УДК 535.36.01

МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ СВЕТА НА МАЛОЙ ЧАСТИЦЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

А. Г. Рамм

В статье приведены аналитические формулы для численного расчета матрицы рассеяния света на малой частице произвольной формы с учетом магнитного дипольного рассеяния.

§ 1. Постановка задачи

1. Главная задача теории рассеяния света малыми частицами состоит в вычислении матрицы рассеяния. В литературе [1] эта матрица вычислена в предположении, что магнитным дипольным излучением частицы можно пренебречь ([1], стр. 97). Кроме того, формулы, приведенные в литературе, в частности в известной монографии [1], выражают матрицу рассеяния через тензор поляризуемости частицы. Так как формулы для вычисления этого тензора для частицы произвольной формы не приводятся, то и матрица рассеяния не может быть вычислена до конца в общем случае, когда рассматривается рассеяние на частице произвольной формы. Между тем значение матрицы рассеяния необходимо для решения ряда практически важных задач:

1) расчет комплексного показателя преломления разбавленных растворов,

2) расчет показателя преломления света в межзвездном пространстве,

3) влияние формы капель и снежинок на рассеяние ими радиоволн.

Число примеров без труда можно увеличить.

2. Основное содержание данной работы заключается в следующем. Во-первых, выписана формула для матрицы рассеяния плоской электромагнитной волны с произвольной поляризацией на малой в масштабе длины волны частице произвольной формы и произвольно ориентированной в пространстве. Частица предполагается однородной. Магнитное дипольное излучение частицы учитывается, поэтому формула для матрицы рассеяния содержит тензоры электрической и магнитной поляризуемости частицы. Учет магнитного дипольного излучения существен, например, для хорошо проводящих частиц или частиц с аномально малым электрическим дипольным моментом.

Во-вторых, приведены явные формулы, позволяющие выразить тензоры электрической и магнитной поляризуемости частицы произвольной формы через интегралы от известных функций. Эти интегралы являются величинами, зависящими лишь от геометрических характеристик частицы. Все формулы даны в системе единиц СИ.

§ 2. Формулировка результатов

1. Определим матрицу рассеяния плоской электромагнитной волны на частице произвольной формы и произвольно ориентированной с помощью формулы

$$E' \sim \frac{\exp(ikr)}{r} SE, \quad r \to \infty. \tag{1}$$

Здесь r — расстояние от начала координат, которое помещено внутри частицы, до точки наблюдения, E — электрический вектор падающей плоской волны, E' — рассеянной волны, k — волновое число.

Выберем, как обычно, систему координат, в которой орты направления распространения падающего и рассеянного полей n и n' лежат в одной плоскости (она называется плоскостью рассеяния) YOZ. Через Θ обозначим угол рассеяния $\Theta=(n, n')$, скобки обозначают скалярное произведение векторов. Обозначим через $\alpha=(\alpha_{ij})$ и $\beta=(\beta_{ij})$ тензоры электрической и магнитной поляризуемости частицы в выбранной системе координат.

2. При принятых обозначениях верна формула

$$S=\frac{k^2 V}{4\pi}\begin{pmatrix}\mu_0\beta_{11}+\alpha_{22}\cos\Theta-\alpha_{32}\sin\Theta, & \alpha_{21}\cos\Theta-\alpha_{31}\sin\Theta-\mu_0\beta_{12}\\ \alpha_{12}-\mu_0\beta_{21}\cos\Theta+\mu_0\beta_{31}\sin\Theta, & \alpha_{11}+\mu_0\beta_{22}\cos\Theta-\mu_0\beta_{32}\sin\Theta\end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Здесь V — объем частицы, μ_0 — магнитная проницаемость среды, окружающей частицу.

Формула (2) — первый результат статьи. Ее вывод приведен в § 4.

Второй результат состоит в указании формул для расчета тензоров α, для частицы произвольной формы. Эти тензоры определяются с помощью равенств [2]

$$P_q=\alpha_{qj} V\varepsilon_0 E_j, \quad M_q=\beta_{qj} V\mu_0 H_j, \quad \alpha_{qj}=\alpha_{qj}(\gamma). \qquad (3)$$

Здесь и далее по повторяющимся индексам надо суммировать, P — электрический дипольный момент, приобретаемый частицей объема V, находящиеся в среде с диэлектрической постоянной ε_0, в однородном электрическом поле E;

$$\gamma=(\varepsilon'-\varepsilon_0)/(\varepsilon'+\varepsilon_0),$$

где ε' — диэлектрическая проницаемость частицы (имеется в виду комплексная диэлектрическая проницаемость)

$$\varepsilon'=\varepsilon+i\sigma/\omega,$$

σ — проводимость частицы, ω — частота падающей волны, μ_0 — магнитная приницаемость среды, M — магнитный момент, приобретенный частицей при внесении ее в однородное магнитное поле H.

Предполагается, что магнитная проницаемость частицы совпадает с магнитной проницаемостью среды. Это предположение выполняется в большинстве практически интересных случаев. Впрочем нетрудно написать выражение для тензора магнитной поляризуемости и при $\mu\neq\mu_0$.

Формулы для расчета тензоров α, β имеют вид

$$\alpha_{qj}(\gamma)\approx\alpha_{qj}^{(n)}(\gamma), \quad |\alpha_{qj}^{(n)}(\gamma)-\alpha_{qj}(\gamma)|\leqslant Ac^{n+1}, \qquad (4)$$

где A и $0<c<1$ — постоянные, зависящие от геометрии частицы,

$$\alpha_{qj}^{(n)}(\gamma)=\frac{2}{V}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{(2\pi)^m}\frac{\gamma^{n+2}-\gamma^{m+1}}{\gamma-1}b_{qj}^{(m)}, \qquad (5)$$

$$b_{qj}^{(0)}=V\delta_{qj}, \quad b_{qj}^{(1)}=\iint\limits_{\Gamma\Gamma}\frac{N_q(s)\,N_j(t)}{r_{st}}\,ds\,dt, \quad r_{st}=|s-t|, \qquad (6)$$

$$b_{qj}^{(m)}=\iint\limits_{\Gamma\Gamma} ds\,dt\,N_q(t)\,N_j(s)\underbrace{\int\limits_{\Gamma}\ldots\int\limits_{\Gamma}}_{m-1\text{ раз}}\frac{1}{r_{st_{m-1}}}\psi(t_1, t)\,\psi(t_2, t_1)\ldots\times$$

$$\times\ldots\psi(t_{m-1}, t_{m-2})\,dt_1\ldots dt_{m-1}, \quad \psi(t, s)=\frac{\partial}{\partial N_t}\frac{1}{r_{ts}}. \qquad (7)$$

Здесь $N_j(s)$ — компонента орта внешней нормали к поверхности Γ частицы, $\delta_{qj}=\begin{cases}1, & q=j\\ 0, & q\neq j\end{cases}$.

Для тензора β_{qj} верно соотношение

$$\beta_{qj} = \alpha_{qj}(-1), \tag{8}$$

которое позволяет использовать формулы (4)—(7) для вычисления этого тензора. При вычислении тензора β по формулам (4)—(7) следует положить $\gamma = -1$. Приведем для справок формулы первого приближения для тензоров α, β

$$\alpha_{qj}^{(1)}(\gamma) = 2\delta_{qj}(\gamma + \gamma^2) - \frac{\gamma^2}{\pi V} b_{qj}^{(1)}, \quad \beta_{qj}^{(1)} = -\frac{b_{qj}^{(1)}}{\pi V}. \tag{9}$$

Погрешность этих формул для сферы, например, порядка 10%, формул второго приближения — порядка 3%.

Как видно из приведенных формул, расчет матрицы рассеяния для малой частицы произвольной формы сведен к квадратурам. Доказательство формул (4)—(9) и их применение можно найти в цикле работ автора [2–8]

§ 3. Применения, обобщения, замечания

1. В книге [1] показано, как вычислить комплексный показатель преломления разбавленного раствора, который представляет собой большое число частиц, равномерно распределенных в однородном растворителе, если известна матрица рассеяния света на одной частице. Мы не приводим вывод формулы для показателя преломления

$$n = 1 + 2\pi N k^{-2} S(0). \tag{10}$$

Здесь n — показатель преломления, N — число частиц в единице объема, k — волновое число, $S(0)$ — значение матрицы рассеяния на одной частице, отвечающее нулевому углу рассеяния $\Theta = 0$.

Вывод формулы (10) приведен в [1] на стр. 47. Небольшое отличие в коэффициентах формулы (10) от аналогичной формулы в [1] вызвано отличием в определениях матрицы рассеяния. Наше определение с помощью формулы (1) (которое в настоящее время общепринято) отличается от определения в [1] постоянным множителем $(ik)^{-1}$. ($S_{[1]} = ikS$, где $S_{[1]}$ — матрица рассеяния из [1]). Заметим, что из формулы (10) следует выражение для коэффициента поглощения γ раствора (не путать с γ из § 2)

$$\gamma = 2k \operatorname{Im} n_{jj} = N\sigma = \frac{4\pi N}{k^2} \operatorname{Im} S(0). \tag{11}$$

Здесь Im — мнимая часть (по повторяющимся индексам надо суммировать). Равенство (11) тесно связано с оптической теоремой [1].

2. Можно было бы получить формулы для тензора поляризуемости слоистонеоднородных частиц [5].

3. В [1] приведены формулы для вычисления параметров Стокса и матрицы Мюллера [9] для световой волны, прошедшей через облако одинаковых малых частиц, причем матрица рассеяния на одной частице известна. В частности, указаны формулы для вычисления факторов деполяризации света рассеянного таким облаком малых частиц. Рассмотрен случай хаотической ориентации частиц в пространстве и различные соотношения симметрии в матрице Мюллера ([1], стр. 67, 98).

4. Вопрос о точности формулы (9). Для сферы $\alpha_{qj}(\gamma) = 3\frac{\varepsilon' - \varepsilon_0}{\varepsilon' + 2\varepsilon_0}\delta_{qj} = \frac{6\gamma}{3-\gamma}\delta_{qj}$. Поэтому $\Delta \equiv \left|\frac{\alpha_{qj}(\gamma) - \alpha_{qj}^{(1)}(\gamma)}{\alpha_{qj}(\gamma)}\right| \leqslant \frac{|\gamma|^2}{9}$. Для водяной сферы в оптическом диапазоне $\varepsilon \approx \frac{16}{9}\varepsilon_0$, $\gamma \approx 0.28$, $\Delta < 0.01$.

§ 4. Вывод формулы (2) для матрицы рассеяния

1. Для вывода формулы (2) будем исходить из формулы, полученной в работе [3],

$$E' \sim \frac{e^{ikr}}{r} f_E, \quad f_E = \frac{k^2}{4\pi\varepsilon_0}[n', [Pn']] + \frac{k^2}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}[M, n'], \tag{12}$$

где

$$P_q = \alpha_{qj} V \varepsilon_0 E_j, \quad M = \beta_{qj} V \mu_0 H_j, \quad H = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}[n, E]. \tag{13}$$

Напомним, что падающая волна предполагается плоской $E = A \exp \times \{ik(n, x)\}$, A — постоянный вектор, $k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$.

Матрица рассеяния осуществляет линейную связь между векторами f_E и E

$$f_E = SE, \tag{14}$$

причем вектор E рассматривается в системе координат XYZ, определенной в п. 1 § 2, а вектор f_E — в системе координат $X'Y'Z'$, оси Z' которой направлены вдоль вектора n' (направления распространения рассеянной волны), $OX = OX'$, а плоскости $Y'OZ'$ и YOZ совпадают. Оси координат системы $X'Y'Z'$ получаются из осей координат системы XYZ вращением вокруг оси OX на угол Θ (угол рассеяния). Введенные обозначения являются стандартными [1]. Оба вектора E и f_E имеют по две компоненты соответственно в системах координат XYZ и $X'Y'Z'$, так как $(n, E) = (n', f_E) = 0$. Обозначим через e_1, e_2, $e_3 = n$ орты осей OX, OY, OZ, через $e_1' = e_1$, e_2', $e_3' = n'$ орты штрихованных осей. Заметим, что

$$(e_2', e_1) = 0, \quad (e_2', e_2) = \cos\Theta, \quad (e_2', n) = -\sin\Theta. \tag{15}$$

В дальнейшем будем писать f вместо f_E для сокращения записи. Индексы 1, 2 соответствуют индексам r, l в обозначениях Чандрасекара [1]. Элементы матриц S, как и в [1], будем обозначать так:

$$\begin{pmatrix} f_2 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_2 & S_3 \\ S_4 & S_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 \\ E_1 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

2. Все элементы матрицы рассеяния вычисляются одним методом. Поэтому ограничимся выводом выражения для S_2. Так как $f_2 = S_2E_2 + S_3E_1$, то достаточно выразить f_2 в виде линейной комбинации E_2, E_1. Коэффициент при E_2 будет равен S_2.

Напишем равенство

$$f_2 \equiv (f, e_2') = \frac{k^2}{4\pi\varepsilon_0}([n'[Pn']], e_2') + \frac{k^2}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}([M, n'], e_2'). \tag{17}$$

Остается преобразовать полученное выражение. Имеем

$$([n'[Pn']], e_2') = (P - n'(P, n'), e_2') = (P, e_2') = \varepsilon_0 V(\alpha E, e_2') =$$
$$= \varepsilon_0 V \alpha_{ij} E_j (e_i, e_2') = \varepsilon_0 V\{(\alpha_{21}E_1 + \alpha_{22}E_2)\cos\Theta - (\alpha_{31}E_1 + \alpha_{32}F_2)\sin\Theta\}. \tag{18}$$

Здесь использовались формулы (15). Далее

$$([M, n'], e_2') = ([n', e_2'], M) = -(e_1, M) = -\mu_0 V(\beta H, e_1) =$$
$$= -\mu_0 V(\beta_{11}H_1 + \beta_{12}H_2) = -\mu_0 V\left(-\beta_{11}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_2 + \beta_{12}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_1\right). \tag{19}$$

Здесь использовались вытекающие из третьей формулы (13) равенства

$$H_1 = -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_2, \quad H_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_1. \tag{20}$$

Из формул (17)—(19) получаем

$$S_2 = \frac{k^2 V}{4\pi} (\alpha_{22} \cos \Theta - \alpha_{32} \sin \Theta + \mu_0 \beta_{11}). \tag{21}$$

Аналогично выводятся формулы для S_1, S_3, S_4.

Литература

[1] Г. ван де Хюлст. Рассеяние света малыми частицами. ИЛ, М., 1961.
[2] А. Г. Рамм. ДАН СССР, *195*, 1303, 1970.
[3] А. Г. Рамм. Изв. вузов, радиофизика, *12*, 1185, 1969.
[4] А. Г. Рамм. Изв. вузов, радиофизика, *14*, 613, 1971.
[5] А. Г. Рамм. Изв. вузов, радиофизика, *14*, 1458, 1971.
[6] А. Г. Рамм. Тр. V всес. симп. по дифракции волн, 176. Изд. «Наука», Л., 1971.
[7] А. Г. Рамм. Радиотехника и электроника, *16*, 554, 1971.
[8] А. Г. Рамм. Тез. докл. междунар. симп. по теории электромагнитных волн, 536. Изд. «Наука», М., 1971.
[9] О. Нейл. Введение в статистическую оптику. Изд. «Мир», М., 1966.

Поступило в Редакцию 15 марта 1973 г.