

ТЕОРИЯ ГУРЕВИЧА—КУБЕЛКИ—МУНКА
 ДЛЯ РАССЕИВАЮЩИХ СЛОЕВ
 С ДВУМЯ ОТРАЖАЮЩИМИ ГРАНИЦАМИ

Н. А. Войшвилло

В двухпотоковом двухпараметрическом приближении рассматривается плоский слой рассеивающей среды, ограниченный с двух сторон отражающими плоскостями с различными коэффициентами отражения. Полученные аналитические зависимости согласуются с результатами опытов, в которых измерялись коэффициенты отражения рассеивающих образцов при разных значениях коэффициента отражения «дна» — нижней пограничной поверхности. Показано, что область применения теории Гуревича—Кубелки—Мунка определяется не только свойствами рассеивающего слоя, но и величиной коэффициента отражения поверхностей, которыми он ограничен.

Приближенная двухпараметрическая теория многократного рассеяния света в сильно мутной среде, известная также под названием теории Гуревича—Кубелки—Мунка (ГКМ) [1-2], получила в настоящее время широкое распространение при изучении рассеивающих сред, что объясняется сравнительной простотой ее конечных формул. Эта теория рассматривает вопрос о прохождении светового потока через бесконечно протяженный плоскопараллельный слой изотропного рассеивающего вещества, освещенного с одной стороны (условно — верхней) диффузным потоком излучения и описывает световое поле системой двух простых дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dE_1}{dz} &= -k_2 E_1 + k_1 E_2, \\ \frac{dE_2}{dz} &= -k_1 E_1 + k_2 E_2. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь E_1 — освещенность сверху, а E_2 — освещенность снизу плоскости, расположенной на глубине z , где координата z отсчитывается вдоль нормали к слою от освещенной поверхности; $k_2 = K + S$ и $k_1 = S$, где K и S — так называемые константы поглощения и рассеяния соответственно. При этом полагается, что показатель преломления вещества, заполняющего пространство между частицами, не отличается от показателя преломления среды, окружающей рассеивающий слой. Поэтому система (1) решается при следующих граничных условиях:

$$E_1(0) = 1, \quad E_2(z_0) = 0, \quad (2)$$

где z_0 — толщина всего слоя и полагается, что наружная освещенность равна единице. Граничные условия (2) не приемлемы для очень большого отряда рассеивающих объектов, обладающих отражающими пограничными плоскостями, и поэтому вопрос их влияния на световое поле внутри рассеивающей среды уже давно стал привлекать внимание исследователей. Двухпотоковая двухпараметрическая теория с учетом действия отражающих пограничных плоскостей рассматривалась Гершуном [3],

Шифриным [4] и рядом зарубежных авторов [2, 5-8]. Шифриным система уравнений (1) была решена для случая, когда рассеивающий слой ограничен с нижней стороны подстилающей поверхностью. Гершуном [3] двухпотоковая двухпараметрическая теория была развита применительно к плоскому слою молочного стекла, находящегося в воздухе. В этом случае граничные условия приобретают вид

$$E_1(0) = (1 - \rho) + \rho' E_2(0), \quad E_2(z_0) = \rho' E_1(z_0). \quad (3)$$

Здесь ρ — коэффициент отражения диффузного света, падающего из окружающей среды на полированную поверхность стекла и ρ' — коэффициент отражения для диффузного света, падающего изнутри (в толще стекла) на ту же поверхность. Решение системы (1) с указанными граничными условиями привело к следующим выражениям для коэффициентов отражения r и пропускания t пластинки молочного стекла:

$$\left. \begin{aligned} r &= 1 - \frac{1 - \rho}{1 + \rho'} \left[1 - \frac{R - \rho'}{1 - R\rho'} (1 - e^{-2Lz_0}) \right. \\ &\quad \left. 1 - \frac{(R - \rho')^2}{(1 - R\rho')^2} e^{-2Lz_0} \right], \\ t &= \frac{1 - \rho}{1 + \rho'} \frac{1 - \frac{(R - \rho')^2}{(1 - R\rho')^2} e^{-2Lz_0}}{1 - \frac{(R - \rho')^2}{(1 - R\rho')^2} e^{-2Lz_0}} e^{-Lz_0}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

В этих формулах две константы k_2 и k_1 системы (1) заменены эквивалентной им системой констант R и L , обладающих следующим физическим смыслом: R — коэффициент отражения от бесконечно толстого слоя и L — глубинный показатель ослабления, при этом $L = \sqrt{k_2^2 - k_1^2}$.

В настоящей работе двухпотоковая двухпараметрическая теория распространения света в сильно мутной среде рассматривается для случая, когда рассеивающий слой ограничен двумя пограничными плоскостями с разными коэффициентами отражения и, таким образом, имеет целью несколько расширить теорию, данную Гершуном.

Примем, что плоскость, на которую падает освещающий поток, для диффузного потока, падающего из толщи рассеивающего слоя, имеет коэффициент отражения B , а нижняя пограничная поверхность — коэффициент отражения A . В этом случае граничные условия записываются следующим образом:

$$E_1(0) = 1 - r_0 + BE_2(0), \quad E_2(z_0) = AE_1(z_0). \quad (5)$$

От системы (1) переходим к системе

$$E_2''/E_2 = E_1''/E_1 = L^2 \quad (6)$$

и ищем ее решение в виде $E = c_1 e^{Lz} + c_2 e^{-Lz}$, где константы c_1 и c_2 определяются после подстановки граничных условий (5). Решение системы (1) с граничными условиями (5) имеет следующий вид:

$$E_1(z) = \frac{1 - r_0}{1 - BR} \frac{\left[1 - \frac{R(R - A)}{1 - AR} \right] e^{-2L(z_0 - z)}}{1 - \frac{R - A}{1 - AR} \frac{R - B}{1 - BR} e^{-2Lz_0}} e^{-Lz},$$

$$E_2(z) = (1 - r_0) \frac{R - \frac{R - A}{1 - AR} e^{-2L(z_0 - z)}}{(1 - BR) - \frac{(R - A)(R - B)}{1 - AR} e^{-2Lz_0}} e^{-Lz}.$$

Отсюда коэффициенты отражения и пропускания плоскопараллельного рассеивающего слоя равны

$$\begin{aligned}
 r &= r_0 + (1 - B) E_2(0) = \\
 &= 1 - \frac{1 - r_0}{1 + B} \left[1 - \frac{R - B}{1 - BR} \frac{1 - \frac{R - A}{1 - AR} \frac{1 - BR}{R - B} e^{-2Lz_0}}{1 - \frac{R - A}{1 - AR} \frac{R - B}{1 - BR} e^{-2Lz_0}} \right], \\
 t &= (1 - A) E_1(z_0) = \frac{(1 - A)(1 - r_0)}{1 - BR} \frac{1 - \frac{R(R - A)}{1 - AR}}{1 - \frac{R - A}{1 - AR} \frac{R - B}{1 - BR} e^{-2Lz_0}} e^{-Lz_0}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь r_0 имеет смысл коэффициента отражения для светового потока падающего из окружающей среды на внешнюю сторону верхней пограничной поверхности.

Сопоставление с результатами, полученными ранее Гершуном и Шифриным, показывает, что при подстановке в формулы (7) значения $A = -B = \rho'$ и $r_0 = \rho$ мы получаем (4), а если заменить систему постоянных L и R эквивалентной им системой параметров, принятых в работе [4], то в итоге получим формулы Шифрина.

Имеет смысл рассмотреть случай непоглощающей среды, когда $K = 0$, $k_1 = k_2 = S$, $L = 0$ и $R = 1$. Тогда вместо системы (6) решается система $E_2''/E_2 = E_1'/E_1 = 0$ и окончательные выражения для коэффициентов отражения и пропускания рассеивающего слоя приобретают вид

$$\begin{aligned}
 r &= r_0 + (1 - r_0)(1 - B) \frac{(1 - A)S z_0 + A}{1 - AB + (1 - A)(1 - B)S z_0}, \\
 t &= (1 - r_0) \left[1 - \frac{\frac{A}{1 - A} + S z_0}{\frac{1 - AB}{(1 - A)(1 - B)} + S z_0} \right].
 \end{aligned} \tag{8}$$

Представляет интерес сопоставление полученных соотношений (7) и (8) с экспериментально определяемой зависимостью коэффициента отражения рассеивающего слоя от коэффициента отражения A нижней поверхности.

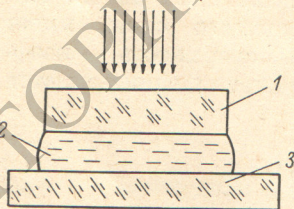


Рис. 1. Схема опыта.

1 — пластина молочного стекла (марки МС12, МС13 и МС14), 2 — слой иммерсии, 3 — подложка (стекло марок ОНС, МС14 толщиной 10 мм и ИРС).

Такая экспериментальная проверка оказалась возможной благодаря разработке серии отражающих сильно рассеивающих стекол марок ОНС (буквы ОНС в названии марок являются кратким обозначением отражающих нейтральных стекол) с различными коэффициентами диффузного отражения [9]. Используемый в опыте исследуемый объект (рис. 1) представлял собой систему, состоящую из плоской пластинки молочного стекла с коэффициентом пропускания не равным нулю и образца стекла марки ОНС не пропускающего свет (его в дальнейшем будем называть подложкой). Между обоими стеклянными образцами находился слой иммерсии. Показатели преломления стеклянных образцов и иммерсии с точностью до второго знака после запятой были равны между собой. Такой исследуемый объект представляет собой рассеивающий слой, у которого в обозначениях настоящей работы $B = \rho'$, A равно коэффициенту отражения подложки—образца марки ОНС и $r_0 = \rho$ — коэффициенту отражения для полированной поверхности пластинки молочного стекла, рассчитанного по формулам Френеля, при нормальном падении освещающего пучка (в опыте применялся коллимированный освещающий пучок, угол расходимости которого равнялся ~ 0.15 рад.). В качестве образцов использовались плоскопараллельные пластики из молочного

стекла марок МС14, МС12 и МС13. Измерения производились при помощи автоматического спектрофотометра СФ-2 в видимой области спектра. Коэффициенты отражения подложек менялись в пределах от 0.96 до 0.26 и, кроме того, использовалась подложка из стекла марки ИКС с коэффициентом отражения $A = 0$, имитирующая поглощающее «дно».

Для удобства сопоставления с экспериментом формулы (7) и (8) для коэффициента отражения r целесообразно представить в несколько ином виде, который они приобретают после некоторых преобразований

$$\frac{1-\rho}{r-\rho} \left[(1 - e^{-2Lz_0}) - A \left(R - \frac{e^{-2Lz_0}}{R} \right) \right] = A \left(\frac{R-\rho'}{1-\rho'} \frac{e^{-2Lz_0}}{R} - \frac{1-R\rho'}{1-\rho'} \right) + \frac{1-R\rho'}{R(1-\rho')} - \frac{R-\rho'}{1-\rho'} e^{-2Lz_0}, \quad (9)$$

$$\frac{r-\rho-A(1-\rho)}{1-r} = (1-\rho') S z_0 - A [S z_0 (1-\rho') + \rho']. \quad (10)$$

Из формулы (9) следует, что составная функция $(1-\rho)/(r-\rho)[(1 - e^{-2Lz_0}) - A(R - e^{-2Lz_0}/R)]$, которую мы обозначим через x и которая относится к молочной пластинке толщиной z_0 с константами L и R , должна линейно зависеть от коэффициентов подложек A . То же можно сказать и о левой части уравнения (10) $[r-\rho-A(1-\rho)]/(1-r)$, которую в дальнейшем будем обозначать через y . Константы L определялись на основе измерения коэффициентов яркости исследуемых образцов молочного стекла, в которых реализуется глубинный режим, при различной их толщине, подобно тому как это для стекла марки МС14 описано в работе [10]. Коэффициент отражения для слоя бесконечной толщины R определялся на основе измерения коэффициента отражения достаточно толстых образцов, у которых коэффициент диффузного пропускания был близок к нулю. Затем по формулам, указанным в работе [5], производился пересчет, в результате которого были получены значения R для рассеивающего стекла без преломляющих границ. Способ определения коэффициента отражения A подложек описан в работе [11]. Прежде чем переходить к рассмотрению экспериментальных результатов, отметим, что для полной корректности сопоставления опыта с рассмотренной выше теорией необходимо выполнение двух условий: 1) сохранение неизменной формы тела яркости по мере изменения координаты z , т. е. реализация глубинного режима; 2) освещение образцов диффузным пучком света. Проверка реализации глубинного режима производилась на основе измерения индикатрис излучения, рассеянного образцами различной толщины. При этом для исключения действия преломляющих границ образцы помещались с прослойкой иммерсии между двумя полуцилиндрами из прозрачного оптического стекла, через цилиндрические поверхности которых производилось наблюдение рассеянного света. Таким образом, первое условие, за исключением специально оговоренных ниже случаев, было выполнено. Второе условие, напротив, у нас не выполнялось. Однако следует иметь в виду, что это условие непосредственно связано с предположением о полной диффузности тела яркости рассеянного излучения в толще среды, которое положено в основу теории ГКМ и введено с тем, чтобы обеспечить уже в пограничном слое среды, в который входит освещающий пучок, такое же пространственное распределение светового потока, как и в ее глубине. Поэтому с точки зрения лучшего соответствия с теорией исследуемые образцы следовало бы освещать таким пучком, у которого угловая структура была бы такой же, как угловая структура рассеянного излучения в толще образцов (так называемое квазидиффузное освещение [14]). Разумеется, это трудно осуществить, тем более, что образцы из разных сортов стекла имеют разные индикатрисы рассеяния. В нашем опыте измеренные значения r ниже тех значений r_g , которые имели бы место при диффузном освещении. Но различие это невелико, так как исследованные образцы имеют большую оптическую толщину и

малое удельное поглощение. Для образца стекла марки МС14 это различие $\Delta = r_g - r$ очень мало [12] и мы не будем его принимать во внимание. Для стекол марок МС12 и МС13 можно было бы дать ориентировочную оценку Δ , пользуясь, например, формулами Дживанелли [13], но мы поступим иначе. Очевидно, что образцы из стекла марок МС12 и МС13 любой толщины на подложке с большим, чем у них, коэффициентом отражения R не могут отражать больше, чем сама подложка, даже при диффузном освещении. В качестве подложки с наибольшим коэффициентом отражения использовался образец из стекла марки МС14 толщиной 10 мм, у которого $R = 0.963$. Наибольшее измеренное значение r образца из стекла марки МС12 на этой подложке равно 0.90. При замене направленного освещения на диффузное r возросло бы, но не могло бы превысить значения 0.963. Отсюда максимальное различие $\Delta = r_g - r$ не должно превосходить 7%. Для образцов из стекла марки МС13 аналогичная оценка дала максимальное значение разницы $\Delta = r_g - r$, равное 4%. Если в измеренные значения коэффициента отражения r внести коррекцию на отличие освещающего пучка от диффузного, согласно сделанным оценкам, то это приведет в формуле (9) к изменению множителя $(1-\rho)/(r-\rho)$. Однако проведенный расчет показал, что эта коррекция в измеряемом диапазоне значений r и ρ приводит к появлению дополнительного множителя, который в пределах 1% остается постоянным при всех значениях коэффициентов подложек A .¹ Это означает, что использование направленного освещения вместо диффузного в нашем случае не должно менять линейный характер зависимости $x=f(A)$.

На рис. 2 представлены зависимости $x=f(A)$ (график а) и $y=f(A)$ (график б) от коэффициента отражения подложек A для образца стекла марки МС14 толщиной 0.31 мм и трех образцов из стекла марки МС12 толщиной 2.05, 0.98 и 0.44 мм. Показатель поглощения в стекле марки МС14 пренебрежимо мал [10] по сравнению с показателем рассеяния σ , что и дало нам основание пользоваться формулами (8) и (10). Показатель рассеяния σ в стекле марки МС12 равен $\sim 38 \text{ мм}^{-1}$ и не менее 120 мм^{-1} у стекла марки МС14. Отсюда ориентировочная оптическая толщина τ образца из стекла марки МС14 не меньше 36, а у образцов из стекла марки МС12 меняется от 16 до 78. Добавим, что в исследованных образцах коэффициент пропускания для прямо прошедшего не рассеянного света пренебрежимо мал. Как видно из рис. 2, зависимости $x=f(A)$ и $y=f(A)$ хорошо аппроксимируются прямыми линиями. Незначительное искривление графика наблюдается у самого тонкого образца из стекла марки МС12, что и следовало ожидать, так как при этой толщине уже начинается отступление от глубинного режима. Таким образом, полученная аналитическая зависимость, описывающая на основе теории ГКМ связь между коэффициентом отражения рассеивающего слоя и коэффициентом отражения его нижней границы, удовлетворительно подтверждается экспериментально.

Полученные экспериментальные результаты можно рассматривать не только с точки зрения подтверждения ими теории, но и попытаться на их основе осветить следующие два вопроса: 1) роль характера освещающего пучка в двухпотоковой приближенной теории; 2) влияние нижней отражающей поверхности — «дна» — на границы применимости теории ГКМ. Графики рис. 2 свидетельствуют о том, что при соблюдении глубинного режима закономерности отраженного излучения хорошо описываются формулами теории ГКМ даже при направленном освещении рассеивающего слоя. Аналогичное подтверждение аналитических зависимостей экспериментом, в котором применялся коллимированный освещающий пучок, наблюдается и для образца из другого, менее замутненного

¹ Исключение составляет самый тонкий образец из стекла марки МС13 (о котором речь пойдет ниже) в случае измерения с подложкой — поглощающим «дном». В этом случае дополнительный множитель, возникающий вследствие коррекции, отличается на 5% от аналогичных множителей для других подложек.

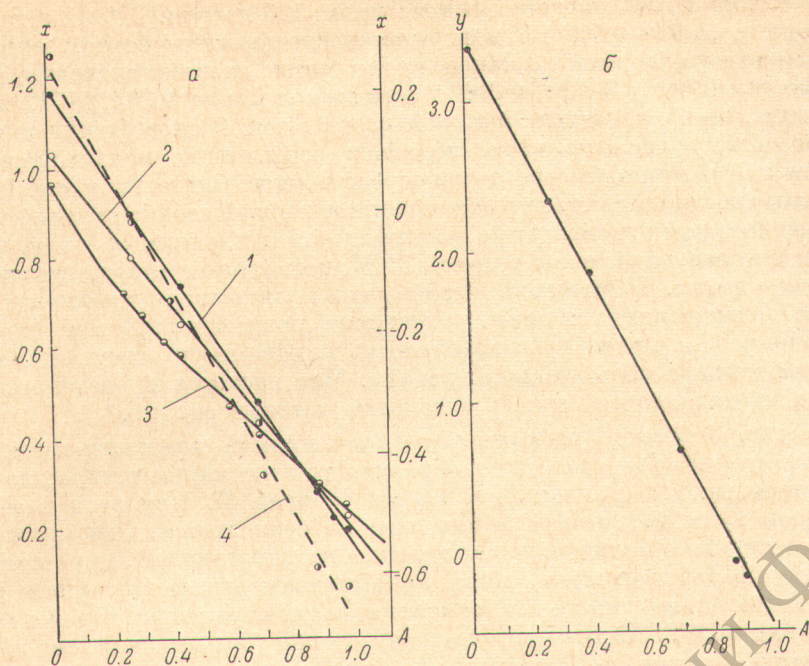


Рис. 2. Зависимость функции $x = (1 - \rho)/(r - \rho) \left[(1 - e^{-2Lz_0}) - A \left(R - \frac{e^{-2Lz_0}}{R} \right) \right]$ и $y = [r - \rho - A(1 - \rho)]/(1 - r)$ (б) от коэффициента отражения A нижней границы слоя.

Кривые 1, 2 и 3 — образцы из стекла марки МС12 (левая шкала ординат); 1 — $z_0 = 2.05$ мм, $\tau \approx 78$; 2 — $z_0 = 0.98$ мм, $\tau \approx 37$; 3 — $z_0 = 0.44$ мм, $\tau = 16$. 4 — образец из стекла марки МС14 (правая шкала ординат) $z_0 = 0.31$ мм, $\tau \approx 36$. Этот же образец на рис. 2, б.

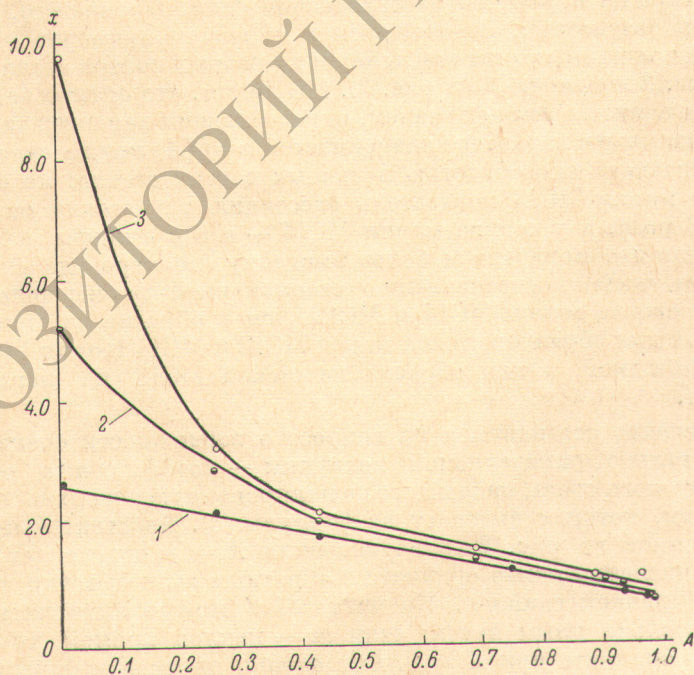


Рис. 3. Зависимость функции x от коэффициента отражения A нижней границы слоя для образцов из стекла марки МС13.

1 — $z_0 = 6.15$ мм, $\tau \approx 117$; 2 — $z_0 = 2.0$ мм, $\tau = 38$; 3 — $z_0 = 1.0$ мм, $\tau \approx 19$.

сорта стекла МС13, представленного прямой 1 на рис. 3 (его оптическая толщина равна ~ 117). Во всех трех исследованных сортах молочного стекла мал коэффициент удельного поглощения: он имеет значения, не превосходящие $2 \cdot 10^{-5}$, $8 \cdot 10^{-5}$ и $2 \cdot 10^{-4}$ для стекол марок МС14, МС12 и МС13 соответственно. Вследствие высокой рассеивающей способности и малого поглощения у исследованных образцов освещенных коллимированным пучком света очень быстро в непосредственной близости к освещаемой поверхности устанавливается стационарное распределение светового поля, которое остается неизменным с ростом глубины и, таким образом, выполняется условие, налагаемое теорией ГKM, несмотря на отсутствие диффузного освещения. Разумеется, чтобы дать количественную оценку параметров (оптической толщины, удельного поглощения), при которых имеет место эта малая чувствительность к характеру освещения, требуется выполнение обстоятельной работы. Что касается проведенных опытов, то из них можно извлечь отдельные частные оценки.

На рис. 3 помимо уже рассмотренной прямой представлены кривые зависимостей $x=f(A)$ для двух образцов той же марки стекла, но меньшей толщины: 2.0 (кривая 2) и 1.0 мм (кривая 3). При этом в образце толщиной 1 мм глубинный режим уже не реализуется. Эти кривые позволяют судить о большом влиянии «дна» на характеристики рассеянного излучения. Действительно, пока коэффициент отражения «дна» достаточно велик (примерно до 0.4) закономерности отражения хорошо описываются теорией ГKM даже для слоя, в котором (без отражающих границ) глубинный режим не реализован — прямолинейные участки кривых под номером 3 на рис. 2 и 3. В то же время поглощающее «дно» ($A=0$) вызывает резкую деформацию тела яркости, что при недостаточной оптической толщине приводит к отступлению от закономерностей, соответствующих двухпотоковой приближенной теории. Это наблюдается даже у слоя, в котором при отсутствии поглощающего «дна» глубинный режим реализован — образец из стекла марки МС13 толщиной 2 мм (кривая 2 на рис. 3). Таким образом, границы применимости теории ГKM во многом зависят от величины коэффициента отражения поверхностей, которыми ограничен рассеивающий слой. Кроме того, интересно сопоставить результаты, относящиеся к образцам примерно одинаковой оптической толщины, но изготовленным из разных сортов стекла (прямые 2 и 4 на рис. 2 и кривую 2 на рис. 3). Мы видим, что оптическая толщина не является единственным фактором, определяющим характер зависимости $x=f(A)$. Различие в характере зависимостей $x=f(A)$ можно связать с разной рассеивающей способностью в разных сортах стекла: по сравнению со стеклом марки МС13 показатель рассеяния σ у стекла марки МС12 больше в 2 раза, а у стекла марки МС14 — в 6 с лишним раз. Можно полагать, что это приводит к более быстрому (по мере удаления от поглощающего «дна») восстановлению стационарной формы тела яркости в образцах стекла марок МС14 и МС12, чем в образце из стекла МС13. В результате для образцов стекол марок МС12 и МС14 теория ГKM оказывается применимой, а для образца из стекла МС13 на поглощающем «дне» — нет.

В заключение остановимся на вопросе о возможности оценки трудно экспериментально определяемой величины — коэффициента отражения ρ' для диффузного света, падающего на полированную поверхность образца из его толщ, которая вытекает из формулы (8). Действительно, экстраполяция прямой на рис. 2, б до значения $A=1$ определяет значение ρ' , которое численно равно ординате с обратным знаком точки на прямой с абсциссой равной единице. Кроме того, ρ' можно вычислить из этой прямой несколько иным путем: если m — наклон прямой, то $\rho' = m - y_0$, где y_0 — ордината при $A=0$. Обе оценки привели к близким значениям, среднее из которых дает значение $\rho' = 0.60$.

Благодарю Л. Д. Блинову и Л. Р. Миронову за помощь в измерениях и в обработке их результатов.

Литература

- [1] М. М. Гуревич. Phys. Zs., 31, 753, 1930; Тр. ГОИ, 6, 57, 1931.
[2] P. Kubelka, F. Munk. Zs. Phys., 20, 593, 1931.
[3] А. А. Гершун. Избранные труды по фотометрии и светотехнике. ГИФМЛ, М., 1958.
[4] К. С. Шифрин. Тр. Гос. геофиз. obs. им. Воейкова, 101, 244, 1953.
[5] J. W. Rude. Proc. Roy. Soc., A131, 451, 1931.
[6] J. L. Saunderson. J. Opt. Soc. Am., 32, 727, 1942.
[7] J. C. Richmond. J. Res. N. B. S., 67C, 217, 1963.
[8] R. C. Progelhof, J. L. Ihgone. J. Amer. Cer. Soc., 53, 34, 1970.
[9] Т. И. Вейнберг, Н. А. Войшвилло, Г. А. Махлина. Авторское свидетельство № 201611, 1963, Бюллетень изобр., № 18, 91, 1967.
[10] Н. А. Войшвилло. Опт. и спектр., 31, 275, 1971.
[11] Н. А. Войшвилло. Опт. и спектр., 36, в. 6, 1974.
[12] Н. А. Войшвилло. Опт. и спектр., 31, 458, 1971.
[13] R. G. Giovanelli. Optica Acta, 2, 153, 1955.
[14] Г. В. Розенберг. Спектроскопия светорассеивающих сред. Минск, 1963.

Поступило в Редакцию 8 февраля 1972 г.