УДК 621.373 : 535

К ТЕОРИИ КОЛЬЦЕВОГО ЛАЗЕРА С НЕОДНОРОДНЫМ РЕЗОНАТОРОМ

А. Я. Бирман и *А. Ф. Савушкин*

Сформулированы уравнения для комплексных амплитуд встречных волн в кольцевом лазере, разонатор которого образован произвольным набором отражающих, фокусирующих, поглощающих, рассеивающих и анизотропных элементов, неоднородных в поперечном направлении, причем параметры активной среды, помещенной в магнитное поле, распределены в резонаторе также неоднородно.

В работе авторов [1] с помощью метода возмущений для параболического уравнения построена теория дифракционных эффектов в слабонелинейном кольцевом лазере. Под невозмущенной системой подразумевался кольцевой резонатор с одним согласованным амплитудно-фазовым корректором и линейной активной средой, усиление которой было выбрано равным потерям в корректоре. В качестве возмущения фигурировала слабая нелинейность активной среды.

Аналогичное выделение возмущения возможно и для описания более широкого класса эффектов в кольцевом лазере с неоднородным резонатором. В развиваемой теории резонатор лазера может содержать произвольное число трансформирующих элементов, каждый из которых обладает отражающими, фокусирующими, поглощающими, рассеивающими и анизотропными свойствами, неоднородными в поперечном направлении. Параметры активной среды, помещенной в аксиальное магнитное поле, распределены в резонаторе также неоднородно. При этом сохраняется возможность описания нелинейных эффектов в кольцевом лазере с существенно неоднородным резонатором.

Электрическое поле в кольцевом лазере представим в виде суперпозиции двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях с частотами ν_p и медленно меняющимися комплексными амплитудами $\mathbf{E}_p$ $(p=1,\ 2)$.

$$\mathbf{E} = \sum_{p=1,2} \mathbf{E}_p(\mathbf{r},\ z,\ t)\exp(\pm ic^{-1}\nu_p z - i\nu_p t) + \text{к. с.} \tag{1}$$

Здесь и далее верхний знак соответствует $p=1$, нижний — $p=2$.

При достаточной малости характерных времен релаксации активной среды и ее слабонелинейности в приближениях квазиоптики [2] медленные амплитуды описываются параболическими уравнениями

$$\pm\frac{\partial \mathbf{E}_p}{\partial z} - i(2k)^{-1}\Delta_\perp \mathbf{E}_p + c^{-1}\frac{\partial \mathbf{E}_p}{\partial t} = ic^{-1}(\hat{M}_p\mathbf{E}_p + \hat{V}_p\mathbf{E}_p), \tag{2}$$

где k — волновое число. Операторы $\hat{M}_p$ характеризуют линейные, а операторы $\hat{V}_p$ — нелинейные свойства неоднородной активной среды.

Операторы $\hat{F}_p^{(n)}$, которые фигурируют в условиях преобразования поля бегущей волны каждым трансформирующим элементом

$$\mathbf{E}_p(\mathbf{r},\ z_n \pm 0,\ t) = \hat{F}_p^{(n)}\mathbf{E}_p(\mathbf{r},\ z_n \mp 0,\ t) + \\ + \hat{S}_p^{(n)}\mathbf{E}_{p'}(\mathbf{r},\ z_n \pm 0,\ t)\exp\{i(\nu_p - \nu_{p'})t \mp i(\nu_p + \nu_{p'})c^{-1}z_n\} \tag{3}$$

($n=1, 2, \ldots N$; N — число трансформирующих элементов; здесь и далее $p' \neq p$), описывают корректирующие, а операторы $\hat{S}_p^{(n)}$ — рассеивающие свойства n-го элемента, расположенного в плоскости $z=z_n$. Широкий класс корректирующих элементов характеризуется симметричными для встречных волн операторами [3]

$$\hat{F}_{p'}^{(n)} = \bar{\hat{F}}_p^{(n)\dagger *}. \tag{4}$$

Знак $\dagger$ означает эрмитовское, а знак $*$ — комплексное сопряжение. Черта сверху соответствует изменению знака аксиального магнитного поля, воздействующего на элемент.

Резонаторные свойства системы трансформирующих элементов описываются условиями периодичности

$$\mathbf{E}_p(\mathbf{r}, z_1-0, t) = \mathbf{E}_p(\mathbf{r}, z_{N+1}-0, t)\exp(\pm ic^{-1}\nu_p L), \tag{5}$$

где $z_{N+1}=z_1+L$, а L — периметр резонатора.

Аналитически может быть получено лишь приближенное решение параболических уравнений (2) при достаточно слабой нелинейности лазера. При этом линейные характеристики активной среды могут быть произвольными. Для применения метода возмущений к уравнениям (2) необходимо разумное выделение невозмущенной системы с тем, чтобы уже в этой системе содержалась наиболее существенная информация о реальном решении. Такой невозмущенной системой является резонатор с линейной активной средой, усиление которой компенсирует потери в корректорах, так что колебания в этой системе стационарны и по своему характеру близки к колебаниям в слабонелинейном лазере.

В рассматриваемой модели рассеяние бегущих волн во встречном направлении слабое и приводит лишь к незначительному искажению пространственной структуры поля, поэтому рассеивающие свойства элементов резонатора будут описываться, как и нелинейнотть среды, в качестве возмущения.

Интегральные уравнения для собственных колебаний невозмущенной системы

$$\mathbf{a}_p(\mathbf{r}, z_1+0) = \exp(ic^{-1}\omega_p L)\,\hat{Q}_p \mathbf{a}_p(\mathbf{r}, z_1+0) \tag{6}$$

эквивалентны соответствующим параболическим уравнениям, трансформационным условиям и условиям периодичности. Интегральные операторы $\hat{Q}_p$ описывают распространение бегущих волн последовательно через всю систему корректоров в невозмущенной системе

$$\left.\begin{aligned} \hat{Q}_1 &= \hat{F}_1^{(1)}\hat{D}_1(z_{N+1}, z_N)\,\hat{F}_1^{(N)}\hat{D}_1(z_N, z_{N-1})\,\hat{F}_1^{(N-1)}\ldots\hat{F}_1^{(2)}\hat{D}_1(z_2, z_1),\\ \hat{Q}_2 &= \hat{D}_2(z_1, z_2)\,\hat{F}_2^{(2)}\hat{D}_2(z_2, z_3)\,\hat{F}_2^{(3)}\ldots\hat{F}_2^{(N)}\hat{D}_2(z_N, z_{N+1})\,\hat{F}_2^{(1)}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Операторы $\hat{D}_p(z, z'')$ преобразуют волну из плоскости $z=z''$ в плоскость $z=z'$ в пространстве между соседними корректорами. Используя (4) и соответствующие свойства операторов $\hat{D}_p$ [4], можно получить соотношение симметрии

$$\hat{Q}_{p'} = \bar{\hat{Q}}_p^{\dagger *}, \tag{8}$$

так что сопряженные относительно (6) уравнения имеют вид

$$\bar{\mathbf{a}}_{p'}^*(\mathbf{r}, z_1+0) = \exp(-ic^{-1}\omega_p L)\,\hat{Q}_p^{\dagger}\bar{\mathbf{a}}_{p'}^*(\mathbf{r}, z_1+0). \tag{9}$$

Невозмущенная система обладает набором собственных колебаний, описываемых уравнениями (6). Если спектр собственных колебаний невырожден, то при достаточно слабой нелинейности активной среды в лазере возбудится по одному собственному колебанию в каждом направлении. Условие стационарности этих колебаний

$$\operatorname{Im}\omega_p(\hat{M}_p^{(0)}) = 0 \tag{10}$$

позволяет определить необходимую величину плотности возбужденных атомов активной среды в невозмущенной системе.

Параболические уравнения (2), трансформационные условия (3) и условия периодичности (5) могут быть преобразованы к эквивалентной системе неоднородных интегральных уравнений Фредгольма. Такое преобразование не предполагает какие-либо приближенные процедуры, но вид получаемых интегральных уравнений зависит от способа выделения возмущения и должен быть приспособлен к применению приближенных методов решения.

Вместе с параметрами активной среды, характеризующими ее нелинейность, в неоднородную часть параболических уравнений (2) переносится и временная производная поля. Такое разделение пространственных и временных производных оправдано, если характерный масштаб временной структуры поля, обусловленной в рассматриваемой модели лишь рассеянием волн во встречном направлении и процессами установления генерации, существенно превосходит характерное время распространения волн через всю систему корректоров.

Трансформационные условия (3) и интегральные преобразования в пространстве между корректорами позволяют описать процесс распространения волн в резонаторе кольцевого лазера. Применение условий периодичности (5) завершает процедуру преобразования исходной системы (2, 3, 5) к интегральным уравнениям

$$\mathbf{E}_p(\mathbf{r},\ z_1+0,\ t) = \exp(ic^{-1}\nu_p L)\,\hat{Q}_p \mathbf{E}_p(\mathbf{r},\ z_1+0,\ t) + \mathbf{\Phi}_p(\mathbf{r},\ t). \tag{11}$$

Неоднородные части этих интегральных уравнений $\mathbf{\Phi}_p$, которые в рассматриваемой модели соответствуют слабому возмущению, представляют собой сложные интегральные преобразования неизвестных комплексных амплитуд (соответствующие соотношения выписаны в Приложении). Применение метода последовательных приближений для решения уравнений (11) позволяет описать деформацию пространственно-поляризационной структуры собственного колебания невозмущенной системы под влиянием нелинейности активной среды и процессов рассеяния на элементах резонатора во встречном направлении.

Однако еще не решая уравнения (11), можно получить достаточно общие соотношения для интегральных характеристик комплексных амплитуд встречных волн. Выделяя в уравнениях (11) интегральные операторы, соответствующие преобразованию волн в линейной невозмущенной системе,

$$\begin{gathered}\mathbf{E}_p(\mathbf{r},\ z_1+0,\ t) = \exp(ic^{-1}\omega_p L)\,\hat{Q}_p \mathbf{E}_p(\mathbf{r},\ z_1+0,\ t) + \\ + [\exp(ic^{-1}\nu_p L) - \exp(ic^{-1}\omega_p L)]\,\hat{Q}_p \mathbf{E}_p(\mathbf{r},\ z_1+0,\ t) + \mathbf{\Phi}_p(\mathbf{r},\ t),\end{gathered} \tag{12}$$

можно применить теорему Фредгольма [5] об ортогональности неоднородной части интегрального уравнения решению однородного сопряженного уравнения (9), как необходимому и достаточному условию однозначной разрешимости.

В результате преобразований, учитывающих трансформационные свойства поля в невозмущенной системе, соотношения ортогональности приобретает вид укороченных уравнений для интегральных характеристик комплексных амплитуд встречных волн

$$\begin{gathered} i\frac{d}{dt}\langle\langle \bar{\mathbf{a}}_{p'}, \mathbf{E}_p\rangle\rangle = \langle\langle \bar{\mathbf{a}}_{p'}, (\hat{M}_p^0 - \hat{M}_p)\,\mathbf{E}_p\rangle\rangle \pm icL^{-1}[1-\exp(\mp ic^{-1}L(\nu_p-\omega_p))] \times \\ \times \langle \bar{\mathbf{a}}_{p'}(r,\ z_1+0)\,\mathbf{E}_p(r,\ z_1+0,\ t)\rangle + icL^{-1}\exp[i(\nu_p-\nu_{p'})\,t] \times \\ \times \sum_{n=1}^{N} \langle \bar{\mathbf{a}}_{p'}(\mathbf{r},\ z_{n+1}\pm 0)\,\hat{S}_p^{(n+1)}\mathbf{E}_{p'}(\mathbf{r},\ z_{n+1}\pm 0,\ t)\rangle \exp[\mp ic^{-1}z_{n+1}(\nu_p+\nu_{p'})] - \\ - \langle\langle \bar{\mathbf{a}}_{p'} V_p \mathbf{E}_p\rangle\rangle, \end{gathered} \tag{13}$$

$$\langle f(r,\ z)\rangle = \int d^2r f(r,\ z), \tag{14}$$

$$\langle\!\langle f(r,\ z)\rangle\!\rangle = L^{-1}\int\limits_{z_1}^{z_{N+1}} dz \langle f(r,\ z)\rangle, \tag{15}$$

$$\hat{S}_p^{N+1} = \hat{S}_p^{(1)}. \tag{16}$$

Полученные уравнения (13) являются достаточно общими, и их вывод не связан с конкретными приближенными методами решения интегральных уравнений (11). Однако вид этих соотношений, как и вид интегральных уравнений, зависит от способа выделения возмущения.

При достаточно слабой нелинейности активной среды пространственно-поляризационные характеристики встречных волн в кольцевом лазаре не отличаются от тех же характеристик в невозмущенной системе

$$\mathbf{E}_p(\mathbf{r},\ z,\ t) = E_p(t)\,\mathbf{a}_p(\mathbf{r},\ z). \tag{17}$$

В этом приближении, как следует из (13), комплексные амплитуды $E_p(t)$ и частоты ν_p встречных волн описываются следующими уравнениями:

$$i\frac{dE_p}{dt} = (\omega_p - \nu_p + n_p) E_p + iS_p E_{p'} \exp[i(\nu_p - \nu_{p'})t] - \\ - \langle\!\langle \bar{\mathbf{a}}_{p'} \mathbf{a}_p \rangle\!\rangle^{-1} \langle\!\langle \bar{\mathbf{a}}_{p'} \hat{V}_p \mathbf{a}_p \rangle\!\rangle E_p. \tag{18}$$

Здесь S_p — коэффициенты связи между встречными волнами — аддитивные комбинации интегральных характеристик операторов рассеяния

$$S_p = cL^{-1}\sum_{n=1}^{N} \langle \bar{\mathbf{a}}_{p'}(\mathbf{r},\ z_n \pm 0)\,\hat{S}_p^{(n)} \mathbf{a}_{p'}(\mathbf{r},\ z_n \pm 0)\rangle \exp[\mp ic^{-1} z_n(\omega_p + \omega_{p'})]. \tag{19}$$

Параметры

$$n_p = \langle\!\langle \bar{\mathbf{a}}_{p'} \mathbf{a}_p \rangle\!\rangle^{-1} \langle\!\langle \bar{\mathbf{a}}_{p'} (\hat{M}_p^0 - \hat{M}_p)\,\mathbf{a}_p \rangle\!\rangle \tag{20}$$

пропорциональны превышению усиления над порогом генерации.

Операторы нелинейного взаимодействия поля с активной средой $\hat{V}_p$ наиболее естественно вычисляются в представлении круговых поляризаций [6, 7]

$$\mathbf{e}_s^* \hat{V}_p \mathbf{e}_r = \sum_{q,\ t,\ u} W_{psr}^{qtu} E_q^t E_q^{u*}, \tag{21}$$

$$E_q^r = \mathbf{e}_r^* \mathbf{E}_q, \quad q = 1,\ 2, \tag{22}$$

$$\mathbf{e}_r = \mp 2^{-1/2}(\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y), \ r = 1,\ 2 \tag{23}$$

(верхний знак соответствует $r = 1$, нижний — $r = 2$).

Комплексные величины W_{psr}^{qtu} описывают нелинейные дисперсионные свойства активной среды, помещенной в аксиальное магнитное поле, и в допплеровском приближении вычислены в работах [6, 7]. Несмотря на то что поляризация среды в [6, 7] вычислена в приближении плоских волн, полученные в этих работах соотношения справедливы для поля с дифракционной структурой даже для существенно неоднородного характера уширения линии перехода [8].

Уравнения (18) формально совпадают с уравнениями теории кольцевого лазера, построенной в приближении плоских волн. Вся информация о неоднородности резонатора заключена в параметрах, фигурирующих в этих уравнениях и являющихся комплексными функционалами пространственно-поляризационных характеристик собственных колебаний невозмущенной системы. В приближении слабой связи между встречными волнами эти уравнения решены в следующей работе авторов, где подробно рассмотрены амплитудные и частотные характеристики слабонелинейного кольцевого лазера с неоднородным резонатором.

Авторы благодарны И. П. Мазанько и Э. Е. Фрадкину за полезные обсуждения вопросов, затронутых в настоящей работе.

Приложение

$$\Phi_1(\mathbf{r},\ t) = \exp(ic^{-1}\nu_1 L) \sum_{k=1}^{N} \left\{ \left[\delta_{k,N} + (1-\delta_{k,N}) \prod_{n=N}^{k+1} \hat{F}_1^{(n+1)} \hat{D}_1(z_{n+1},\ z_n) \right] \times \right.$$

$$\times [\hat{F}_1^{(k+1)} (\hat{D}_1(z_{k+1},\ z_k) * \mathbf{C}_1) + \hat{S}_1^{(k+1)} \mathbf{E}_2(\mathbf{r},\ z_{k+1}+0,\ t) \times$$

$$\left. \times \exp\{i(\nu_1-\nu_2)t - ic^{-1}(\nu_1+\nu_2) z_{k+1}\}] \right\}, \qquad (\text{П. }1)$$

$$\Phi_2(\mathbf{r},\ t) = \sum_{k=1}^{N} \left\{ \left[\delta_{k,1} + (1-\delta_{k,1}) \prod_{n=1}^{k-1} \hat{D}_2(z_n,\ z_{n+1}) \hat{F}_2^{(n+1)} \right] \times \right.$$

$$\times [(\hat{D}_2(z_k,\ z_{k+1}) * \mathbf{C}_2) + \hat{D}_2(z_k,\ z_{k+1}) \hat{S}_2^{(k+1)} \mathbf{E}_1(\mathbf{r},\ z_{k+1}-0,\ t) \times$$

$$\left. \times \exp\{i(\nu_2-\nu_1)t + ic^{-1}(\nu_1+\nu_2) z_{k+1}\}] \right\}, \qquad (\text{П. }2)$$

$$\hat{F}_p^{(N+1)} = \hat{F}_p^{(1)}, \qquad (\text{П. }3)$$

$$\hat{D}_p(z,\ z') * \mathbf{C}_p = (-1)^p \int_z^{z'} dz'' \int d^2 r'' D_p(\mathbf{r},\ \mathbf{r}'';\ z,\ z'') \mathbf{C}_p(\mathbf{r}'',\ z'',\ t), \qquad (\text{П. }4)$$

$$\mathbf{C}_p(\mathbf{r},\ z,\ t) = -c^{-1} \frac{\partial \mathbf{E}_p}{\partial t} + ic^{-1}(\hat{M}_p - \hat{M}_p^{(0)}) \mathbf{E}_p + ic^{-1} \hat{V}_p \mathbf{E}_p. \qquad (\text{П. }5)$$

Литература

[1] А. Я. Бирман, А. Ф. Савушкин. Сб. «Теория дифракции и распространения волн», 483. Изд. ВНИИРИ, Ереван, 1973.
[2] Н. Г. Бондаренко, В. И. Таланов. Изв. вузов, радиофизика, 7, 313, 1964.
[3] В. Я. Молчанов, Г. В. Скроцкий. Сб. «Квантовая электроника», № 4, 3. Изд. «Советское радио», М., 1971.
[4] А. Фридман. Уравнения с частными производными параболического типа. Изд. «Мир», М., 1968.
[5] В. С. Владимиров. Уравнения математической физики. Изд. «Наука», М., 1967.
[6] Э. Е. Фрадкин, Л. М. Хаютин. ЖЭТФ, *59*, 1634, 1970.
[7] В. А. Веткин, А. М. Хромых. Сб. «Квантовая электроника», № 3 (9), 59. Изд. «Советское радио», М., 1972.
[8] С. Г. Зейгер. Автореф. канд. дисс., Л., 1967.

Поступило в Редакцию 20 сентября 1973 г.