при оптимизации по другим критериям.

#### Л и т е р а т у р а

- [1] J. Upatniecs, S. Leonard. JOSA, 60, 297, 1970.
- [2] И. С. Барбанель, Э. И. Крупицкий. Опт. и спектр., 33, 1145, 1972.
- [3] Н. Когельник. Microwaves, № 11, 1967.
- [4] И. С. Барбанель, Э. И. Крупицкий. ЖНПФИК, в. 4, 1972.

Поступило в Редакцию 4 октября 1972 г.

<sup>5</sup> При  $P_l \neq 0$  для  $l=2, 3, \dots, n$  для обеспечения  $\eta = \eta_{\max}$  (без ограничения по  $\gamma$ ), очевидно, следует выбирать близлежащую точку с  $Y = Y_{\min}$ . При наложении ограничений по  $\gamma$  применяется вышеописанная методика.

<sup>6</sup> Определяющая его постоянная составляющая дифрагировавшего поля  $B_0, 0 \dots 0$  стремится к нулю.