УДК 535.14

О МОМЕНТЕ ИМПУЛЬСА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ОПТИЧЕСКИ АКТИВНОЙ СРЕДЕ

В. Н. Белый и *А. Н. Сердюков*

В рамках феноменологической (классической и квантовой) электродинамики рассмотрен закон сохранения спинового момента поля в непоглощающей оптически активной изотропной среде.

1. Для теории естественной оптической активности характерна модификация ряда основных соотношений по сравнению с привычными соотношениями электродинамики неактивных сред. Это в первую очередь относится к вопросам, связанным с граничными условиями [1, 2], а также с законами сохранения энергии [2–4] и импульса [5, 6].

В настоящем сообщении рассмотрен закон сохранения момента импульса электромагнитного поля в оптически активной изотропной среде. При этом получено выражение для спинового момента поля, которое также отличается от аналогичного выражения в случае неактивных сред [7] и при квантовании приводит к правильному значению спина фотона.

Закон сохранения момента импульса электромагнитного поля устанавливается обычно в рамках лагранжева формализма с использованием четырехмерной формулировки уравнений поля (см., например, [7–9]), что связано со значительной громоздкостью рассмотрения. Соотношение, выражающее закон сохранения момента импульса поля, получено непосредственно для трехмерных уравнений.

2. Будем исходить из уравнений Максвелла для свободного поля излучения

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \tag{2}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \tag{3}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 0 \tag{4}$$

и материальных уравнений [8]

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} - \frac{\alpha}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{5}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B} - \frac{\alpha}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{6}$$

описывающих электромагнитные свойства непоглощающей изотропной оптически активной среды (ε, μ, α — скалярные вещественные параметры). Согласно (1), (2), величины $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ могут быть выражены через векторный потенциал $\mathbf{A}$ следующим образом:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \tag{7}$$

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}. \tag{8}$$

Для однородной среды при независящих от координат ε, μ и α на $\mathbf{A}$ можно наложить дополнительное условие Лоренца

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=0. \tag{9}$$

Умножая векторно слева обе части уравнения (3) на $\mathbf{A}$, а уравнения (7) — на $\mathbf{D}$ и складывая, получим

$$[\mathbf{A}\times\operatorname{rot}\mathbf{H}]+[\mathbf{D}\times\mathbf{E}]=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{A}\times\mathbf{D}]. \tag{10}$$

Используя соотношения (5)—(9), преобразуем левую часть этого равенства[1]

$$[\mathbf{A}\times\operatorname{rot}\mathbf{H}]+[\mathbf{D}\times\mathbf{E}]=[\operatorname{rot}\mathbf{A}\times\mathbf{H}]+\operatorname{grad}\mathbf{AH}-\mathbf{H}\nabla\cdot\mathbf{A}-\mathbf{A}\nabla\cdot\mathbf{H}+[\mathbf{D}\times\mathbf{E}]=$$
$$=[\mathbf{B}\times\mathbf{H}]+[\mathbf{D}\times\mathbf{E}]+\nabla(\mathbf{AH}-\mathbf{A}\cdot\mathbf{H}-\mathbf{H}\cdot\mathbf{A})=-\frac{\alpha}{c}\left(\left[\mathbf{B}\times\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right]+\left[\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\times\mathbf{E}\right]\right)+$$
$$+\nabla(\mathbf{AH}-\mathbf{A}\cdot\mathbf{H}-\mathbf{H}\cdot\mathbf{A})=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\alpha[\mathbf{B}\times\mathbf{E}]+\nabla(\mathbf{AH}-\mathbf{A}\cdot\mathbf{H}-\mathbf{H}\cdot\mathbf{A}).$$

В результате (10) приобретает форму уравнения непрерывности

$$\frac{\partial R_{ik}}{\partial x_k}+\frac{\partial s_i}{\partial t}=0, \tag{11}$$

выражающую закон сохранения момента импульса поля. Здесь

$$\mathbf{s}=\frac{1}{4\pi c}\{[\mathbf{D}\times\mathbf{A}]-\alpha[\mathbf{B}\times\mathbf{E}]\} \tag{12}$$

представляет собой вектор плотности момента импульса поля в оптически активной среде, а тензор

$$R=(R_{ik})=\frac{1}{4\pi}(\mathbf{AH}-\mathbf{A}\cdot\mathbf{H}-\mathbf{H}\cdot\mathbf{A}) \tag{13}$$

является тензором плотности потока спина. От обычного выражения для спина поля в неактивной среде [7] (12) отличается слагаемым, пропорциональным параметру активности, и при $\alpha=0$, $\varepsilon=\mu=1$ (12) переходит в выражение $\mathbf{s}=[\mathbf{E}\times\mathbf{A}]/4\pi c$ для плотности спина поля в вакууме.

3. Рассмотрим свободное электромагнитное поле, сосредоточенное в конечном объеме V оптически активной изотропной среды, и разложим потенциал по плоским волнам

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k};\,\lambda=\pm1}a(\mathbf{k},\lambda;t)\,\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}\exp(i\mathbf{kx}). \tag{14}$$

Здесь $a(\mathbf{k},\lambda;t)$ — комплексные амплитуды поля, удовлетворяющие условию вещественности потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$

$$a^*(\mathbf{k},\lambda;t)=a(-\mathbf{k},\lambda;t). \tag{15}$$

Для единичных векторов циркулярной поляризации $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}$ справедливы соотношения

$$\mathbf{e}^*_{\mathbf{k}\lambda}\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda'}=\delta_{\lambda\lambda'},\quad \mathbf{e}^*_{\mathbf{k}\lambda}=\mathbf{e}_{-\mathbf{k}\lambda}, \tag{16}$$

$$[\mathbf{k}\times\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}]=-i\lambda\,|\mathbf{k}|\,\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}. \tag{17}$$

Согласно (3)—(9), $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\mu}\nabla^2\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}-\frac{2\alpha}{c^2}\operatorname{rot}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=0. \tag{18}$$

---

[1] Мы придерживаемся обозначений, принятых в [10, 11]. В частности, точкой разделяются величины, по индексам которых не производится суммирование, и, наоборот, векторы, стоящие рядом без точки, представляют скалярное произведение, так что, например, $\mathbf{AH}=A_iH_i$ и $(\mathbf{H}\cdot\mathbf{A})_{ij}=H_iA_j$.

Из (14), (17), (18) находим решение для $a(\mathbf{k}, \lambda; t)$ в виде простых периодических функций

$$a(\mathbf{k}, \lambda; t) = a_{\mathbf{k}\lambda} \exp(-i\omega_{\mathbf{k}\lambda} t)$$

с частотой

$$\omega_{\mathbf{k}\lambda} = \frac{c\,|\mathbf{k}|}{\sqrt{(\varepsilon + 2\lambda\alpha\,|\mathbf{k}|)\,\mu}}. \tag{19}$$

Плотности энергии и импульса поля, описывающегося уравнениями (1)—(6), согласно [12], имеют вид[2]

$$w = \frac{1}{8\pi}\left(\varepsilon \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu}\mathbf{B}^2 - \frac{2\alpha}{c}\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right), \tag{20}$$

$$\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c}[\mathbf{D} \times \mathbf{B}] - \frac{\alpha}{8\pi c}(B_i \nabla E_i - E_i \nabla B_i). \tag{21}$$

Интегрируя (20), (21) и (12) по объему, занимаемому полем, и используя соотношения (14)—(17), (19), получим выражения для энергии, импульса и спина поля в виде суммы соответствующих величин отдельных плоских волн

$$W = \frac{1}{4\pi c^2}\sum_{\mathbf{k};\,\lambda=\pm1} \omega^2_{\mathbf{k}\lambda}(\varepsilon + 2\lambda\alpha\,|\mathbf{k}|)\,a_{\mathbf{k}\lambda}a^*_{\mathbf{k}\lambda}, \tag{22}$$

$$\mathbf{G} = \frac{1}{4\pi c^2}\sum_{\mathbf{k};\,\lambda=\pm1} \mathbf{k}\omega_{\mathbf{k}\lambda}(\varepsilon + 2\lambda\alpha\,|\mathbf{k}|)\,a_{\mathbf{k}\lambda}a^*_{\mathbf{k}\lambda}, \tag{23}$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi c^2}\sum_{\mathbf{k};\,\lambda=\pm1} \lambda\omega_{\mathbf{k}\lambda}\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}(\varepsilon + 2\lambda\alpha\,|\mathbf{k}|)\,a_{\mathbf{k}\lambda}a^*_{\mathbf{k}\lambda}. \tag{24}$$

4. Вводя канонические переменные $Q_{\mathbf{k}\lambda}$ и $P_{\mathbf{k}\lambda}$ согласно соотношениям

$$\left.\begin{aligned} Q_{\mathbf{k}\lambda} &= (a_{\mathbf{k}\lambda} + a^*_{\mathbf{k}\lambda})\sqrt{(\varepsilon + 2\lambda\alpha\,|\mathbf{k}|)/8\pi c^2}, \\ P_{\mathbf{k}\lambda} &= -i\omega_{\mathbf{k}\lambda}(a_{\mathbf{k}\lambda} - a^*_{\mathbf{k}\lambda})\sqrt{(\varepsilon + 2\lambda\alpha\,|\mathbf{k}|)/8\pi c^2}, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

представим (22) в виде суммы энергий осцилляторов

$$W = \sum_{\mathbf{k};\,\lambda=\pm1}\frac{1}{2}(P^2_{\mathbf{k}\lambda} + \omega^2_{\mathbf{k}\lambda}Q^2_{\mathbf{k}\lambda}). \tag{26}$$

Следуя стандартной процедуре квантования поля в среде [13, 14], введем операторы обобщенной координаты и обобщенного импульса (25), удовлетворяющие перестановочным соотношениям

$$[Q_{\mathbf{k}\lambda}, P_{\mathbf{k}'\lambda'}] = i\hbar\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{\lambda\lambda'}, \quad [Q_{\mathbf{k}\lambda}, Q_{\mathbf{k}'\lambda'}] = [P_{\mathbf{k}\lambda}, P_{\mathbf{k}'\lambda'}] = 0.$$

Определим теперь операторы рождения $c^+_{\mathbf{k}\lambda}$ и поглощения $c_{\mathbf{k}\lambda}$ кванта электромагнитного поля в среде

$$c^+_{\mathbf{k}\lambda} = -i(P_{\mathbf{k}\lambda} + i\omega_{\mathbf{k}\lambda}Q_{\mathbf{k}\lambda})/\sqrt{2\hbar\omega_{\mathbf{k}\lambda}},$$

$$c_{\mathbf{k}\lambda} = i(P_{\mathbf{k}\lambda} - i\omega_{\mathbf{k}\lambda}Q_{\mathbf{k}\lambda})/\sqrt{2\hbar\omega_{\mathbf{k}\lambda}},$$

$$[c_{\mathbf{k}\lambda}, c_{\mathbf{k}'\lambda'}] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{\lambda\lambda'}.$$

Тогда из (26) оператор Гамильтона свободного поля запишется в виде

$$\mathscr{H}_\gamma = \sum_{\mathbf{k};\,\lambda=\pm1}\hbar\omega_{\mathbf{k}\lambda}\left(c^+_{\mathbf{k}\lambda}c_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2}\right),$$

---

[2] Здесь мы пользуемся аналогом выражения Минковского для плотности импульса поля.

а для оператора потенциала в шредингеровском представлении будем иметь

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k};\ \lambda=\pm 1} \sqrt{\frac{4\pi c^2 \hbar}{V\omega_{\mathbf{k}\lambda}(\varepsilon + 2\lambda\alpha|\mathbf{k}|)}} \left\{ \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} c_{\mathbf{k}\lambda} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x}) + \mathbf{e}^*_{\mathbf{k}\lambda} c^+_{\mathbf{k}\lambda} \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{x}) \right\}.$$

Аналогичным образом из (23), (24) получаем квантованные выражения для импульса и спина

$$\mathbf{G} = \sum_{\mathbf{k};\ \lambda=\pm 1} \hbar \mathbf{k} c^+_{\mathbf{k}\lambda} c_{\mathbf{k}\lambda},$$

$$\mathbf{S} = \sum_{\mathbf{k};\ \lambda=\pm 1} \lambda\hbar \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} c^+_{\mathbf{k}\lambda} c_{\mathbf{k}\lambda}.$$

Таким образом, классические выражения (12), (21) при квантовании приводят к правильным выражениям для импульса и спина фотона в оптически активной среде.

Литература

[1] R. M. Hornreich, S. Shtrikman. Phys. Rev., *171*, 1065, 1968.
[2] Б. В. Бокуть, А. Н. Сердюков. ЖЭТФ, *61*, 1808, 1971.
[3] В. Н. Александров. Кристаллография, *15*, 996, 1970.
[4] Б. В. Бокуть, А. Н. Сердюков, Ф. И. Федоров. Кристаллография, *15*, 1002, 1970.
[5] Б. В. Бокуть, А. Н. Сердюков. Ж. прикл. спектр., *11*, 704, 1969.
[6] М. Марван. Чехосл. физ. журн., *10*, 771, 1960.
[7] А. А. Боргардт. Научн. зап. Днепропетр. унив., *41*, вып. 4, 1953.
[8] Б. В. Бокуть, А. Н. Сердюков, Ф. И. Федоров. Препринт ИФ АН БССР, Минск, 1970.
[9] А. А. Богуш, Л. Г. Мороз. Введение в теорию классических полей, изд. «Наука и техника», Минск, 1968.
[10] Ф. И. Федоров. Оптика анизотропных сред. Изд. АН БССР, Минск, 1958.
[11] Ф. И. Федоров. Теория упругих волн в кристаллах, изд. «Наука», М., 1965.
[12] Б. В. Бокуть, А. Н. Сердюков. ДАН БССР, *16*, 784, 1972.
[13] А. И. Алексеев, Ю. П. Никитин. ЖЭТФ, *48*, 1669, 1965.
[14] Е. И. Каравaев. Сб. «Взаимодействие излучения с веществом», 167, Атомиздат, М., 1966.

Поступило Редакцию 10 сентября 1973 г.