

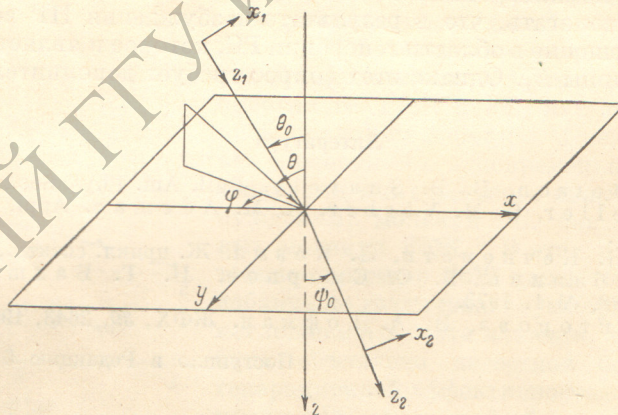
## ПРЕЛОМЛЕНИЕ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ИЗОТРОПНЫХ ДИЭЛЕКТРИКОВ

А. М. Бельский и А. П. Хапалюк

Рассмотрено преломление трехмерной гауссово-эрмитовой моды  $(m, q)$  на плоской поверхности раздела двух изотропных диэлектриков. Показано, что наряду с модой  $(m, q)$  в отраженном пучке присутствуют моды  $(m \pm 1, q)$ ,  $(m \pm 3, q)$ ,  $(m \pm 1, q \pm 2)$ ,  $(m, q \pm 1)$ . Преломленные моды имеют астигматичную структуру, так что «световое пятно», имевшее до преломления форму круга, преобразуется в эллипс, форма которого непрерывно меняется в процессе распространения.

В работе [1] нами было рассмотрено отражение трехмерного лазерного гауссово-эрмитового пучка от границы раздела изотропных диэлектриков и показано, что в отраженном пучке наряду с падающей на границу модой  $(m, q)$  будут присутствовать преобразованные моды  $(m \pm 1, q)$  и  $(m, q \pm 1)$ .

В настоящей работе аналогичным образом рассматривается преломление трехмерной гауссовой моды  $(m, q)$  на границе раздела изотропных ди-



электриков. Нелинейная зависимость между углами падения и преломления плоских волн, составляющих падающий пучок, приводит к более сильному искажению структуры преломленного пучка по сравнению с отраженным пучком.

Пусть на плоскую границу раздела двух сред с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$  под углом  $\theta_0$  падает гауссово-эрмитовый пучок. Поперечную компоненту поля такого пучка в системе координат  $X_1 Y_1 Z_1$ , связанной с пучком (см. рисунок), запишем в виде

$$E_{mq}^a = A_0 \frac{a_0}{a} \exp\left(-\frac{x_1^2 + y_1^2}{a^2}\right) H_m\left(\frac{x_1 \sqrt{2}}{a}\right) H_q\left(\frac{y_1 \sqrt{2}}{a}\right) e^{-i\Phi}, \quad (1)$$

где

$$\Phi = kn_1 z_1 + \frac{k}{2R} (x_1^2 + y_1^2) - (m + q + 1) \operatorname{arctg}\left(\frac{2z_1}{kn_1 a_0^2}\right),$$

$$R = \frac{(kn_1 a_0)^2}{4z_1}, \quad a^2 = a_0^2 \left[1 + \left(\frac{2z_1}{kn_1 a_0^2}\right)^2\right]. \quad (2)$$

Параметр  $R(z)$  определяет радиус кривизны волнового фронта пучка на его оси, а  $a(z)$  — эффективный радиус пучка в плоскости  $z_1 = \text{const.}$

В дальнейшем будем считать, что падающий пучок имеет  $z$ -поляризацию, т. е. что выражение (1) дает  $y_1$ -компоненту электрического поля падающего пучка ( $E_{x_1} = 0$ ).

Для определения преломленного пучка представим электрическое поле падающего пучка в виде интеграла Фурье по плоским волнам

$$E_{m_q}^a = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A_{mq}(\xi, \eta) e^{-ik[x_1\xi + y_1\eta + z_1\sqrt{n_1^2 - \xi^2 - \eta^2}]} d\xi d\eta, \quad (3)$$

где  $A_{mq}$  — преобразование Фурье поля (1) при  $z_1 = 0$ ; переменные  $\xi$  и  $\eta$  связаны с углами  $\theta$  и  $\varphi$ , образуемыми волновой нормалью падающей плоской волны, соотношениями

$$\begin{aligned} \xi &= n_1 [\cos \theta_0 \sin \theta \cos \varphi - \sin \theta_0 \cos \theta], \\ \eta &= n_1 \sin \theta \sin \varphi. \end{aligned}$$

Поле преломленного пучка получается умножением подынтегрального выражения в (3) на соответствующий коэффициент преломления Френеля и учетом того, что фаза каждой из волн, составляющих преломленный пучок, изменяется в соответствии с законом преломления  $n_1 \sin \theta = n_2 \sin \varphi$  ( $\varphi$  — угол преломления). Кроме того, при определении поля преломленного пучка необходимо учитывать, что падающая плоская волна, имеющая в системе координат  $X_1 Y_1 Z_1$  лишь одну ненулевую поперечную компоненту ( $E_{y_1}$ ), вызовет во второй среде преломленную волну, которая будет иметь в системе координат  $X_2 Y_2 Z_2$  (см. рисунок) обе поперечные компоненты ( $E_{x_2}$  и  $E_{y_2}$ ).

Ограничиваясь в амплитудах плоских волн, составляющих преломленный пучок, членами порядка  $\xi$  и  $\eta$ , а в фазах — квадратичными членами, для поля преломленного пучка получим

$$\left. \begin{aligned} E_{x_2} &= \frac{1}{4\pi^2 n_1 \operatorname{tg} \theta_0} \left( D_p^0 - \frac{\cos \psi_0}{\cos \theta_0} D_s^0 \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta A_{mq} e^{-i\varphi_2} d\xi d\eta, \\ E_{y_2} &= \frac{D_s^0}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A_{mq} e^{-i\varphi_2} d\xi d\eta + \frac{1}{4\pi^2 n_1} \frac{\partial D_s^0}{\partial \theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi A_{mq} e^{-i\varphi_2} d\xi d\eta, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2 &= k \left[ n_2 z_2 + \tilde{x}_2 \xi + y_2 \eta - \frac{z_{\parallel}}{2n_2} \xi^2 - \frac{z_{\perp}}{2n_2} \eta^2 \right], \\ z_{\parallel} &= z_2 \frac{\cos^2 \theta_0}{\cos^2 \psi_0} + x_2 \frac{n_2^2 - n_1^2}{n_1^2} \frac{\operatorname{tg} \psi_0}{\cos^2 \psi_0}, \quad z_{\perp} = z_2 + x_2 \frac{n_2^2 - n_1^2}{n_1^2} \operatorname{tg} \psi_0, \\ \tilde{x}_2 &= x_2 \frac{\cos \theta_0}{\cos \psi_0}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

а величины  $D^0$  и  $\partial D^0 / \partial \theta$  — значения этих коэффициентов преломления Френеля и их производных при  $\theta = \theta_0$ .

Воспользовавшись свойством полиномов Эрмита

$$H_{m+1}(x) = 2xH_m(x) - 2mH_{m-1}(x),$$

в (4) нетрудно провести интегрирование. В результате для поля преломленного пучка окончательно получим

$$\begin{aligned} E_{x_2} &= \frac{i\sqrt{2}}{n_1 k a_0 \operatorname{tg} \theta_0} \left( D_p^0 - \frac{\cos \psi_0}{\cos \theta_0} D_s^0 \right) \left( q V_{m, q-1} - \frac{1}{2} V_{m, q+1} \right), \\ E_{y_2} &= D_s^0 V_{mq} + \frac{i\sqrt{2}}{n_1 k a_0} \frac{\partial D_s^0}{\partial \theta} \left( m V_{m-1, q} - \frac{1}{2} V_{m+1, q} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$V_{\nu\tau} = A_0 \frac{a_0}{\sqrt{a_x a_y}} \exp \left[ - \left( \frac{\tilde{x}_2^2}{a_x^2} + \frac{y_2^2}{a_y^2} \right) \right] H_\nu \left( \frac{\tilde{x}_2 \sqrt{2}}{a_x} \right) H_\tau \left( \frac{y_2 \sqrt{2}}{a_y} \right) e^{-i\Phi_2}, \quad (7)$$

$$\nu = m, m \pm 1; \tau = q, q \pm 1,$$

$$\Phi_2 = kn_2 z_2 + \frac{kn_2}{2} \left( \frac{\tilde{x}_2^2}{R_x} + \frac{y_2^2}{R_y} \right) - \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \operatorname{arctg} \left( \frac{2z_2}{kn_2 a_0^2} \right) - \left( \tau + \frac{1}{2} \right) \operatorname{arctg} \left( \frac{2z_2}{kn_2 a_0^2} \right).$$

Величины  $R_x, a_x (R_y, a_y)$  определяются выражениями (2), в которых вместо  $z_1$  необходимо подставить  $z_{\parallel}$  (соответственно  $z_{\perp}$ ) (см. (5)). Согласно (6), преломленный пучок, так же как и отраженный (см. [1]), можно определить в виде суперпозиции пяти «мод»:  $(V_{mq}, V_{m\pm 1, q}, V_{m, q\pm 1})$ . Однако эти моды в отличие от мод в отраженном пучке не являются гауссовыми, поскольку как «радиусы» кривизн волнового фронта ( $R_x, R_y$ ), так и «радиусы» пучка ( $a_x, a_y$ ) зависят от поперечной координаты  $x_2$  и не имеют простой физической интерпретации, как в случае гауссова пучка. В то время как форма гауссова-эрмитового пучка в общем случае определяется однополостным эллиптическим гиперboloидом [2], форма «моды»  $V_{\nu\tau}$  описывается довольно сложной поверхностью четвертого порядка, симметричной только относительно оси, перпендикулярной плоскости падения.

Поскольку гауссово-эрмитовые моды образуют полный ортогональный набор функций, поле любого пучка (в том числе и поле «моды»  $V_{\nu\tau}$ ) можно представить в виде суммы гауссово-эрмитовых мод с коэффициентами разложения, зависящими только от продольной координаты. Разложим поэтому поле (7) моды  $V_{\nu\tau}$  в ряд по гауссово-эрмитовым модам, ограничившись членами разложения порядка  $(\lambda/a_0)$ .

Если ограничиться рассмотрением поля на расстояниях

$$z_2 \ll \frac{1}{2} kn_2 a_0^2 \left( \frac{\cos \psi_0}{\cos \theta_0} \right)^2, \quad (8)$$

коэффициенты разложения не будут зависеть от продольной координаты  $z_2$ , т. е. при выполнении неравенства (8) поле преломленного пучка можно представить в виде суперпозиции гауссово-эрмитовых мод с постоянными амплитудами.

Разлагая выражение (7) в ряд по гауссово-эрмитовым модам и учитывая (8), для поля преломленного пучка получим

$$\left. \begin{aligned} E_{x_2} &= \frac{i\sqrt{2}}{n_1 k a_0 \operatorname{tg} \theta_0} \left( D_p^0 - \frac{\cos \psi_0}{\cos \theta_0} D_s^0 \right) \left( q \tilde{E}_{m, q-1} - \frac{1}{2} \tilde{E}_{m, q+1} \right), \\ E_{y_2} &= D_s^0 \tilde{E}_{mq} - i \frac{D_s^0}{kn_2 a_0} \frac{(n_2^2 - n_1^2) \operatorname{tg} \theta_0}{2\sqrt{2} n_1 n_2 \cos^2 \psi_0} \left\{ 2m(m-1)(m-2) \tilde{E}_{m-3, q} - \right. \\ &\quad \left. - m[(m+2) + (2q+1) \cos^2 \psi_0] \tilde{E}_{m-1, q} - \frac{1}{2} [(m-1) + (2q+1) \cos^2 \psi_0] \tilde{E}_{m+1, q} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \tilde{E}_{m+3, q} + 2mq(q-1) \cos^2 \psi_0 \tilde{E}_{m-1, q-2} + q(q-1) \cos^2 \psi_0 \tilde{E}_{m+1, q-2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} m \cos^2 \psi_0 \tilde{E}_{m-1, q+2} + \frac{1}{4} \cos^2 \psi_0 \tilde{E}_{m+1, q+2} \right\} + \frac{i\sqrt{2}}{n_1 k a_0} \frac{\partial D_s^0}{\partial \theta} \left( m \tilde{E}_{m-1, q} - \frac{1}{2} \tilde{E}_{m+1, q} \right). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

В (9) через  $\tilde{E}_{\nu\tau}$  ( $\nu = m, m \pm 1, m \pm 3; \tau = q, q \pm 1, q \pm 2$ ) обозначены гауссово-эрмитовые преломленные моды

$$\left. \begin{aligned} \tilde{E}_{\nu\tau} &= A_0 \frac{a_0}{\sqrt{a_{\parallel} a_{\perp}}} \exp \left[ - \frac{\tilde{x}_2^2}{a_{\parallel}^2} - \frac{y_2^2}{a_{\perp}^2} \right] H_\nu \left( \frac{\tilde{x}_2 \sqrt{2}}{a_{\parallel}} \right) H_\tau \left( \frac{y_2 \sqrt{2}}{a_{\perp}} \right) e^{-i\Phi_2}, \\ \Phi_2 &= kn_2 z_2 + \frac{kn_2}{2} \left( \frac{\tilde{x}_2^2}{R_{\parallel}} + \frac{y_2^2}{R_{\perp}} \right) - \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \operatorname{arctg} \left( \frac{2z_2}{kn_2 a_0^2} \right) - \left( \tau + \frac{1}{2} \right) \operatorname{arctg} \left( \frac{2z_2}{kn_2 a_0^2} \right), \\ R_{\parallel} &= \frac{(kn_2 a_0 a_{\parallel})^2}{4z_2}, \quad R_{\perp} = \frac{(kn_2 a_0 a_{\perp})^2}{4z_2}, \quad z_2 = z_2 \frac{\cos^2 \theta_0}{\cos^2 \psi_0}, \\ a_{\parallel}^2 &= a_0^2 \left[ 1 + \left( \frac{2z_2}{kn_2 a_0^2} \right)^2 \right], \quad a_{\perp}^2 = a_0^2 \left[ 1 + \left( \frac{2z_2}{kn_2 a_0^2} \right)^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Поле преломленного пучка для  $p$ -поляризации получается из (9) заменой

$$E_{x_2} \rightarrow -E_{y_2}, \quad E_{y_2} \rightarrow E_{x_2}, \quad D_s^0 \leftrightarrow D_p^0.$$

Таким образом, поле преломленного пучка описывается одиннадцатью модами  $\vec{E}_{\nu\tau}$  вида (10) [моды  $(m; q)$ ,  $(m \pm 1, q)$ ,  $(m \pm 3, q)$ ,  $(m \pm 1, q \pm 2)$ ,  $(m, q \pm 1)$ ]. При этом поляризация мод  $(m, q \pm 1)$  ортогональна поляризации падающей моды, а остальные преломленные моды имеют поляризацию падающей моды. Структура преломленных мод (10) отличается от падающей моды (1). Выражение (10) описывает астигматичную гауссово-эрмитову моду [2], размеры и расходимость которой различны в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. В случае  $n_2 > n_1$  каждая из преломленных мод сужается в плоскости падения в  $\cos \theta_0 / \cos \psi_0$  раз, что соответствует чисто геометрическому требованию равенства проекций ширины пучка на поверхности раздела до и после преломления. Размеры мод в направлении, перпендикулярном плоскости падения, не меняются.

Изменение размеров мод  $\vec{E}_{\nu\tau}$  в плоскости падения и зависимость параметров  $R_{\parallel}$  и  $a_{\parallel}$  не от геометрической координаты  $z_2$ , а от величины  $\bar{z}_2$ , приводит к тому, что эффективное поперечное сечение пучка, имевшее до преломления форму круга, трансформируется в эллипс с полуосями  $a_{\parallel}$  и  $(\cos \psi_0 / \cos \theta_0) a_{\parallel}$ . Вследствие различия расходимости пучка в двух взаимно перпендикулярных плоскостях форма эллипса непрерывно меняется с ростом продольной координаты  $z_2$ . Если  $n_2 > n_1$ , при  $z_2 < z_{кр.}$  малая полуось эллипса расположена в плоскости падения, при  $z_2 = z_{кр.}$  эллиптическое поперечное сечение превращается в круглое, а при  $z_2 > z_{кр.}$  происходит переориентация эллипса и уже большая полуось лежит в плоскости падения, причем

$$z_{кр.} = \frac{1}{2} k n_2 a_0^2 \frac{\cos \psi_0}{\cos \theta_0}.$$

При  $n_1 > n_2$  процесс переориентации эллипса происходит в обратном порядке.

Преломленный пучок будет содержать все 10 преобразованных мод, имеющих порядок  $(\lambda/a_0)$ , только в случае  $m \geq 3$   $q \geq 2$ . Для меньших индексов  $m$  и  $q$  число преобразованных мод уменьшается. Так, для основной моды  $(m=q=0)$  преобразованных мод будет только четыре:  $(1, 0)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(3, 0)$ ,  $(0, 1)$ .

Поскольку

$$D_p^0 - \frac{\cos \psi_0}{\cos \theta_0} D_s^0 = \frac{n_1}{n_2} (R_s^0 + R_p^0), \quad \frac{\partial D_s^0}{\partial \theta} = \frac{\partial R_s^0}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial D_p^0}{\partial \theta} = \frac{n_1}{n_2} \frac{\partial R_p^0}{\partial \theta},$$

мощность преобразованных преломленных мод зависит от угла падения таким же образом, как и мощность преобразованных отраженных мод, т. е. преобразованные моды, имеющие поляризацию падающей моды, достигают максимального значения при углах падения, близких к скользящему, а ортогональные моды имеют максимальную мощность при углах падения, близких к углу Брюстера, обращаясь в нуль как при нормальном, так и при скользящем падении (см. [1]).

Отметим еще, что в случае двумерного пучка (поле которого не зависит от координаты  $y$ ) в преломленном пучке будут присутствовать только пять мод (вместо одиннадцати), а именно моды  $(m, q)$ ,  $(m \pm 1, q)$  и  $(m \pm 3, q)$ . Формулы (9) переходят при этом в формулы, полученные в работе [3].

В заключение следует отметить, что в случае  $n_2 < n_1$  все вышеприведенные формулы будут справедливы только при выполнении неравенства

$$\arcsin \left( \frac{n_2}{n_1} \right) - \theta_0 > (ka_0)^{-1},$$

вытекающего из требования, чтобы волновые нормали плоских волн, составляющих падающий пучок, падали на границу раздела под углами,

меньшими угла полного отражения. Поскольку отражение ограниченного пучка под углами, близкими к углу полного отражения, исследовалось в многочисленных работах (см., например, серию работ [4], где приведена обширная библиография), мы не будем останавливаться на исследовании этого случая.

#### Литература

- [1] А. М. Бельский, А. П. Хапалюк. *Опт. и спектр.*, 35, 117, 1973.
- [2] I. A. Arnaud, H. Kogelnik. *Appl. Opt.*, 8, 1687, 1969.
- [3] Р. Б. Ваганов. *Радиотехника и электроника*, 14, 393, 1969.
- [4] H. K. W. Lotsch. *Optik*, 32, 116, 189, 1970; 32, 299, 1971.

Поступило в Редакцию 3 июля 1973 г.

---

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. СКОРИНЫ