УДК 621.373 : 535

О ДИФРАКЦИОННЫХ ПОТЕРЯХ ОТКРЫТЫХ РЕЗОНАТОРОВ. I

М. М. Попов

В работе строится матричное представление оператора Фокса и Ли. В качестве базиса берутся так называемые решения Флоке для устойчивых по первому приближению резонаторов, и сосредоточенные в окрестности оси резонатора решения параболического уравнения — для неустойчивых. Приводятся явные формулы для матричных элементов симметричного резонатора с цилиндрическими зеркалами и анализируется их поведение при $ka \to \infty$ (k — волновое число, a — размер зеркал).

В модели Фокса и Ли открытые двухзеркальные резонаторы описываются [1, 2] системой интегральных уравнений относительно функций v_1 и v_2 соответственно на первом и втором зеркалах

$$v_2(\mathrm{x}) = \gamma_2 \iint\limits_{(S_1)} R(\mathrm{x}, \mathrm{y})\, v_1(\mathrm{y})\, d\mathrm{y}; \qquad v_1(\mathrm{y}) = \gamma_1 \iint\limits_{(S_2)} R(\mathrm{x}, \mathrm{y})\, v_2(\mathrm{x})\, d\mathrm{x}. \tag{1}$$

В (1) интегрирование проводится по поверхности первого S_1 и второго S_2 зеркал, $\mathrm{x}=(x_1, x_2)$, $\mathrm{y}=(y_1, y_2)$. Ядро $R(\mathrm{x}, \mathrm{y})=\exp\{ik\, P_2(\mathrm{x}, \mathrm{y})\}$, где k — волновое число, $P_2(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ — полином второй степени, коэффициенты которого зависят от геометрических характеристик зеркал.

Проблему дифракционных потерь открытых резонаторов можно сформулировать в виде двух задач:

1) для данного резонатора вычислить дифракционные потери с наперед заданной степенью точности, или, что то же самое, при фиксированных параметрах резонатора вычислить собственные значения интегральных уравнений (1) с заданной степенью точности;

2) фиксируем собственное значение интегральных уравнений (1), требуется найти асимптотику этого собственного значения, когда размеры зеркал стремятся к бесконечности.

Трудности в задаче 1 возникают, когда $ka \gg 1$, где a — характерный поперечный размер зеркал резонатора, и обусловлены они быстрыми осцилляциями ядер в уравнениях (1). Решение задачи 1 должно состоять в указании такого вычислительного процесса, который сходился бы именно к собственным значениям уравнений (1) и преодолевал трудности, связанные с быстрыми осцилляциями ядер.

Более трудной представляется задача 2. Ее решение известно только для конфокального резонатора с зеркалами круглой или прямоугольной формы и получено благодаря тому, что в этом случае интегральное уравнение Фокса и Ли эквивалентно классической задаче Штурма—Лиувилля (см. [3] гл. 7).

Для решения задач 1 и 2 часто используется схема теории возмущения: собственные функции уравнений (1) ищутся в виде ряда по собственным функциям интегральных уравнений с бесконечными пределами интегрирования. При этом возникают трудности, во-первых, когда собственные частоты резонатора с «бесконечными зеркалами» вырождены и, во-вторых, остается неясным, сходятся ли ряды теории возмущений для собственных значений к собственным значениям уравнений (1), т. е. позволяют ли эти ряды вычислять последние с требуемой точностью. В работе [4] предлагается использовать матричное представление оператора Фокса и Ли [порождаемого правыми частями уравнений (1)], вытекающее из разложения Шмидта для вполне непрерывных операторов (см. [5], § 64). Основная трудность в использовании этого матричного представления состоит в том, что неизвестен явный вид базисных функций, а их построение представляет собой самостоятельную достаточно сложную задачу.

В настоящей работе строится матричное представление оператора Фокса и Ли. Для резонаторов, устойчивых по первому приближению (см. определение в [6]), в качестве базиса берутся так называемые решения Флоке (см. [7] гл. 8, 9 и [8]) некоторой задачи для параболического уравнения. Из этих решений Флоке возникают собственные функции устойчивых резонаторов с «бесконечными зеркалами». Для неустойчивых резонаторов в качестве базиса берутся решения параболического уравнения, сосредоточенные в окрестности оси резонатора. Знание матричного представления в описанном базисе (бесконечная матрица) позволяет решить задачу 1. Выделим из бесконечной матрицы конечную матрицу порядка N. По теореме об аппроксимации вполне непрерывного оператора (каким является оператор Фокса и Ли) конечномерными (см. [9]) следует, что для достаточно больших N все собственные значения матрицы N-го порядка будут близки к собственным значениям уравнений (1), так что сходимость метода вытекает из упомянутой теоремы. С другой стороны, если интересоваться только собственными колебаниями с малыми дифракционными потерями, то можно ограничиться небольшими N. Ввиду того что базисные функции с небольшими поперечными индексами сосредоточены в малой окрестности оси резонатора и экспоненциально убывают вне ее, быстрые осцилляции ядра оказываются подавленными.

Матричное представление оператора Фокса и Ли

Рассмотрим резонатор, образованный двумя зеркалами S_1 и S_2, уравнения которых в декартовых координатах s, x_1, x_2 имеют вид

$$\left.\begin{aligned} S_1&: s = D_{11}^{(1)} x_1^2 + 2D_{12}^{(1)} x_1 x_2 + D_{22}^{(1)} x_2^a \equiv (D^{(1)}\mathbf{x},\ \mathbf{x}), \\ S_2&: s = l - D_{11}^{(2)} x_1^2 - 2D_{12}^{(2)} x_1 x_2 - D_{22}^{(2)} x_2^2 \equiv l - (D^{(2)}\mathbf{x},\ \mathbf{x}). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Координата s изменяется вдоль оси резонатора между зеркалами от 0 до l, x_1 и x_2 — ортогональные координаты в плоскости, перпендикулярной оси резонатора.

Приведем нужные в дальнейшем результаты, касающиеся резонаторов с «бесконечными зеркалами» (см. [7] гл. 9, [8]). Обозначим через $V^+(s, \mathbf{x})$ волну, распространяющуюся в резонаторе от первого зеркала ко второму, а через $V^-(s, \mathbf{x})$ — волну, распространяющуюся в обратном направлении. Задача о собственных колебаниях резонатора (без учета дифракционных потерь) состоит в следующем. Требуется найти такие решения V^+ и V^- уравнений

$$\pm \frac{i}{k} \frac{\partial}{\partial s} V^{\pm} = \hat{H} V^{\pm}, \qquad \hat{H} = -\frac{1}{2k^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right), \tag{3}$$

которые на зеркале S_2 отражаются по формуле

$$V^-(l, \mathbf{x}) = \hat{S}_2 V^+(l, \mathbf{x}) \equiv V^+(l, \mathbf{x})(-1)\exp\{ik[l - 2(D^{(2)}\mathbf{x}, \mathbf{x})]\}; \tag{4}$$

аналогично на первом зеркале S_1, только оператор отражения $\hat{S}_1$ имеет вид

$$\hat{S}_1 = -\exp\{ik[l - 2(D^{(1)}\mathbf{x}, \mathbf{x})]\}, \tag{5}$$

и которые в каждой плоскости, перпендикулярной к оси, интегрируемы с квадратом, т. е. достаточно быстро убывают при удалении от оси резонатора

$$|V^{\pm}(s, \mathbf{x})| \to 0 \quad \text{при} \quad \|\mathbf{x}\| \to \infty. \tag{6}$$

Кроме того, после последовательного отражения исходной волны $V^+(s, \mathbf{x})$ от второго, а затем первого зеркала, образовавшаяся волна $\tilde{V}^+(s, \mathbf{x})$ должна совпасть с исходной

$$\tilde{V}^+(0, \mathbf{x}) = V^+(0, \mathbf{x}) \text{ при всех } \mathbf{x}. \tag{7}$$

Откажемся от условия (7) и рассмотрим задачу (3)—(6) о распространении волны в резонаторе. Обозначим через $\hat{\sigma}$ оператор, описывающий преобразование волны при однократном обходе резонатора, так что если $V_0^+(\mathbf{x})$ — некоторая исходная волна на первом зеркале, а $V_1^+(\mathbf{x})$ — волна снова на S_1 после однократного обхода резонатора, то

$$V_1^+(\mathbf{x}) = \hat{\sigma} V_0^+(\mathbf{x}). \tag{8}$$

Если резонатор устойчив по первому приближению, то при каждом значении волнового числа k, $\mathrm{Im}\, k=0$, существует счетное множество решений $\psi^{\pm}_{[m]}(s, x)$, $[m]=(m_1, m_2)$, $m_1, m_2=0, 1, 2, \ldots$ задачи (3)—(6) таких, что

$$\hat{\sigma}\psi^{+}_{[m]}(0, \mathbf{x}) = \psi^{+}_{[m]}(0, \mathbf{x}) \exp\{i\sigma_{[m]}\}. \tag{9}$$

Эти решения называются решениями Флоке, $\sigma_{[m]}$ — показателями Флоке. Напомним, что собственные частоты резонатора с бесконечными зеркалами определяются из уравнения $\sigma_{[m]}=2\pi q$, где $q \geqslant 1$ и целое; при этом решения Флоке удовлетворяют условию замыкания (7). Функции $\psi^{\pm}_{[m]}(s, \mathbf{x})$ при каждом фиксированном s ортогональны, нормированы на единицу

$$(\psi^{\pm}_{[m]}, \psi^{\pm}_{[m']}) \equiv \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi^{\pm}_{[m]}(s, \mathbf{x})\, \overline{\psi^{\pm}_{[m']}}(s, \mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \delta_{[m]\,[m']} \tag{10}$$

и образуют базис в пространстве функций, интегрируемых с квадратом, т. е. в $L_2(R_2)$.

В этом базисе матричное представление оператора Фокса и Ли для устойчивых резонаторов вытекает из следующих простых рассуждений. Рассмотрим задачу о распространении в таком резонаторе волны, первоначально заданной на первом зеркале, учитывая, что зеркала имеют конечные размеры. С этой целью введем срезающие функции $\chi^{(i)}(\mathbf{x})$, $i=1, 2$,

$$\chi^{(i)}\mathbf{x} = \begin{cases} 1 & \text{в каждой точке поверхности } i\text{-го зеркала,} \\ 0 & \text{на геометрическом продолжении } i\text{-го зеркала.} \end{cases} \tag{11}$$

Пусть $v_0^+(0, \mathbf{x})$ исходная волна, заданная на поверхности первого зеркала, она, очевидно, может быть описана в виде $v_0^+(0, \mathbf{x}) = \chi^{(1)}(\mathbf{x}) f(\mathbf{x})$, где $f(\mathbf{x})$ — некоторая функция из $L_2(R_2)$. На поверхность второго зеркала S_2 придет волна $v_0^+(l, \mathbf{x})$, которая, вообще говоря, будет отлична от нуля и на геометрическом продолжении зеркала S_2. Но от S_2 отразится только та часть, которая попадает на поверхность зеркала S_2, поэтому в качестве начальных данных для волны v^-, бегущей в обратном направлении, следует взять $v^-(l, \mathbf{x}) = \hat{S}_2\chi^{(2)}(\mathbf{x})\, v_0^+(l, \mathbf{x})$. Подобным образом, после отражения от S_1 возникает волна $v_1^+(0, \mathbf{x}) = \hat{S}_1\chi^{(1)}(\mathbf{x})\, v^-(0, \mathbf{x})$. Этим определен оператор K, действующий по формуле $(Kf)(\mathbf{x}) = v_1^+(0, \mathbf{x}) \equiv f'(\mathbf{x})$, из $L_2(R_2)$ в $L_2(R_2)$. Каждую из функций $v^{\pm}(s, \mathbf{x})$ разложим в ряд Фурье по базисным функциям $\psi^{\pm}_{[m]}(s, \mathbf{x})$. Учитывая, что последние удовлетворяют условиям отражения (4), (5), а операторы $\hat{S}_i$ и $\chi^{(i)}$ коммутируют, для матрицы оператора K в базисе $\psi^{\pm}_{[m]}(0, \mathbf{x})$ получаем выражение

$$K = \hat{\sigma}\varkappa^{(2l)}\varkappa^{(l)}\varkappa^{(0)}. \tag{12}$$

Бесконечные матрицы $\varkappa$ соответствуют срезающим функциям $\chi^{(i)}(\mathbf{x})$, их матричные элементы определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} \varkappa^{(0)}_{[m]\,[n]} = (\chi^{(1)}\psi^{+}_{[n]}(0, \mathbf{x}),\ \psi^{+}_{[m]}(0, \mathbf{x})), \quad \varkappa^{(l)}_{[m]\,[n]} = (\chi^{(2)}\psi^{+}_{[n]}(l, \mathbf{x}),\ \psi^{+}_{[m]}(l, \mathbf{x})), \\ \varkappa^{(2l)}_{[m]\,[n]} = (\chi^{(1)}\psi^{-}_{[n]}(0, \mathbf{x}),\ \psi^{-}_{[m]}(0, \mathbf{x})), \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

а матрица $\hat{\sigma}$ — диагональная ввиду равенства (9). Элементы матрицы K, определенной формулой (12), являются бесконечными рядами. Суммы этих рядов можно выразить в виде повторных интегралов от известных функций, если использовать функции Грина $G^{\pm}(s, \mathbf{x} \mid s_0, \xi)$ уравнений (3) и учесть, что

$$G^{\pm}(s, \mathbf{x} \mid s_0, \xi) = \sum_{[m]=0}^{\infty} \psi^{\pm}_{[m]}(s, \mathbf{x}) \overline{\psi^{\pm}_{[m]}}(s_0, \xi). \tag{14}$$

После несложных преобразований для элементов матрицы K получаем формулу

$$K_{[m][n]} = e^{2ikl} \int\limits_{(S_1)} d\mathbf{y} \overline{\psi^{+}_{[m]}}(0, \mathbf{y}) \int\limits_{(S_1)} d\xi \psi^{+}_{[n]}(0, \xi)\, G(\mathbf{y}, \xi), \tag{15}$$

где обозначено

$$G(\mathbf{y}, \xi) = \int\limits_{(S_2)} d\mathbf{x} G^{-}(0, \mathbf{y} \mid l, \mathbf{x})\, G^{+}(l, \mathbf{x} \mid 0, \xi) \exp\{-2ik[(D^{(1)}\mathbf{y}, \mathbf{y}) + (D^{(2)}\mathbf{x}, \mathbf{x})]\}. \tag{16}$$

Обратимся к неустойчивым резонаторам. В этом случае решений Флоке не существует, однако способом, подробно описанным в [7] гл. 8, 9, и [8], можно построить решения $\Psi^{\pm}_{[m]}$ задачи (2)—(6), которые в каждой плоскости, перпендикулярной к оси резонатора, образуют ортонормированный базис в $L_2(R_2)$. В этом базисе, дословно повторяя описанные выше рассуждения, строится матричное представление оператора Фокса и Ли. Формула (12) сохраняется и в этом случае, только матрица оператора $\hat{\sigma}$ не будет диагональной. В формулах (15), (16) для матрицы K нужно лишь заменить $\psi^{+}_{[m]}$ на $\Psi^{(+)}_{[m]}$.

Остается показать, что оператор K совпадает с оператором Фокса и Ли. С этой целью заметим, что всякая волна $v_0^{+}(l, \mathbf{x})$ на S_2, получаемая из исходной $v_0^{+}(0, \mathbf{x})$ на первом зеркале, связаны соотношением

$$v_0^{+}(l, \mathbf{x}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \chi^{(1)}(\xi)\, G^{+}(l, \mathbf{x} \mid 0, \xi)\, f(\xi)\, d\xi = \int\limits_{(S_1)} G^{+}(l, \mathbf{x} \mid 0, \xi)\, v_0^{+}(0, \xi)\, d\xi. \tag{17}$$

Подставляя в (17) $v_0^{+}(l, \mathbf{x}) = v_2(\mathbf{x}) \exp\{ik(D^{(2)}\mathbf{x}, \mathbf{x})\}$, $v_0^{+}(0, \xi) = v_1(\xi) \times \exp\{ik[l - (D^{(1)}\xi, \xi)]\}$ и явный вид функции Грина (см. [3] § 3) для v_1 и v_2 получаем соотношение, совпадающее с первым из уравнений (1). Аналогично получается второе из уравнений (1).

Симметричные двухзеркальные резонаторы

Рассмотрим симметричный резонатор, образованный двумя цилиндрическими бесконечными зеркалами (двумерный случай), характеризуемый параметрами: l — длина резонатора, r — радиус кривизны зеркал, $2a$ — размер апертуры зеркал. Для симметричных резонаторов можно считать $K = \hat{\sigma}\varkappa^{(l)}\chi^{(0)}$, где оператор $\hat{\sigma}$ описывает распространение волны от первого ко второму зеркалу [ср. с (9)].

I. Устойчивый резонатор: $|g| < 1$, $g = 1 - l/r$. В качестве базиса берем решения Флоке, при этом матрица оператора $\hat{\sigma}$ диагональная и $\hat{\sigma}_{mm} = \exp\{i[kl + \pi - \varphi(m + 1/2)]\}$, где $\varphi = \arg(g + i\sqrt{1 - g^2})$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Положим $z = a(k/l\sqrt{1 - g^2})^{1/2}$. Приведем выражение для элементов матрицы $\varkappa = \varkappa^{(l)}\varkappa^{(0)}$, удобное для нахождения (интегрированием по частям) асимптотики при $z \to \infty$ и ограниченных m и n

$$\varkappa_{mn} = \delta_{mn} - \varepsilon_{mn}[(1 + e^{i\varphi(m-n)})\, h_{mn}(z) - F^{(-)}_{mn}(z) - (-1)^n F^{(+)}_{mn}(z)]. \tag{18}$$

Здесь δ_{mn} — символ Кронекера, $\varepsilon_{mn} = 1 + (-1)^{m+n}$,

$$h_{mn}(z) = \frac{\exp\left\{\frac{i\pi}{2}(n - m)\right\}}{\sqrt{\pi m!\, n!\, 2^{m+n}}} \int\limits_{z}^{\infty} e^{-y^2} H_m(y)\, H_n(y)\, dy, \tag{19}$$

$$F^{(-)}_{mn}(z) = \frac{\exp\left\{i\frac{\pi}{2}\left(n-m-\frac{1}{2}\right)+i\varphi\left(m+\frac{1}{2}\right)\right\}}{\pi\sqrt{m!\,n!\,2^{m+n+1}}\sqrt[4]{1-g^2}}\times$$

$$\times\iint_z^\infty dxdyH_m(x)\,H_n(y)\exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{i}{2\sqrt{1-g^2}}(y^2g-2xy+x^2g)\right\}, \qquad (20)$$

функция $F^{(+)}_{mn}(z)$ отличается от $F^{(-)}_{mn}(z)$ тем, что вместо слагаемого $-2xy$ в формуле (20) нужно взять $+2xy$, через $H_m(x)$ обозначены полиномы Эрмита (см. [10]).

Остановимся на некоторых свойствах матриц K и $\varkappa$. Из формулы (18) следует, что $\varkappa_{mn}$ и соответственно K_{mn} может быть записана в блочной форме. Один (бесконечный) блок соответствует четным m и n (симметричные моды резонатора), второй — нечетным m и n (антисимметричные моды). Обозначим через ν номер решения Флоке ψ^+_ν, которому соответствует каустика, попадающая на край зеркал. Если оба $m,\ n<\nu$, то, как вытекает из равенств (19), (20), при $z\to\infty$ по порядку величины $|h_{mn}|\sim|F^{(\pm)}_{mn}|\sim e^{-z^2}$. Если же один из номеров больше ν, то уже $|h_{mn}|\sim|F^{(\pm)}_{mn}|\sim e^{-1/2z^2}$. Поэтому на формирование собственного колебания открытого резонатора существенное влияние оказывает «взаимодействие» решения Флоке ψ_n с теми ψ_m, у которых каустика попадает на край зеркала ($m\sim\nu$), а не с ближайшими по номеру. Если при вычислении потерь ограничиться конечной матрицей порядка $N<\nu$, то при больших z главный вклад дадут лишь диагональные члены, однако влияние краев при этом не будет учтено. В первом приближении, учитывая только диагональные K_{mm} члены ($m<\nu$), при $z\to\infty$ по порядку величины $\operatorname{Im}k\sim-\exp(-z^2)$, т. е. то же, что дает учет первого поправочного члена в ряду теории возмущения.[1] Однако предэкспоненциальные множители оказываются разными за счет присутствия функций F в формуле 18 (которые не появляются в теории возмущения). Это указывает, по-видимому, на непригодность формул теории возмущений для вычисления потерь резонаторов при фиксированных значениях z.

II. Неустойчивый резонатор: $|g|\geqslant 1$.

В этом случае элементы матрицы K можно записать в виде

$$K_{mn}=\delta_{mn}-\varepsilon_{mn}\left[L_{mn}-N^{(-)}_{mn}-(-1)^n N^{(+)}_{mn}\right]-\sum_{t=0}^{\infty}\varepsilon_{mt}\delta_{mt}M_{tn}, \qquad (21)$$

где приняты следующие обозначения:

$$\delta_{mn}=(-1)^n\int_{-\infty}^{+\infty}\bar\Psi^+_m(0,\ x)\,\Psi^-_n(l,\ x)\,dx, \qquad (22)$$

$$L^{(-)}_{mn}=(-1)^n\int_a^\infty\bar\Psi^+_m(0,\ x)\,\Psi^-_n(l,\ x)\,dx;\quad M_{tn}=\int_a^\infty\bar\Psi^+_t(0,\ x)\,\Psi^+_n(0,\ x)\,dx, \qquad (23)$$

$$N^-_{mn}=\iint_a^\infty dxd\xi\bar\Psi^+_m(0,\ x)\,\hat S_2(x)\,G^+(l,\ x\,/\,0,\ \xi)\,\Psi^+_n(0,\ \xi) \qquad (24)$$

и $N^{(+)}_{mn}$ отличается от $N^{(-)}_{mn}$ тем, что в формуле (24) следует взять функцию Грина $G^+(l,\ x\,|0,-\xi)$. Так же как для устойчивых резонаторов, матрица K_{mn} может быть записана в виде двух бесконечных блоков (для m, n четных и нечетных). Характерной особенностью в данном случае является наличие в формуле (21) слагаемого δ_{mn}, не зависящего от размеров зеркал. Оно

---

[1] На примере конфокального резонатора известно [3], что оценка при $z\to\infty$ дифракционных потерь, получаемая по первому поправочному члену в ряду теории возмущения, оказывается неверной. Как следует из сказанного выше, эта оценка соответствует сохранению лишь диагональных элементов матрицы K_{mn} и тем самым не учитывает влияния краев на формирование собственных колебаний открытых резонаторов.

дает главный вклад в K_{mn} при $ka \to \infty$ для таких m, n, при которых базисные функции Ψ_m экспоненциально малы на краю зеркал [см. формулы (22)—(24)].

При $|g| > 1$ базисные функции можно построить, используя два собственных вектора матрицы E, описывающей распространение в резонаторе параксиальных лучей (см. [7], гл. 9 и [8]). Если при этом ограничиться диагональным элементом K_{00}, то для $g > 1$ и $ka \to \infty$ оказывается, что $\operatorname{Im} k = -\frac{1}{2}\ln g$. С другой стороны, если аналитически продолжить на неустойчивые резонаторы формулу для собственных частот, выведенную для устойчивых резонаторов, то получаем $\operatorname{Im} k = -\frac{1}{2}\ln(g + \sqrt{g^2 - 1})$. Обе формулы согласуются при $g \gg 1$. Однако в данном случае учет лишь диагональных членов матрицы K_{mn} является значительно более грубым приближением, чем в случае устойчивых резонаторов.

Заключение

Изложенный в статье способ позволяет получить матричное представление оператора Фокса и Ли для резонаторов с отверстиями в зеркалах, а также для резонаторов, заполненных неоднородной средой (см. по этому поводу [11]). Наиболее естественный путь использования матричного представления — численный счет на ЭВМ. В настоящее время такие вычисления проводятся, результаты будут опубликованы.

Литература

[1] A. G. Fox, T. Li. Proc. IEEE, *51*, 116, 1963.
[2] В. С. Булдырев, Э. Е. Фрадкин. Опт. и спектр., *17*, 583, 1964.
[3] Л. А. Вайнштейн. Открытые резонаторы и открытые волноводы. Изд. «Сов. радио», М., 1966.
[4] В. Штрайферт, Х. Гамо. Квазиоптика (избранные доклады на международном симпозиуме), стр. 226. Изд. «Мир», М., 1966.
[5] Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Изд. «Наука», М., 1966.
[6] В. С. Булдырев. Вестн. ЛГУ, вып. 4, № 22, 1965.
[7] В. М. Бабич, В. С. Булдырев. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. Изд. «Наука», М., 1972.
[8] М. М. Попов. Вестн. ЛГУ, вып. 4, № 22, 1969.
[9] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, гл. 1. Изд. «Наука», М., 1969.
[10] В. И. Смирнов. Курс высшей математики. 3, часть 2. Изд. «Наука», 1969.
[11] М. М. Попов. Опт. и спектр., *32*, 421, 1972.

Поступило в Редакцию 21 июля 1972 г.