

КВАНТОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ В КОГЕРЕНТНЫХ ИСТОЧНИКАХ

Ф. А. Воробьев и Р. И. Соколовский

Изучается тонкая структура в зависимости от частоты генерации среднего числа фотонов в резонаторе и дисперсии функции распределения фотонов при учете явления отдачи излучающего атома.

В оптических эталонах частоты длины волн де Бройля атомов, взаимодействующих с сильным полем, по порядку величины могут совпадать с длиной волны поля [1]. В этом случае необходимо квантовать поступательное движение атомов и учитывать явление отдачи при излучении и поглощении фотонов. Отдача приводит к расщеплению [1] тонкой структуры в спектре генерации, обусловленной насыщением [2].

Теория, развитая в работе [1], основывалась на квазиклассическом описании взаимодействия атомов с электромагнитным полем [3]. Более полная теория, учитывающая квантование поля излучения, была дана в работе [4]. Авторы этой работы ограничились рассмотрением влияния явления отдачи на статистические характеристики генерируемого поля только в линейном приближении, оставив в стороне вопросы, связанные с совместным проявлением явлений насыщения и отдачи. Настоящее сообщение посвящено устранению этого пробела в теории. В работе находится функция распределения чисел фотонов с учетом явления отдачи в модели слабого насыщения. Тонкая структура в спектре генерации [1] проявляется в зависимости от частоты генерации как среднего числа фотонов в резонаторе, так и дисперсии функции распределения.

Введем функцию $f_N(t)$, имеющую смысл вероятности найти N фотонов в моде в момент времени t . Нетрудно получить кинетическое уравнение, описывающее ее изменение,

$$\frac{df_N}{dt} = -W_{mn}(N+1)f_N + W_{mn}(N)f_{N-1} - W_{nm}(N)f_N + W_{nm}(N+1)f_{N+1} - CNf_N + C(N+1)f_{N+1}. \quad (1)$$

Здесь [5]

$$W_{mn}(N) = \frac{2\sqrt{\pi}}{k\bar{v}} g^2 N_m^0 N \left\{ e^{-\left(\frac{\Omega+\delta}{k\bar{v}}\right)^2} - \frac{g^2}{2\Gamma^2} N\chi^{-1}(\omega) e^{-\left(\frac{\Omega}{k\bar{v}}\right)^2} \right\}, \quad (2)$$

$$W_{nm}(N) = \frac{2\sqrt{\pi}}{k\bar{v}} g^2 N_n^0 N \left\{ e^{-\left(\frac{\Omega-\delta}{k\bar{v}}\right)^2} - \frac{g^2}{2\Gamma^2} N\chi^{-1}(\omega) e^{-\left(\frac{\Omega}{k\bar{v}}\right)^2} \right\} \quad (3)$$

вероятности излучения и поглощения фотона в единицу времени соответственно; $g^2 = 2\pi\omega D_{mn}^2/\hbar V$; D_{mn} — матричный элемент дипольного момента для перехода $m \rightarrow n$; ω — частота излучения; V — объем, занятый полем; $\bar{v} = \sqrt{2kT/m}$ — средняя тепловая скорость движения атомов; $\delta = \hbar k^2/2m$ — сдвиг частоты за счет отдачи; $\Omega = \omega - \omega_{mn}$; ω_{mn} — боровская частота перехода $m \rightarrow n$;

$$\chi^{-1}(\omega) = \Gamma\tau \left[1 + \frac{\tau_m}{\tau} \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + (\Omega + \delta)^2} + \frac{\tau_n}{\tau} \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + (\Omega - \delta)^2} \right], \quad (4)$$

$$\tau = \tau_m + \tau_n; \quad \tau_m = 1/\Gamma_m; \quad \tau_n = 1/\Gamma_n;$$

Γ — ширина линии перехода $m-n$; Γ_m, Γ_n — ширины уровней m и n соответственно; N_m^0, N_n^0 — среднее число атомов на уровнях m, n в отсутствие поля. Формула (4) выписана в предположении, что [5] $\gamma_{mn}/\Gamma_m \ll 1$ (γ_{mn} — вероятность спонтанного перехода). Последние два члена в уравнении (1) введены феноменологически (C — некоторый параметр), для того чтобы описать нерезонансные потери поля в среде [6].

В интересующем нас случае число фотонов в моде велико ($N \gg 1$) и распределение $f_N(t)$ можно аппроксимировать гладкой функцией. Разлагая последнюю в ряд и ограничиваясь первыми членами разложения, перейдем от уравнения (1) к дифференциальному уравнению Фоккера—Планка

$$\frac{df}{dt} = -\frac{\partial}{\partial N} \{ [N(\alpha - \beta x(\omega)N) + I_{\text{сп.}}] f \} + \frac{\partial^2}{\partial N^2} \{ INf \}, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= A e^{-\left(\frac{\Omega+\delta}{k\bar{\nu}}\right)^2} - B e^{-\left(\frac{\Omega-\delta}{k\bar{\nu}}\right)^2} - C, \quad \beta = (A-B) e^{-\left(\frac{\Omega}{k\bar{\nu}}\right)^2} \\ A &= \frac{2\sqrt{\pi}}{k\bar{\nu}} g^2 N_m^0, \quad B = \frac{2\sqrt{\pi}}{k\bar{\nu}} g^2 N_n^0, \quad x(\omega) = \frac{g^2}{2\Gamma^2} \chi^{-1}(\omega), \\ I_{\text{сп.}} &= A e^{-\left(\frac{\Omega+\delta}{k\bar{\nu}}\right)^2}, \quad 2I = A e^{-\left(\frac{\Omega+\delta}{k\bar{\nu}}\right)^2} + B e^{-\left(\frac{\Omega-\delta}{k\bar{\nu}}\right)^2} + C. \end{aligned}$$

Физический смысл коэффициентов, входящих в уравнение (5), более чем прозрачен. В круглых скобках стоит коэффициент усиления в приближении слабого насыщения; $I_{\text{сп.}}$ — интенсивность спонтанного излучения, деленная на $\hbar\omega$; $2IN$ — коэффициент диффузии. В обычных условиях $\alpha \ll I$ и $I = I_{\text{сп.}}$. Можно показать, что только при наличии такого неравенства замена уравнения (1) уравнением (5) справедлива для всех отрезков времени. В этом случае стационарное решение уравнения (5) имеет вид [7]

$$f(N) = C \exp \left\{ - \left[N - \frac{\alpha}{\beta x(\omega)} \right]^2 / 2\sigma_0^2 \right\}, \quad (6)$$

где

$$\sigma_0^2 = \frac{I}{\beta x(\omega)}, \quad C = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma_0} [1 + \Phi(z)]^{-1}, \quad z = \frac{\alpha}{\sqrt{2I\beta x(\omega)}},$$

$\Phi(z)$ — интеграл вероятности.

Среднее число фотонов $\langle n \rangle$ и дисперсия σ^2 соответственно равны

$$\langle n \rangle = \frac{\alpha}{\beta x} \left\{ 1 + \frac{\exp(-z^2)}{\sqrt{\pi} z [1 + \Phi(z)]} \right\}, \quad (7)$$

$$\sigma^2 = \frac{I}{z^2} - \left(\langle n \rangle - \frac{\alpha}{\beta x} \right) \langle n \rangle. \quad (8)$$

В интересующем нас случае расстройка частоты генерации от частоты атомного перехода много меньше доплеровской ширины линии. Разлагая в выражениях для коэффициентов α, β экспоненту в ряд по степеням малого параметра $(\Omega \pm \delta)/K\bar{\nu}$ и удерживая первые члены разложения, преобразуем формулы (7) и (8) при $z \gg 1$ к следующему виду:

$$(g^2/2\Gamma^2) \langle n \rangle = \chi(\omega) \left[\zeta - 1 - \left(\frac{\Omega + \Delta}{k\bar{\nu}} \right)^2 \right], \quad (9)$$

$$\sigma^2 = \frac{\langle n \rangle (\eta + 1)/2}{\zeta - 1 - \left(\frac{\Omega + \Delta}{k\bar{\nu}} \right)^2}. \quad (10)$$

Здесь $\zeta = (A-B)/C$, $\eta = (A+B)/C$, $\Delta = \delta(A+B)/(A-B)$.

Перейдем к интерпретации полученных результатов. Из формулы (9) видно, что зависимость среднего числа фотонов от частоты генерации в пренебрежении тонкой структурой описывается параболической за-

висимостью до тех пор, пока выражение в квадратных скобках положительно. При расстройках, выходящих за пределы, когда $\langle n \rangle > 0$, генерация срывается, и стационарного решения нет [2]. На параболическую зависимость накладывается тонкая структура [2] (лэмбовский провал), форма которого описывается функцией $\chi(\omega)$. Как видно из формулы (4), отдача приводит к расщеплению лэмбовского провала на два, вообще говоря, асимметричных. Появление двух провалов связано с тем, что беннетовские провалы в неравновесном распределении атомов по скоростям на верхнем уровне в поле стоячей волны сдвинуты относительно соответствующих им пиков в распределении по скоростям атомов на нижнем уровне на 2δ из-за явления отдачи. Провал в мощности генерации возникает, когда уменьшается число атомов, активно взаимодействующих с полем. Такое явление теперь наблюдается при двух расстройках $\Omega = \pm \delta$, когда совпадают пикки (провалы) в неравновесных распределениях по скоростям, образованные электромагнитными волнами, бегущими вдоль оси генератора [1]. Естественно ожидать, что глубины провалов определяются при этом относительными временами взаимодействия атома с полем излучения для соответствующих уровней, т. е. величинами τ_m/τ и τ_n/τ . При $\delta \geq \Gamma$ и $\tau_m \neq \tau_n$ лэмбовский провал приобретает асимметрию и удвоится, что и отражено в формуле (9). Для когерентных состояний дисперсия чисел фотонов прямо пропорциональна среднему числу их. Поэтому в зависимости дисперсии от частоты должны наблюдаться минимумы, соответствующие минимумам в зависимости среднего числа фотонов от частоты генерации. Из формулы (10) это отчетливо видно. Следовательно, зависимость дисперсии от частоты генерации также имеет тонкую структуру.

Экспериментально легко наблюдается зависимость мощности генерации от частоты резонатора, а не от частоты генерации. Нетрудно установить между ними определенное соотношение. Частота генерируемого излучения ω может быть определена из требования, чтобы изменение фазы поля при двукратном прохождении резонатора было кратно 2π

$$\frac{\omega}{c} 2(l_p - l) + \frac{\omega}{c} l(n^+ + n^-) = 2\pi m = 2l_p \frac{\omega_p}{c}. \quad (11)$$

Здесь l_p — длина резонатора, l — длина активной среды, ω_p — собственная частота резонатора, m — целое число, n^\pm — действительные части коэффициентов преломления для прямой и обратной волн

$$n^\pm = 1 + \frac{4\pi\bar{N}}{E_0} \langle f_{nm} \rangle D_{mn}, \quad (12)$$

\bar{N} — плотность атомов активной среды, $\langle f_{nm} \rangle$ — недиагональный элемент матрицы плотности, усредненный по максвелловскому распределению атомов по скоростям. Из формулы (5)–(8) работы [5], а также из формул (9), (11), (12) следует, что при $|\Omega| \ll k\bar{v}$

$$\Omega_p = \Omega + \frac{\Delta'\omega_p}{2} \left[\frac{2\zeta}{\sqrt{\pi}} \frac{\Omega + \Delta}{k\bar{v}} - (\zeta - 1) \alpha(\Omega) \right], \quad (13)$$

где $\Delta'\omega_p$ — ширина резонансной кривой интерферометра,

$$\alpha(\Omega) = \tau\Gamma\chi_0(\Omega) \left[\frac{\zeta_m}{\tau} \frac{\Gamma(\Omega + \delta)}{\Gamma^2 + (\Omega + \delta)^2} + \frac{\zeta_n}{\tau} \frac{\Gamma(\Omega - \delta)}{\Gamma^2 + (\Omega - \delta)^2} + \frac{\Gamma_m \zeta_n}{\Gamma_m \tau} \text{Im} I(\Omega) \right],$$

$$\chi_0^{-1}(\Omega) = \Gamma\tau \left[1 + \frac{\zeta_m}{\tau} \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + (\Omega + \delta)^2} + \frac{\zeta_n}{\tau} \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + (\Omega - \delta)^2} - \frac{\Gamma_m \zeta_n}{\Gamma_m \tau} \text{Re} I(\Omega) \right],$$

$$I(\Omega) = \frac{\Gamma}{2\delta} \left[\text{arc tg} \frac{2\delta}{\Gamma} + \text{arc tg} \frac{\Omega + \delta}{\Gamma} - \text{arc tg} \frac{\Omega - \delta}{\Gamma} \right] +$$

$$+ i \frac{\Gamma}{2\delta} \left[\ln(1 + 4\delta^2/\Gamma^2) + \ln \frac{(\Omega - \delta)^2 + \Gamma^2}{(\Omega + \delta)^2 + \Gamma^2} \right].$$

Первый член в квадратных скобках формулы (13) описывает известное явление «затягивания» частоты генерации от собственной частоты резонатора к центру атомной линии с учетом сдвига Δ . Второй член в пределе $\delta=0$ описывает «отталкивание» частоты генерации от частоты перехода к частоте резонатора, пропорциональное величине относительного превышения порога генерации. Характер отталкивания частоты пол-

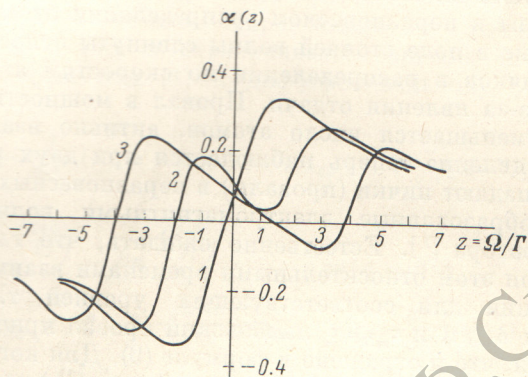


Рис. 1. Графики функции $\alpha(\Omega)$ при $\tau_m/\tau=2/3$, $\tau_n/\tau=1/3$, $\gamma_{mn}=0$ и различных δ/Γ .
1 — $\delta/\Gamma=0.2$, 2 — 1, 3 — 4.

ностью определяется функцией $\alpha(\Omega)$. Как видно из приведенных на рис. 1, 2 графиков, структура последней находится в согласии с обычной связью между действительным и мнимым значениями показателя преломления [ср. с формулой (4)]. На рис. 1 показано, как с ростом отношения δ/Γ кривая $\alpha(\Omega)$ становится асимметричной и при $\delta/\Gamma \sim 1$ имеет уже два максимума (минимума). При дальнейшем увеличении отношения δ/Γ

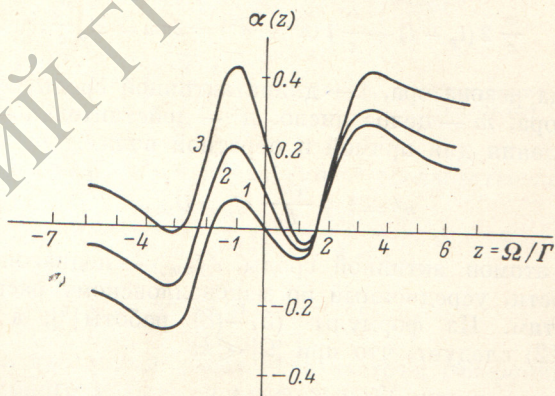


Рис. 2. Графики функции $\alpha(\Omega)$ при $\tau_m/\tau=1/2$, $\tau_n/\tau=0.5$, $\delta/\Gamma=1$ и различных γ_{mn}/Γ .
1 — $\gamma_{mn}/\Gamma=0$, 2 — 0.5, 3 — 1.

кривая $\alpha(\Omega)$ пересекает положительную полуось абсцисс. Это означает, что с ростом Ω явление отталкивания плавно переходит в затягивание, и наоборот. Кривые на рис. 2 иллюстрируют влияние спонтанных процессов на контрастность особенностей на кривой $\alpha(\Omega)$. Отметим, что формула (13) при $\gamma_{mn}=0$ совпадает с аналогичной формулой в работе [4].

Сейчас нет газовых генераторов, для которых $\delta \geq \Gamma$. При создании такого генератора, по-видимому, придется использовать для образования инверсной заселенности молекул излучение от другого когерентного источника. Другой путь — генератор с поглощающей ячейкой. Обобщение теории в этом направлении не сложно [1], и мы на нем не останавливаемся.

Литература

- [1] А. П. Кольченко, С. Г. Раутиан, Р. И. Соколовский. ЖЭТФ, 55, 1864, 1968.
- [2] У. Лэмб. Сб. «Квантовая оптика и квантовая радиофизика». Изд. «Мир». М., 1966.
- [3] П. А. М. Дирак. Принципы квантовой механики. Физматгиз, М., 1960.
- [4] D. M. Kim, M. O. Scully, W. E. Lamb, J. r. Phys. Rev., A, 2, 2534, 1970.
- [5] Ф. А. Воробьев, С. Г. Раутин, Р. И. Соколовский. Опт. и спектр., 27, 728, 1969.
- [6] M. O. Scully, W. E. Lamb, J. r. Phys. Rev., 159, 208, 1967.
- [7] Е. В. Бакланов, С. Г. Раутиан, Б. И. Трошин, В. П. Чеботаев. ЖЭТФ, 56, 1120, 1969.

Поступило в Редакцию 8 октября 1973 г.

ДЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. Скорин