УДК 621.373 : 535

ТЕОРИЯ ДИФРАКЦИОННЫХ ЯВЛЕНИЙ В КОЛЬЦЕВОМ ЛАЗЕРЕ

А. Я. Бирман и *А. Ф. Савушкин*

С помощью метода возмущений для параболического уравнения показано, что частоты и интенсивности встречных волн в слабонелинейном кольцевом лазере являются функционалами распределения поля собственного колебания открытого резонатора в активной среде. Получено соотношение между частотной и амплитудной невзаимностями встречных волн, инвариантное относительно изменения пространственной структуры поля. Найдена дисперсионная зависимость разности частот встречных волн и сделаны наиболее общие выводы о характере дифракционных явлений, в кольцевом лазере.

Частота и интенсивность бегущей волны в кольцевом лазере зависят от пространственной структуры электромагнитного поля в активной среде. Впервые об этом явлении сообщено в работе [1], авторы которой обнаружили частотную и амплитудную невзаимности встречных волн, помещая в резонатор кольцевого лазера рассеивающую среду. Подробные экспериментальные исследования дифракционных явлений в кольцевом лазере [2, 3] показали, что эти явления обусловлены как самовоздействием, так и взаимодействием в нелинейной активной среде встречных волн, обладающих сложной дифракционной структурой. Метод разложения электромагнитного поля в лазере по собственным функциям невозмущенного дифракцией резонатора со сферическими отражателями позволил построить теорию дифракционного расщепления частот встречных волн в кольцевом лазере со слабонеоднородным резонатором [4]. Эта теория ограничивается исследованием влияния слабых дифракционных искажений структуры поля на частоты встречных волн, в то время как все экспериментальные исследования проводились на кольцевых лазерах, резонаторы которых обладали значительными дифракционными потерями. Присутствие в резонаторе лазера фокусирующего элемента является непременным условием применимости теории [4], что сужает класс рассматриваемых резонаторов и не позволяет описать дифракционные явления в кольцевом лазере с резонатором, имеющим плоские отражатели, в котором дифракция наиболее существенна. Кроме того, в работе [4] нет анализа амплитудных явлений, которые по своему характеру тесно связаны с частотными и не могут рассматриваться независимо. Особенностью работы [4] является чрезвычайная сложность полученных соотношений и интерпретации явления, так как в этой работе решались совместно две различные по существу задачи: построение распределения поля собственного колебания слабонеоднородного резонатора и вычисление нелинейной поправки к частоте этого колебания в лазере.

В настоящей работе построена теория слабонелинейного кольцевого лазера с неоднородным резонатором, являющаяся непосредственным обобщением фундаментальной работы [5], в которой кольцевой лазер исследован в приближении однородных плоских волн. Для решения задачи использован метод возмущений для параболического уравнения, описывающего распространение бегущей волны в резонаторе кольцевого лазера. Показано, что частота и интенсивность бегущей волны в кольцевом лазере являются функционалами распределения поля собственного колебания неоднородного резонатора в активной среде. Получено соотношение между частотной и амплитудной невзаимностями встречных волн, инвариантное относительно изменения пространственной структуры поля. Характерной чертой рассматриваемого подхода является возможность использования методов и результатов хорошо развитой в настоящее время теории открытых резонаторов [6] применительно к исследованию характеристик слабонелинейных лазеров.

Электрическое поле в лазере представим в виде суперпозиции двух стационарных, распространяющихся в противоположных направлениях волн с медленно меняющимися комплексными амплитудами $\mathbf{A}(\mathbf{r}, z)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, z)$ и частотами ν_a, ν_b

$$\mathbf{E} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, z) \exp(ikz - i\nu_a t) + \mathbf{B}(\mathbf{r}, z) \exp(-ikz - i\nu_b t) + \text{к. с.} \tag{1}$$

Волновое число k выберем таким образом, чтобы величина $\Omega = kc$ соответствовала собственной частоте резонатора в приближении плоских волн.

Выражение для поляризации активной среды, полученное в работе [5] в приближении однородных плоских волн, остается справедливым для поля с дифракционной структурой, если за время жизни в возбужденном состоянии γ^{-1} движущийся атом не успевает «почувствовать» неоднородность поля [7]

$$\frac{\gamma}{ku} \geqslant \frac{1}{kw}, \tag{2}$$

где u — средняя тепловая скорость движения атомов, w — характерный масштаб неоднородности поля. В квазиоптическом приближении $kw \gg 1$, и условие (2) хорошо выполняется даже для существенно неоднородно уширенной линии рабочего перехода.

Обычные квазиоптические приближения [8] позволяют записать параболические уравнения для поперечных компонент медленных комплексных амплитуд $A(\mathbf{r}, z)$ и $B(\mathbf{r}, z)$

$$\left.\begin{aligned} &(\Omega - \nu_a) A - ic\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{c}{2k}\Delta_\perp A = R(z - z_0)[MA + WA|A|^2 + HA|B|^2], \\ &(\Omega - \nu_b) B + ic\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{c}{2k}\Delta_\perp B = R(z - z_0)[MB + WB|B|^2 + HB|A|^2]. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Аналогичные уравнения широко используются для описания явления нелинейной самофокусировки [9].

Комплексные величины M, W, H описывают дисперсионные свойства активной среды: M — линейное усиление ($\mathrm{Im}M$) и линейную дисперсию ($\mathrm{Re}M$), W — нелинейное насыщение ($\mathrm{Im}W$) и нелинейную дисперсию ($\mathrm{Re}W$), обусловленные самовоздействием встречных волн, H — нелинейное насыщение ($\mathrm{Im}H$) и дисперсию ($\mathrm{Re}H$), обусловленные взаимодействием встречных волн. Для активной среды с симметричным контуром усиления все действительные части этих величин являются нечетными, а все мнимые части — четными функциями расстройки частоты генерации относительно центра контура усиления.

Функция $R(z - z_0)$ описывает распределение активной среды в резонаторе, которое предполагается однородным в поперечном направлении; z_0 — координата центра активного элемента; функция $R(z - z_0)$ — симметричная относительно z_0.

Кольцевой резонатор удобно представить в виде периодического волновода. В плоскости $z = 0$ расположен тонкий корректирующий элемент, взаимный для встречных волн, описываемый комплексной функцией $F(\mathbf{r})$ и осуществляющий фазовую и амплитудную коррекцию бегущих волн, так что

$$\left.\begin{aligned} A(\mathbf{r}, +0) &= F(\mathbf{r}) A(\mathbf{r}, -0), \\ B(\mathbf{r}, -0) &= F(\mathbf{r}) B(\mathbf{r}, +0). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Предполагается, что как корректор, так и активный элемент не приводят к рассеянию электромагнитного поля бегущей волны в направлении распространения встречной волны.

Требование повторяемости поля бегущей волны после одного обхода резонатора и соотношения (4) позволяют записать следующие граничные условия:

$$\left.\begin{aligned} A(\mathbf{r}, +0) &= F(\mathbf{r})\,A(\mathbf{r}, L-0), \\ B(\mathbf{r}, L-0) &= F(\mathbf{r})\,B(\mathbf{r}, +0). \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Решения уравнений (3) удовлетворяющие граничным условиям (5), построим методом возмущений. Невозмущенной системой является резонатор с линейной активной средой, усиление которой в точности равно потерям в корректоре, так что невозмущенные решения стационарны и по своему характеру близки к генераторным решениям. Параметр, соответствующий возмущению,— малое превышение усиления над потерями. Именно малость превышения позволяет пользоваться выражением для поляризации активной среды, вычисленным с помощью теории возмущений с точностью до третьего порядка по полю [5].

Симметрия интегральных уравнений для бегущих волн в невозмущенной системе позволяет заключить, что частоты встречных волн равны $\nu_a^{(0)} = \nu_b^{(0)}$, а распределения полей $A^{(0)}(\mathbf{r}, +0)$ и $B^{(0)}(\mathbf{r}, L-0)$ подобны.

Возмущенная система описывается поправками к распределениям полей встречных волн $A^{(1)}(\mathbf{r}, +0)$, $B^{(1)}(\mathbf{r}, L-0)$ и поправками к частотам $\nu_a^{(1)}$ и $\nu_b^{(1)}$, удовлетворяющими неоднородным интегральным уравнениям, полученным в первом порядке метода возмущений

$$\left.\begin{aligned} A^{(1)}(\mathbf{r}, +0) - F(\mathbf{r}) \int D_a(\mathbf{r}-\mathbf{r}', L, 0)\, A^{(1)}(\mathbf{r}', +0)\, d^2r' &= \Phi_a(\mathbf{r}), \\ B^{(1)}(\mathbf{r}, L-0) - F(\mathbf{r}) \int D_b(\mathbf{r}-\mathbf{r}', 0, L)\, B^{(1)}(\mathbf{r}', L-0)\, d^2r' &= \Phi_b(\mathbf{r}). \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

$$\left.\begin{aligned} \Phi_a(\mathbf{r}) = \frac{i}{c} F(\mathbf{r}) \Big\{ (\nu_a^{(1)} - in)\, LA^{(0)}(\mathbf{r}, L-0) + \\ + \int D_a(\mathbf{r}-\mathbf{r}', L, z')\, R(z'-z_0)\, [WA^{(0)}(\mathbf{r}', z')\, |A^{(0)}(\mathbf{r}', z')|^2 + \\ + HA^{(0)}(\mathbf{r}', z')\, |B^{(0)}(\mathbf{r}', z')|^2]\, d^2r'dz' \Big\}, \\ \Phi_b(\mathbf{r}) = \frac{i}{c} F(\mathbf{r}) \Big\{ (\nu_b^{(1)} - in)\, LB^{(0)}(\mathbf{r}, +0) + \\ + \int D_b(\mathbf{r}-\mathbf{r}', 0, z')\, R(z'-z_0)\, [WB^{(0)}(\mathbf{r}', z')\, |B^{(0)}(\mathbf{r}', z')|^2 + \\ + HB^0(\mathbf{r}', z')\, |A^{(0)}(\mathbf{r}', z')|^2]\, d^2r'dz' \Big\}. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Параметр $n = \operatorname{Im} \bar{\nu} - (l/L) \operatorname{Im} M$ $\Big[$где $\bar{\nu}$ — комплексная частота собственного колебания открытого резонатора, L — периметр резонатора, а $l = \int_0^L R(z - z_0)\, dz$ — длина активного элемента$\Big]$ описывает превышение усиления активной среды над потерями. Ядра интегральных операторов, описывающих распространение бегущих волн в невозмущенной системе, связаны с функцией Грина параболического уравнения [10]

$$G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', z-z') = \begin{cases} \dfrac{-ik}{2\pi(z-z')} \exp\left\{\dfrac{ik\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}{2(z-z')}\right\}, & \text{если } z > z'; \\ 0, \text{ если } z \leqslant z' \end{cases} \qquad (8)$$

следующими соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} D_a(\mathbf{r}-\mathbf{r}', z, z') &= G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', z-z') \exp\left\{\frac{i}{c}(\nu_a^{(0)}-\Omega)(z-z') + \right. \\ &\left. + \frac{i}{c}\left(\operatorname{Re} M + i\frac{L}{l}\operatorname{Im}\nu\right)\int_{z'}^{z} R(\zeta - z_0)\, d\zeta\right\}, \\ D_b(\mathbf{r}-\mathbf{r}', z, z') &= D_a(\mathbf{r}-\mathbf{r}', z', z). \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Требование однозначной разрешимости уравнений (6) приводит к условиям ортогональности правых частей неоднородных уравнений (6) соответствующим решениям сопряженных однородных уравнений [10]

$$\left.\begin{aligned} \int \Phi_a(\mathbf{r}) A^{(0)}(\mathbf{r}, L-0)\, d^2r = 0, \\ \int \Phi_b(\mathbf{r}) B^{(0)}(\mathbf{r}, +0)\, d^2r = 0. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Эти условия являются линейными алгебраическими уравнениями относительно частот и интенсивностей встречных волн в кольцевом лазере

$$\left.\begin{aligned} \nu_a^{(1)} + WI_a\mu_a + HI_b\mu_b = in, \\ \nu_b^{(1)} + WI_b\mu_b + HI_a\mu_a = in. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Интенсивности встречных волн I_a и I_b определены следующими соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} A^{(0)}(\mathbf{r}, z) = I_a^{1/2} a(\mathbf{r}, z), \\ B^{(0)}(\mathbf{r}, z) = I_b^{1/2} b(\mathbf{r}, z). \end{aligned}\right\} \quad (12) \qquad \left.\begin{aligned} \int |a(\mathbf{r}, +0)|^2\, d^2r = 1, \\ \int |b(\mathbf{r}, L-0)|^2\, d^2r = 1. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Величины μ_a и μ_b являются функционалами нормированных распределений полей встречных волн в невозмущенной системе $a(\mathbf{r}, z)$ и $b(\mathbf{r}, z)$

$$\left.\begin{aligned} \mu_a = \frac{\int R(z-z_0)\, a(\mathbf{r}, z)\, b(\mathbf{r}, z)\, |a(\mathbf{r}, z)|^2\, d^2r dz}{\int a(\mathbf{r}, z)\, b(\mathbf{r}, z)\, d^2r dz}, \\ \mu_b = \frac{\int R(z-z_0)\, a(\mathbf{r}, z)\, b(\mathbf{r}, z)\, |b(\mathbf{r}, z)|^2\, d^2r dz}{\int a(\mathbf{r}, z)\, b(\mathbf{r}, z)\, d^2r dz}. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Уравнения (11) соответствуют уравнениям для частот и интенсивностей встречных волн в кольцевом лазере, полученным в работах [5, 11] без учета дифракционных явлений. Отличие заключается в появлении, вообще говоря, комплексных функционалов μ_a и μ_b, описывающих влияние пространственной дисперсии нелинейной среды на характеристики лазера.

Решая уравнения (11), можно получить соотношение между разностью нормированных интенсивностей встречных волн $I_{ab} = I_a I_a^{-1}(0) - I_b I_b^{-1}(0)$ [где $I_a(0)$ и $I_b(0)$ — значения интенсивностей на центре контура усиления] и разностью частот встречных волн $\nu_{ab} = \nu_a - \nu_b$

$$I_{ab} = \frac{-\operatorname{Im}[W(0) + H(0)] \operatorname{Re}(W - H)}{n(0)\, |W - H|^2} \nu_{ab}. \quad (15)$$

Соотношение между амплитудной и частотной невзаимностями встречных волн (15) не зависит от пространственной структуры поля в активной среде, а определяется только дисперсионными свойствами среды.

Разность частот встречных волн

$$\nu_{ab} = \frac{n\, |W - H|^2 (\lambda_a - \lambda_b)}{[(\operatorname{Im} W)^2 - (\operatorname{Im} H)^2] + [(\operatorname{Re} W)^2 - (\operatorname{Re} H)^2]\lambda_a\lambda_b + [\operatorname{Im} W \operatorname{Re} W - \operatorname{Im} H \operatorname{Re} H](\lambda_a + \lambda_b)} \quad (16)$$

пропорциональна превышению усиления над потерями n и существенно зависит от функционалов пространственного распределения поля в активной среде λ_a и λ_b

$$\lambda_a = \frac{\operatorname{Im}\mu_a}{\operatorname{Re}\mu_a}, \quad \lambda_b = \frac{\operatorname{Im}\mu_b}{\operatorname{Re}\mu_b}. \tag{17}$$

Если активный элемент и корректор расположены симметрично для встречных волн ($z_0 = L/2$) или активная среда заполняет весь объем резонатора, частоты и интенсивности волн одинаковы. Для двух симметричных расположений активного элемента и корректора дифракционные явления различаются только знаком. Дифракционные явления отсутствуют, если встречные волны в активной среде имеют плоские фазовые фронты или однородные амплитудные распределения. Дисперсионная зависимость ν_{ab} содержит основную четную компоненту, соответствующую контуру усиления n, а также компоненту, описывающую провал на центре контура (пропорциональный $\lambda_a\lambda_b$), и асимметричную компоненту (пропорциональную $\lambda_a + \lambda_b$).

Все эти наиболее общие выводы об основных характеристиках дифракционных явлений можно получить, анализируя полученные соотношения встречных волн. Изучение конкретных зависимостей дифракционных явлений от параметров резонатора в настоящей работе сводится к анализу функционалов (17). Если воспользоваться методом разложения по собственным функциям невозмущенного дифракцией резонатора и ограничиться первым не равным нулю членом в соответствующем разложении функционалов (17) по малому параметру, отвечающему слабой дифракции, можно получить результаты работы [4], описывающей дифракционное расщепление частот в кольцевом лазере со слабонеоднородным резонатором. Вычисление функционалов (17) для модельного гауссова распределения поля позволяет получить результаты работы [12], в которой исследовано расщепление частот невзаимодействующих встречных волн в кольцевом лазере с гауссовой диафрагмой. Естественно, что исследование функционалов (17) может быть проведено и другими, более общими, методами, развитыми в теории открытых резонаторов.

В заключение, несколько слов о пределах применимости полученных результатов. Как и во всякой теории возмущений для системы с невырожденным спектром, определяющей с этой точки зрения является малость отношения сдвига частоты генерации бегущей волны относительно собственной частоты невозмущенной системы, пропорционального превышению усиления над потерями, к частотному интервалу между соседними уровнями в спектре невозмущенной системы.

Авторы благодарны И. П. Мазанько и Э. Е. Фрадкину за полезные обсуждения вопросов, затронутых в настоящей работе.

Литература

[1] P. K. Cheo, C. V. Heer. Appl. Opt., *3*, 788, 1964.
[2] И. А. Андронова, И. Л. Берштейн. ЖЭТФ, *57*, 100, 1969.
[3] А. Д. Валуев, С. А. Савранский, А. Ф. Савушкин, Б. А. Шокин. Опт. и спектр., *29*, 410, 1970.
[4] Э. Е. Фрадкин. Опт. и спектр., *31*, 952, 1971; *32*, 132, 1972.
[5] F. Aronowitz. Phys. Rev., *139*, A635, 1965.
[6] Л. А. Вайнштейн. Открытые резонаторы и открытые волноводы. Изд. «Сов. радио», М., 1966.
[7] С. Г. Зейгер. Автореф. канд. дисс. Л., 1967.
[8] Н. Г. Бондаренко, В. И. Таланов. Изв. вузов, радиофизика, *7*, 313, 1964.
[9] С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов. Усп. физ. наук, *93*, 19, 1967.
[10] В. С. Владимиров. Уравнения математической физики. Изд. «Наука», М., 1967.
[11] С. Г. Зейгер, Э. Е. Фрадкин. Сб. «Физика газовых лазеров», 55. Изд. ЛГУ, Л., 1969.
[12] В. Ф. Бойцов, Т. А. Мурина, Э. Е. Фрадкин. Опт. и спектр., *36*, 539, 1974.

Поступило в Редакцию 6 апреля 1973 г.