Кафедра высшей математики

Бураковский В.В.

Текст лекций по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов 2 курса экономического факультета

Глава 1 Теория вероятностей

Введение

Возникновение теории вероятностей относят к XVII веку и связывают с решением комбинаторных задач теории азартных игр и потребностями страхового дела. Азартные игры и страхование являются классическими примерами вероятностных экспериментов. Именно азартные игры дали стимул для построения математических моделей игровых ситуаций. Эти модели представляли возможность игроку ориентироваться в ходе игры, делать расчет ставок, оценивать шансы выигрыша, а также позволяли планировать расходы и доходы страховых компаний и.т.д.

Эти модели начали разрабатывать в XVII веке Б.Паскаль, П.Ферма, Х.Гюйгенс. Основы классической теории вероятностей, которые сохранились и в настоящее время, были сформулированы в XVIII веке в работах Я.Бернулли, А.Муавра, П.Лапласа, С.Пуасона, К.Гаусса.

В 1933 г А.Н.Колмогоров опубликовал «Основные понятия теории вероятностей», в которой дал аксиоматическое построение теории вероятностей, основанной на теории множеств. Такое построение теории вероятностей сделало ее строгой математической наукой.

В это же время выделяется новая дисциплина—математическая статистика, которая имеет в настоящее время огромное прикладное значение. Она применяется в экономике, технике, социологии, физике и т.д. От ТВ отделились новые математические дисциплины: теория случайных процессов, теория массового обслуживания, теория планирования экспериментов. Сейчас они бурно развиваются.

П.1.1. Вероятностный эксперимент. Предмет и задачи теории вероятностей.

Результаты любого эксперимента в той или иной степени зависят от комплекса условий S, при которых данный эксперимент производится. Эти условия либо объективно существуют, либо создаются искусственно (т.е. производится планирование эксперимента).

По степени зависимости результатов эксперимента от условий, при которых он производился, все эксперименты можно разделить на два класса: детерминированные и вероятностные.

- **Детерминированные эксперименты—**это эксперименты, результаты которых можно предвидеть заранее на основании естественнонаучных законов исходя из данного комплекса условий S.

Примером детерминированного эксперимента является определение ускорения, получаемого телом массы m под воздействием силы F, т.е.. Искомая величина однозначно определяется комплексом условий эксперимента (т.е. $a = \frac{F}{m}$ массой тела m и силой F).

Детерминированными являются, например, все процессы, основанные на использовании законов классической механики, согласно которым движение тела однозначно определяется заданными начальными условиями и силами, действующими на тело.

- **Вероятностные эксперименты (стохастические или случайные)—** эксперименты, которые можно повторять произвольное число раз при соблюдении одних и тех же стабильных условий, но, в отличие от детерминированного, исход вероятностного эксперимента неоднозначен, случаен. Т.е. нельзя заранее на основании комплекса условий S предвидеть результат вероятностного эксперимента. Однако, если вероятностный эксперимент повторять многократно при одних и тех же условиях, то совокупность исходов таких экспериментов подчиняется определенным закономерностям. Изучением этих закономерностей (а точнее их математических моделей) и занимается теория вероятностей. Приведем несколько примеров вероятностных экспериментов, которые в дальнейшем будем называть просто экспериментами.

<u>Пример 1</u>

Пусть эксперимент заключается в однократном подбрасывании симметричной монеты. Этот эксперимент может закончиться одним из исключающих друг друга исходов: выпадение герба или решетки (решки). Если точно знать начальные скорости поступательного и вращательного движения и начальное положение монеты в момент броска, то можно предвидеть результат этого эксперимента по законам классической механики. Т.е. он был бы детерминированным. Однако исходные данные эксперимента не могут быть зафиксированными и постоянно изменяются. Поэтому говорят, что результат эксперимента неоднозначен, **случаен**. Тем не менее, если будем подбрасывать одну и ту же симметричную монету многократно по достаточно длинной траектории, т.е. по возможности сохраним стабильными некоторые условия эксперимента, то совокупное число его исходов подчиняется определенным закономерностям: относительная частота выпадения герба $\frac{m_1}{n} \approx \frac{m_2}{n}$, частоте выпадение бросков (n—число бросков, m_1—число выпадений герба, m_2—решки).

<u>Пример 2</u>

Предположим, что мы заполняем карточку спортлото. До проведения тиража выигрышей невозможно предсказать, сколько номеров будет правильно угадано. Однако опыт проведения тиража спортлото говорит о том, что средний процент игроков, угадавших m ($1 \le m \le 6$) номеров, колеблется около некоторой постоянной величины. Эти «закономерности» (средний процент правильного угадывания данного количества номеров) используются для расчета фондов выигрыша.

Вероятностные эксперименты имеют следующие общие черты: **непредвиденность результата; наличие определенных количественных закономерностей при их многократном повторении при одинаковых условиях; множество возможных исходов.**

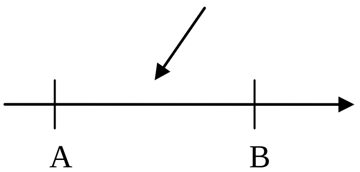
- **Предметом теории вероятностей** является количественный и качественный анализ математических моделей вероятностных экспериментов, называемый статической обработкой экспериментальных данных.
- **Теория вероятностей—**наука, занимающаяся анализом математических моделей для принятия решений в условиях неопределенности.

1.2. События и операции над ними.
Относительные частоты и их свойства

Первичным понятием теории вероятностей, неопределяемым через другие понятия, является пространство элементарных исходов Ω. Обычно в качестве пространства элементарных исходов берутся единственно возможные неразложимые результаты эксперимента.

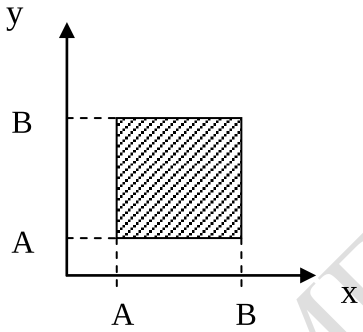
Пример

1. Предположим, что бросается симметричная монета. Тогда $\Omega=\{г, р\}$ (герб и решка).
2. Игральная кость $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.
3. Бросаются две монеты $\Omega=\{\{г,г\}\{р,р\}\{г,р\}\{р,г\}\}$.
4. Бросаются две игральных кости $\Omega=\{(i, j)\,|\,i\in\{1,2,3,4,5,6\},\ j\in\{1,2,3,4,5,6\}\}$. Число элементарных исходов 36.
5. На [AB] числовой оси w бросается наудачу точка. $\Omega=[AB]$



6. На [AB] бросаются две точки $\Omega=\{(x, y)\,|\,x\in[AB], y\in[AB]\}=[AB]\times[AB]$.

В



<u>**Определение.**</u> **Событием** называется произвольное подмножество А пространства элементарных исходов Ω. Те элементарные исходы, из которых состоит событие А, называются <u>благоприятствующими</u> событию А.

Говорят, что событие А произошло, если в результате эксперимента происходит элементарный исход $w\in A$, т.е. благоприятствующий событию А.

Рассмотрим пример 2. $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, $A=\{1,3,5\}$ –событие, состоящее в выпадении нечетного числа очков; $B=\{2,4,6\}$ –событие, состоящее в выпадении четного числа очков.

- Все пространство элементарных исходов Ω, если взять в качестве события, называют <u>достоверным</u> событием, поскольку оно происходит в любом эксперименте (всегда).
- Пустое множество $\varnothing$ (т.е. множество, которое не содержит ни одного элементарного исхода) называется <u>невозможным</u> событием, поскольку оно никогда не происходит.

Все остальные события, кроме Ω и $\varnothing$, называются <u>случайными.</u>

Операции над событиями

0.1<u>Суммой</u> событий A и B называется объединение этих множеств A⋃B.

$w \in A \bigcup B \Leftrightarrow w \in A$ или $w \in B$.

$A \bigcup B$–событие, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из событий A или B.

0.2<u>Произведением</u> событий A и B называется пересечение множеств A и B, т.е. A⋃B. Обозначается как AB.

AB–событие, когда A и B происходят одновременно.

$w \in A \bigcup B \Leftrightarrow w \in A$ и $w \in B$.

0.3<u>Разностью</u> событий A и B называется разность множеств A\B.

A\B–событие, которое происходит <=>, когда происходит A и не происходит B.

$w \in A \setminus B <=> w \in A$ и $w \notin B$.

o События A и B называются **несовместимыми**, если $A \cdot B = \varnothing$. Если A и B несовместимы, то будем обозначать $A \bigcup B = A + B$.

o Говорят, что событие A влечет событие B, если A является подмножеством B, т.е. $A \subset B$ (когда происходит A, происходит B).

$A = \{w_2, w_4\}, B = \{w_2, w_4, w_6\}, A \subset B$.

o Событие $\overline{A} = \Omega \setminus A$ называется <u>противоположным</u> к событию A.

Пример 2. $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}, A = \{1,3,5\}, \overline{A} = \{2,4,6\}$. $\overline{A}$ происходит тогда, когда A не происходит.

o Говорят, что события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ <u>образуют полную группу</u>, если $H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega$ (т.е. H_1, H_2, H_n–несовместимы, т.е. $H_i H_j = \varnothing$, если $i \neq j$).

Например, A и $\overline{A}$ образуют полную группу: $A + \overline{A} = \Omega$.

Предположим, что производится некоторый случайный эксперимент, результат которого описывается пространством Ω. Произведем N экспериментов. Пусть A—некоторое событие ($A \subset \Omega$), N(A)—число тех экспериментов, в которых произошло событие A.

Тогда число $\mu(A) = \dfrac{N(A)}{N}$ называется **относительной частотой события A.**

Свойства относительных частот

<u>**Свойство 1.**</u> Относительная частота произвольного события A. $\mu(A) \geq 0. \quad (\forall A \subset \Omega)$.

<u>**Свойство 2.**</u> Относительная частота достоверного события равна 1. $\mu(\Omega) = \dfrac{N(\Omega)}{N} = \dfrac{N}{N} = 1$.

<u>**Свойство 3.**</u> **(Аддитивность)** Относительная частота суммы несовместимых событий

$$\mu(A+B) = \frac{N(A+B)}{N} = \frac{N(A)+N(B)}{N} = \frac{N(A)}{N} + \frac{N(B)}{N} = \mu(A) + \mu(B)$$

2. Аксиомы теории вероятностей

Пусть Ω—пространство элементарных исходов. Предположим, что F—некоторый класс подмножеств Ω.

o Событие—это подмножество Ω, принадлежащее классу F. Любому $A \in F$ ставится в соответствие действительное число P(A), называемое **<u>вероятностью А</u>**, так что при этом выполняется аксиомы:

Аксиома 1. $\forall A \in F \;\; P(A) \geq 0$

Аксиома 2. $P(\Omega) = 1$, т.е. вероятность достоверного события равна 1.

Аксиома 3. (счетной аддитивности) Если $A_1, A_2, \ldots \in F$ и $A_i A_j = \varnothing (i \neq j)$, то $P(A_1 + A_2 + \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (для несовместимых событий).

3 Дискретные пространства элементарных исходов. Классическое определение вероятности

o Бесконечное множество называется **счетным**, если элементы этого множества можно занумеровать числами натурального ряда (натуральными числами).

Все другие бесконечные множества называются **несчетными**. Примером несчетного множества может служить [a,b], счетного N.

o Пространство элементарных исходов называется **дискретным**, если оно конечно или счетно, т.е. $\Omega = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ или $\Omega = \{w_1, w_2 ...\}$.

Любому элементарному исходу $\forall w_i$ ставится в соответствие число $p(w_i) \geq 0$, так что при этом $\sum\limits_{w_i \in \Omega} p(w_i) = 1$. Т.е. $\forall w_i \in \Omega \rightarrow p(w_i) \geq 0$.

o Вероятностью события А называется число $P(A) = \sum\limits_{w_i \in A} p(w_i)$.

<u>Пример.</u> Бросаем игральную кость $\Omega = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$—дискретное пространство элементарных исходов. $P(\Omega) = 1$. P (выпадает нечетное количество очков)= $P(\{w_1, w_3, w_5) = p(w_1) + p(w_3) + p(w_5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Сделаем следующие предположения:

1. Пространство элементарных исходов $\Omega = \{w_1, ..., w_n\}$—конечно.
2. Все элементарные исходы равновозможны (равновероятны), т.е. $p(w_1) = p(w_2) = ... = p(w_n)$. Тогда получим $p(w_1) + p(w_2) + ... + p(w_n) = 1$, т.к. слагаемые равны, то имеем $n \cdot p(w_i) = 1$, т.е. $p(w_i) = \frac{1}{n}$, где $i \in \{1,2,...,n\}$.

Рассмотрим некоторые события $A = \{w_{i1}, w_{i2}, ..., w_{i_k}\}$, где k≤n. Вероятность события А.

$$P(A) = \sum_{l=1}^{k} p(w_{il}) = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n} = \frac{k}{n}}_{k\_раз}$$

o Если пространство элементарных исходов конечно, а все элементарные исходы равновероятны, то вероятностью события А называется отношение числа элементарных исходов, благоприятствующих событию A к общему числу элементарных исходов: $P(A)=\dfrac{k}{n}$.

Это классическое определение вероятности.

Примеры:

1. Бросается игральная кость. Какова вероятность выпадения нечетного числа очков?

$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, n=6; $A=\{1,3,5\}$, k=3; $P(A)=\dfrac{k}{n}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$.

2. Бросаются две монеты. Какова вероятность того, что хотя бы на одной выпадет герб?

$\Omega=\{(г,г),(г,р),(р,г),(р,р)\}, n=4$, $A=\{(г,г),(г,р),(р,г)\}, k=3$, $P(A)=\dfrac{3}{4}$.

3. Бросаются две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков равна семи?

$\Omega=\{(i,j)\mid i,j\in\{1,2,3,4,5,6\}\}$, n=36;

$A=\{(6,1),(5,2),(4,3),(3,4),(2,5),(1,6)\}$, k=6;

$P(A)=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$.

4. Элементы комбинаторики

Лемма 1. Из m элементов $a_1,\ldots,a_m$ первой группы и n элементов $b_1,\ldots,b_n$ второй группы можно составить ровно m·n упорядоченных пар вида (a_i, b_j), содержащих по одному элементу из каждой группы.

Доказательство:

$$m\_строк\left\{\begin{array}{l}(a_1,b_1),(a_1,b_2),\ldots,(a_1,b_n)\ все\_пары\_содержат\_a_1\\(a_2,b_1),(a_2,b_2),\ldots,(a_2,b_n)\ все\_пары\_содержат\_a_2\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\\underbrace{(a_m,b_1),(a_m,b_2),\ldots,(a_m,b_n)\ все\_пары\_содержат\_a_m}_{n\_столбцов}\end{array}\right.$$

Всего имеем m·n пар.

Пример. В колоде 4 масти (черва, пика, трефа, бубна), в каждой масти по 9 карт. Итого n=4·9=36.

Лемма 2. Из n_1 элементов первой группы $a_1, a_2,\ldots, a_{n1}$,
n_2 элементов второй группы $b_1, b_2,\ldots, b_{n2}$,
n_3 элементов k-ой группы $x_1, x_2,\ldots, x_{nk}$

можно составить ровно $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ различных упорядоченных комбинаций вида $(a_{j_1}, b_{j_2}, ..., x_{j_k})$, содержащих по одному элементу из каждой группы.

1. При k=2 утверждение выполняется (Лемма 1).
2. Предположим, что Лемма 2 выполняется для k. Докажем для k+1 группы элементов $y_1, y_2, ..., y_{n_{k+1}}$. Рассмотрим комбинацию $(a_{j_1}, b_{j_2}, ..., x_{j_k}, y_{j_{k+1}})$ как $(a_{j_1}, b_{j_2}, ..., x_{j_k})$ и $y_{j_{k+1}}$. Предположение дает возможность вычислить число комбинаций из k элементов, их $n_1\ n_2\ n_k$. По Лемме 1 число комбинаций из k+1 элементов $n_1\ n_2 \ldots\ n_{k+1}$.

Пример. При бросании двух игральных костей N=6·6=36. При бросании трех костей N=6·6·6=216.

Леммы 1 и 2 называются основными правилами комбинаторики.

Пусть имеется множество из n элементов a_1, a_2 ,a_n. Будем рассматривать выборку объема k $(a_{j_1}, a_{j_2}, ..., a_{j_k})$ из n элементов. Все выборки можно классифицировать по 2 признакам:

1. упорядоченные и неупорядоченные.
2. с возвращением и без возращения.

Если выборка упорядоченная, то выборки с одним и тем же составом выбранных элементов, но разным порядком элементов в выборках, считаются различными.

Если выборка считается неупорядоченной, то все выборки с одним и тем же составом элементов отождествляются.

Пример. Возьмем множество из трех элементов {1,2,3}. Выбираем k=2.

(1,1);(1,2);(1,3); (2,1);(2,2);(2,3); (3,1);(3,2);(3,3);	(1,1);(1,2);(1,3); (2,2);(2,3); (3,3);	С возвращением
(1,2);(1,3); (2,1);(2,3); (3,1);(3,2);	(1,2);(1,3); (2,3);	Без возвращения
упорядоченная	неупорядоченная	выборка

Составим общую таблицу числа выборок:

n^k	C_{n+k-1}^k	С возвращением
A_n^k	C_n^k	Без возвращения
упорядоченная	Неупорядоченная	Выборка

Упорядоченная выборка с возвращением $(a_{j_1}, a_{j_2}, ..., a_{j_k})$. Каждый элемент выборки может принимать n значений, т.е. число выборок $\underbrace{n \cdot n \cdot ... \cdot n}_{k} = n^k$.

Упорядоченная выборка без возвращения $n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1) = A_n^k$.

- Упорядоченная выборка без возвращения называется <u>размещением</u>. Число размещений $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

<u>Пример.</u> В лифт 12-этажного дома зашли 3 человека. Найти вероятность того, что все вышли на разных этажах.

$\Omega = \{(i_1, i_2, i_3) \mid i_1, i_2, i_3 \in \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}\}$. n=$11^3$.

$$A_{11}^3 = \frac{11!}{3!} = 9 \cdot 10 \cdot 11, \quad P(A) = \frac{9 \cdot 10 \cdot 11}{11^3} = \frac{9 \cdot 10}{11^2} = \frac{90}{121}.$$

- <u>Перестановкой</u> из k элементов называется совокупность этих же элементов, записанных в произвольном порядке.

P_k-число перестановок из k элементов. $P_k = A_k^k = \dfrac{k!}{(k-k)!} = k!$, поскольку 0!=1.

- Произвольное k-элементное подмножество множества n элементов называется <u>сочетанием</u> из n элементов по k элементов. Сочетание—это неупорядоченная выборка объема k из n элементов. Обозначается число всех сочетаний из n элементов по k элементов через C_n^k.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1)...(n-k+1)}{k!}. \quad \boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}}, \text{ где } k \in \{1,2,...,n\}.$$

$\boxed{0! = 1}$.

Свойства сочетаний:

1. $C_n^0 = C_n^n = 1$.
2. $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.
3. $C_n^k = C_n^{n-k}$.
4. $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$.

5. Геометрические вероятности

Предположим, что на числовой оси имеется некоторый отрезок [a,b] и на этот отрезок наудачу бросается точка. Найти вероятность того, что эта точка попадет на $[c,d] \subset [a,b]$.

$\boxed{P(w \in [c,d] = \dfrac{d-c}{b-a}}$—**геометрическая вероятность на прямой.**

Пусть плоская фигура g составляет часть плоской фигуры G. На фигуру G наудачу брошена точка. Вероятность попадания точки в фигуру g определяется равенством:

$$\boxed{P(w \in g) = \frac{площадь\_g}{площадь\_G}}$$ — **геометрическая вероятность на плоскости.**

Пусть в пространстве имеется фигура v, составляющая часть фигуры V. На фигуру V наудачу брошена точка. Вероятность попадания точки в фигуру v определяется равенством:

$$\boxed{P(w \in v) = \frac{объем\_v}{объем\_V}}$$ — **геометрическая вероятность в пространстве.**

Недостатком классического определения вероятности является то, что оно неприменимо к испытаниям с бесконечным числом исходов. Для устранения этого недостатка и вводят <u>геометрические вероятности.</u>

6. Свойства вероятности

Свойство 1. Вероятность невозможного события равна 0, т.е. $P(\varnothing) = 0$. $P(\varnothing) = \frac{n_\varnothing}{n} = \frac{0}{n} = 0$.

Свойство 2. Вероятность достоверного события равна 1, т.е. $P(\Omega) = 1$, $P(\Omega) = \frac{n_\Omega}{n} = \frac{n}{n} = 1$.

Свойство 3. Для любого события $A: 0 \le P(A) \le 1$. $P(A) = \frac{n_A}{n}$, т.к. $0 \le n_A \le 1$, то $0 \le \frac{n_A}{n} \le 1$ и следовательно $0 \le P(A) \le 1$.

Свойство 4. Если события A и B несовместимы, то вероятность суммы равна сумме вероятностей:

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A+B) = \frac{n_A + n_B}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} = P(A) + P(B)$$

Свойство 5. (обобщенная теорема сложения вероятностей)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

$$P(A \cup B) = \frac{n_{A \cup B}}{n} = \frac{n_A + n_B - n_{AB}}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} - \frac{n_{AB}}{n} = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Свойство 6. (теорема сложения k слагаемых)

Если события A_1, A_2,…, A_k попарно несовместимы, то

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_k) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_k).$$

Свойство 7. Если $A \subset B$ (A влечет B), то $P(A) \le P(B)$.

$B = A + (B \setminus A)$**,** тогда $P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \ge P(A)$.

Свойство 8. Если $A \subset B$, то $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

$B = A + (B \setminus A)$. Следовательно, $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$. Тогда $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

Свойство 9. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

$\overline{A} = \Omega \setminus A$, $P(\overline{A}) = P(\Omega \setminus A) = P(\Omega) - P(A) = 1 - P(A)$.

Свойство 10. Если события H_1, H_2,…,H_k образуют полную группу, то $P(H_1) + P(H_2) + ... + P(H_k) = 1$.

Т.к. $H_1 + H_2 + ... + H_k = \Omega$, то по свойству 6:

$P(H_1) + P(H_2) + ... + P(H_k) = P(\Omega) = 1$

7. Условная вероятность. Независимость

○ **Условной вероятностью** события В при условии А называется вероятность события В в предположении, что событие А наступило. Обозначение $P(B \mid A)$, (реже $P_A(B)$). $P(B/A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$. $P(AB) = \dfrac{n_{AB}}{n} = \dfrac{n_{AB}}{n_A} \cdot \dfrac{n_A}{n} = P(A) \cdot P(B/A)$.

Теорема (умножение вероятностей):
$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)$.

Теорема (обобщенная теорема умножения).

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 \cdot A_2) \cdot ... \cdot P(A_n / A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_{n-1}).$$

Доказательство:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_{n-1} \cdot A_n) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_{n-1}) \cdot P(A_n / A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_{n-1}) =$$
$$= P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_{n-2}) \cdot P(A_{n-1} / A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_{n-2}) \cdot P(A_n / A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_{n-1}) = ... =$$
$$= P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 \cdot A_2) \cdot ... \cdot P(A_n / A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_{n-1}).$$

Пример. Студент знает 20 вопросов из 25, преподаватель задает 3 вопроса. Найти вероятность того, что студент знает все 3 вопроса.

А—событие, что студент знает все три вопроса.

A_1— знает первый вопрос;

A_2— знает второй вопрос;

A_3— знает третий вопрос;

$A = A_1 A_2 A_3$;

$$P(A) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_3) \cdot P(A_3 / A_1 A_2) = \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{23}{18} = \frac{57}{115} < \frac{1}{2}.$$

○ События А и В называются независимыми, если $P(AB) = P(A) \cdot P(AB)$.

Свойство. События А и В независимы тогда и только тогда когда P(B/A)=P(B).

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B).$$

Пусть P(B/A)=P(B), тогда $\dfrac{P(AB)}{P(A)} = P(B) \Rightarrow P(AB) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow$ А и В независимы.

Пример. Бросаются две симметричные монеты. Найти вероятность того, что на обоих монетах выпадут гербы.

$P(AB)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$. A–на первой монете герб, B–на второй монете герб. A и B независимы.

o События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются независимыми (или независимыми в совокупности), если

$P(A_iA_j)=P(A_i)\cdot P(A_j)$ (для $i\neq j$; $i,j\in\{1,2,3,\ldots,n\}$)–попарная независимость событий;

$P(A_i\cdot A_j\cdot A_k)=P(A_i)\cdot P(A_j)\cdot P(A_k)$, …,

$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n)$.

Можно показать, что из попарной независимости не вытекает независимость в совокупности.

8. Формулы полной вероятности и Байеса

Теорема 1. Если события H_1, $H_2,\ldots,H_n$ образуют полную группу, то вероятность любого события А можно вычислить по формуле полной вероятности:

$P(A) = P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)\cdot P(A/H_2) + \ldots + P(H_n)\cdot P(A/H_n)$, или

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A/H_i).$$

Так как события образуют полную группу, то можно записать $\Omega = H_1 + H_2 + \ldots + H_n$.

Событие А может произойти только с одним из событий H_i, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, то $A=AH_1+AH_2+\ldots+AH_n$. По теореме сложения вероятностей

$$P(A) = P(AH_1) + P(AH_2) + \ldots + P(AH_n) = P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)\cdot P(A/H_2) + \\ + \ldots + P(H_n)\cdot P(A/H_n)$$

Пример. Имеются 2 урны. В первой—3 белых и 5 черных шаров, во второй—4 белых и три черных. Из первой наудачу взят один шар и переложен во вторую урну. После этого из второй урны был извлечен наудачу шар. Какова вероятность, что он белый?

Событие А—из второй урны извлечен шар;

H_1—из первой урны во вторую переложен белый шар

H_2—из первой урны во вторую переложен черный шар.

$$H_1 + H_2 = \Omega$$

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = \frac{3}{8}\cdot\frac{5}{8} + \frac{5}{8}\cdot\frac{4}{8} = \frac{35}{64}.$$

Замечание: при применении формулы полной вероятности события $H_1,H_2,\ldots,H_n$, образующие полную группу, называются гипотезами.

Теорема 2. Пусть события H_1, H_2, …, H_n образуют полную группу, А–некоторое событие, причем $P(A)\neq 0$, тогда имеет место формула Байеса:

$$P(H_j \mid A) = \frac{P(H_j)P(A \mid H_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A \mid H_i)},\ (j \in \{1,2,3,\ldots,n\})$$

Доказательство: По теореме умножения вероятностей

$$P(AH_j) = P(A)\cdot P(A \mid H_j) = P(H_j)\cdot P(A \mid H_j).$$

Отсюда находим вероятность

$P(H_j \mid A) = \dfrac{P(H_j)\cdot P(A \mid H_j)}{P(A)}$. Остается в знаменателе подставить вместо

$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_j)\cdot P(A \mid H_j)$—формула полной вероятности.

Пример. Рассмотрим предыдущий пример с учетом того, что из второй урны вынули белый шар. Найти вероятность того, что из первой урны вынули белый шар. Нужно найти $P(H_1|A)$.

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A \mid H_1)}{P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2)} = \frac{\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8}}{\frac{35}{64}} = \frac{3}{7}.$$

$$P(H_2 \mid A) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}.$$

Замечание. При применении формулы Байеса вероятности $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$ называются априорными вероятностями гипотез. Вероятности $P(H_1|A),\ldots,P(H_n|A)$ называют апостериорными вероятностями гипотез.

9. Схема независимых испытаний Бернулли. Полиноминальное распределение

Предположим, что в результате испытания возможны два исхода: «У» и «Н», которые мы называем успехом и неудачей.

$P(У) = p$, $P(Н) = q$, p+q=1.

Предположим, что мы производим независимо друг от друга n таких испытаний.

o Последовательность n испытаний называется испытаниями Бернулли, если эти испытания независимы, а в каждом из них возможны два исхода, причем вероятности этих исходов не меняются от испытания к испытанию.

Элементарным исходом будет являться:

$(w_1, w_2, \ldots, w_n)$, $w_i \in \{У, Н\}$.

Всего таких исходов 2^n.

$\boxed{P(w_1, w_2, ..., w_n) = P(w_1) \cdot P(w_2) \cdot ... \cdot P(w_n)}$. **(1)**

Формула (1) показывает, что события независимы.

Обозначим через μ число успехов в n испытаниях Бернулли. $P_n(k) = P(\mu = k)$ — вероятность того, что в n испытаниях произошло k успехов. Рассмотрим событие

$$(\mu = k) = (\underbrace{У, У, ...У}_{k}, \underbrace{Н, Н, ...Н}_{n-k}) + (У, ...У, Н, У, Н, ..., Н) + ... + (\underbrace{Н, ..., Н}_{n-k}, \underbrace{У, ..., У}_{k}).$$

По теореме сложения получим

$$P(\mu = k) = P(У, У, .., У, Н, Н, .., Н) + P(У, У, .., У, Н, У, Н, ..., Н) + ... + P(Н, .., Н, У, .., У) =$$
$$= p^k q^{n-k} + p^k q^{n-k} + ... + p^k q^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Таким образом, получим

$\boxed{P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, k = 0,1,2,..., n}$ — формула Бернулли.

Пример. 2 шахматиста играют в шахматы. Оба шахматиста равны по силам. Что вероятнее выиграть одну партию из двух или две из четырех (ничьи во внимание не принимаются)?

$$p = q = \frac{1}{2},\ P_2(1) = C_2^1 \cdot (\frac{1}{2})^1 (\frac{1}{2})^1 = \frac{1}{2} = \frac{4}{8},\ P_4(2) = C_4^2 (\frac{1}{2})^2 (\frac{1}{2})^2 = 6 \cdot \frac{1}{16} = \frac{3}{8}.$$

$P_4(1) > P_4(2)$.

Полиномиальное распределение.

Предположим, что в результате испытания возможны k исходов $E_1, E_2, \ldots, E_k$, $P(E_i)=p_i$, $i=\overline{1,k}$. Тогда вероятность того, что в n независимых испытаниях событие E_1 появиться r_1 раз, E_2 – r_2 раз, …, E_k – r_k раз вычисляется по формуле:

$$P_n(r_1, r_2, \ldots, r_k) = \frac{n!}{r_1! r_2! \ldots r_k!} p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_k^{r_k}, \text{ где } \sum_{i=1}^{k} r_i = n, \ \sum_{i=1}^{k} p_i = 1.$$

Эта формула <u>полиномиальное распределения,</u> обобщающая формулу Бернулли.

10 Теорема Пуассона. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа.

Теорема. Если вероятность p появления события A в каждом испытании при неограниченном возрастании числа испытаний n изменяется таким образом, что некоторое событие A появится ровно k раз в n независимых испытаниях стремится к величине $\frac{a^k}{k!}e^{-a}$, то есть $P_n(k) \approx \frac{a^k}{k!}e^{-a}$.

Доказательство: По формуле Бернулли вероятность того, что событие появится ровно k раз в n независимых испытаниях

$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, где q=1-p.

Отсюда

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k q^{n-k} = \frac{(n-k+1)\cdot(n-k+2)\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n}{k!} \cdot (1-p)^{n-k} p^k.$$

По условию $a = n \cdot p \Rightarrow p = \frac{a}{n}$.

Подставляя, получим $P_n(k) = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \cdot \left(\frac{a}{n}\right)^k \cdot \left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-k} =$

$$= \frac{a^k}{k!} \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \left(1-\frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{k-1}{n}\right) \cdot \left(1-\frac{a}{n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{a}{n}\right)^{-k} =$$

$$= \frac{a^k}{k!} \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \left(1-\frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{k-1}{n}\right) \cdot \left[\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-\frac{n}{a}}\right]^{-a} \cdot \left(1-\frac{a}{n}\right)^{-k}$$

Перейдем к пределу при $n \to \infty$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k) = \frac{a^k}{k!} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right) \times \ldots \times$$

$$\times \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-k} \cdot \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-\frac{n}{a}}\right]^{-a} = \frac{a^k}{k!}e^{-a}.$$

$\boxed{P_n(k) \approx \frac{a^k}{k!}e^{-a}}$ — **формула Пуассона.**

Теоремой удобно пользоваться, когда p→0, $a = n \cdot p \le 10$. Существуют специальные таблицы, в которых приведены значения вероятностей для различных a и k.

Формулой Бернулли $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ удобно пользоваться, когда значение n не очень велико. Если же n достаточно велико, то удобнее пользоваться приближенными формулами, одна из которых содержится в следующей теореме.

Теорема (локальная теорема Муавра-Лапласа).

Если вероятность появления события А в каждом отдельном испытании постоянная и отлична от 0 и 1, т.е. 0<p<1, то вероятность того, что событие А появится ровно k раз в n независимых испытаниях.

$$\boxed{P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \varphi(x)}, \text{ где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}};\ x = \frac{k - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}, \text{ q=1-p.}$$

<u>Без доказательства.</u> Имеются специальные таблицы значений функций φ(x). Нужно учитывать, что функция φ(x)–четная, т.е. φ(x)=φ(-x).

<u>Пример.</u> Пусть вероятность появления события А в каждом отдельном испытании p=0,8. Найти вероятность того. Что событие А появится 75 раз в 100 независимых испытаниях. (k=75, n=100.).

По формуле Бернулли

$P_{100}(75) = C_{100}^{75} 0{,}8^{75} 0{,}2^{25}$–неудобно.

Воспользуемся теоремой Муавра-Лапласа:

$$x = \frac{75 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -\frac{5}{4} = -1{,}25.$$

Значение функции φ(-1,25)=φ(1,25)=0,1826 (по таблице). Тогда искомая вероятность: $P_{100}(75) = \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} \cdot 0{,}1826 = 0{,}04565.$

Теорема (интегральная теорема Муавра-Лапласа).

Если вероятность появления события А в каждом отдельном испытании постоянна и отлична от 0 и 1, т.е.0<p<1, то вероятность того, что событие А появится от k_1 до k_2 раз в n независимых испытаниях определяется выражением:

$P_n(k_1, k_2) \approx \phi(x_2) - \phi(x_1)$, где

$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$—функция Лапласа,

$x_1 = \frac{k_1 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$, $x_2 = \frac{k_2 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$, $q = 1 - p$.

<u>Без доказательства.</u>

Функция Лапласа—нечетная, т.е. $\phi(-x) = -\phi(x)$. Значения находят по таблице.

<u>Пример.</u> Пусть вероятность появления события А P(A) в каждом отдельном испытании равна 0,8. Найдем вероятность того, что событие А появится более 69 раз в 100 независимых испытаниях.

n=100

p=0,8 $\qquad x_1 = \frac{k_1 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} = \frac{70 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -\frac{10}{4} = -2{,}5.$

q=0,2

k_1=70 $$x_2 = \frac{k_2}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} = \frac{100 - 100 \cdot 0{,}2}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{20}{4} = 5.$$

k_2=100

$$\phi(-2{,}5) = -\phi(2{,}5) = -0{,}4938; \ \ \phi(5) = 0{,}5$$

$$P_{100}(70{,}100) = \phi(5) - \phi(-2{,}5) = 0{,}5 + 0{,}4938 = 0{,}9938.$$

11. Случайные величины

○ **Случайной величиной X** называется функция X(w), отображающая пространство элементарных исходов Ω во множестве действительных чисел R.

Пример. Пусть дважды подбрасывается монета. Тогда $\Omega = \{w_i, i = 1{,}2{,}3{,}4 / (г,г),(г,р),(р,г),(р,р)\}$.

Рассмотрим случайную величину X–число выпадений герба на пространстве элементарных исходов Ω. Множество возможных значений случайной величины:2,1,0.

w	(г,г)	(г,р)	(р,г)	(р,р)
X(w)	2	1	1	0

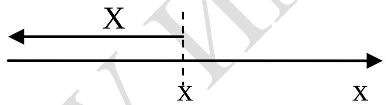
Множество значений случайной величины обозначается Ω_x. Одной из важных характеристик случайной величины является функция распределения случайной величины.

○ **Функцией распределения случайной величины X** называется функция F(x) действительной переменной x, определяющая вероятность того, что случайная величина X примет в результате эксперимента значение, меньшее некоторого фиксированного числа x.

$$F(x) = P\{X < x\} = P\{x \in]-\infty; x[\}.$$

$$0 \le F(x) \le 1.$$

Если рассматривать X как случайную точку на оси ox, то F(x) с геометрической точки зрения—это вероятность того, что случайная точка X в результате реализации эксперимента попадет левее точки x.



Свойства функции распределения.

Свойство 1. Функция распределения F(x)–неубывающая функция, т.е. для $\forall x_1, x_2$ таких что $x_1<x_2$ $F(x_1) \le F(x_2)$.

Пусть x_1 и x_2 принадлежат множеству Ω_x и $x_1<x_2$.Событие, состоящее в том, что X примет значение, меньшее, чем x_2, т.е. $-\infty \le X < x_2$, представим в виде объединения двух несовместимых событий

$$\{-\infty < X < x_2\} = \{-\infty < X < x_1\} + \{x_1 \le X < x_2\}.$$

Тогда по теореме сложения вероятностей получим

$P(-\infty < X < x_2) = P(-\infty < X < x_1) + P(x_1 \le X < x_2)$, т.е.

$F(x_2) = F(x_1) + P(x_1 \le X < x_2)$. Поскольку $P(x_1 \le X < x_2) \ge 0$, то

$F(x_2) \geq F(x_1)$.

Свойство 2. Для любых $x_1, x_2, x_1 < x_2$ $P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

Замечание. Если функция распределения F(x) непрерывная, то свойство выполняется и при замене знаков ≤ и < на < и ≤.

Свойство 3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \leftarrow +\infty} F(x) = 1$.

$F(-\infty) = P(x < -\infty) = P(\varnothing) = 0$, $F(+\infty) = P(x < +\infty) = P(\Omega) = 1$.

Свойство 4. Функция F(x) непрерывна слева. (т.е. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$).

Свойство 5. Вероятность того, что значение случайной величины X больше некоторого числа x, вычисляется по формуле.
$P\{X \geq x\} = 1 - F(x)$**.**

Достоверное событие {-∞<x<+∞} представим в виде двух несовместимых событий. $\{-\infty < X < +\infty\} = \{-\infty < X < x\} + \{x \leq X < +\infty\}$. Найдем их вероятности
$P(-\infty < X < +\infty) = P(-\infty < X < x) + P(x \leq X < +\infty)$.

Поскольку вероятность достоверного события равна единице, то
$1 = F(x) + P(X \geq x)$. Отсюда $P(X \geq x) = 1 - F(x)$.

12. Дискретные случайные величины.

o Случайная величина X называется дискретной, если она принимает конечное либо счетное число значений, т.е. Ωx—конечно или счетно.

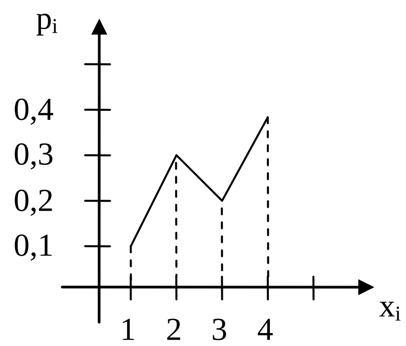
o Законом распределения дискретной случайной величины X называется совокупность пар чисел вида (x_i, p_i), где x_i—возможные значения случайной величины, а p_i—вероятности, с которыми случайная величина принимает эти значения, т.е. $p_i = P(X = x_i)$, причем $\sum\limits_i p_i = 1$.

Простейшей формой задания дискретной случайной величины является таблица, в которой перечислены возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности.

X	x_1	x_2	…	x_n	…
P	p_1	p_2	…	p_n	…

Такая таблица называется рядом распределения дискретной случайной величины.

Ряд распределения можно изобразить графически. В этом случае по оси абсцисс откладывают значения x_i, а по оси ординат—вероятности p_i. Полученные точки соединяют отрезками и получают ломаную, которая является одной из форм задания закона распределения дискретной величины.



Пример. Рассмотрим следующую дискретную случайную величину

X	1	2	3	4
P	0,1	0,3	0,2	0,4

○ Говорят, что дискретная случайная величина X имеет <u>биномиальное</u> распределение с параметрами (n,p), если она может принимать целые неотрицательные значения $k \in \{1,2,3,...,n\}$ с вероятностями $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

X	0	1	…	K	…	n
P	$(1-p)^n$	$n \cdot p \cdot (1-p)^{n-1}$	…	$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	…	p^n

<u>Пример.</u> μ—число успехов в n испытаниях. μ имеет биномиальное распределение с параметрами (n,p). Обозначают X~B (n,p), т.е. случайная величина X имеет биномиальное распределение с параметрами (n,p).

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1$$

○ Говорят, что случайная величина X имеет распределение Пуассона с параметром λ (λ>0), если она принимает целые неотрицательные значения $k \in \{0,1,2,...\}$ с вероятностями $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

X	0	1	…	k	…
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	…	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	…

Обозначают $X \sim \Pi(\lambda)$, т.е. случайная величина X имеет распределение Пуассона с параметром λ. $\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = e^0 = 1.$

Пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события A равна p (0<p<1) и, следовательно, вероятность его не появления q=1-p. Испытания заканчиваются как только появится событие A. Таким образом, если событие A появилось в k-ом испытании, то в предшествующих k-1 испытаниях оно не появлялось.

Обозначим через X дискретную случайную величину—число испытаний, которое нужно провести до первого появления события A. Очевидно, возможными значениями случайной величины X являются натуральные числа.

Пусть в первых k-1 испытаниях событие A не наступало, а в k-ом испытании появилось. Вероятность этого события $P(X = k) = q^{k-1} \cdot p$.

○ Говорят, что случайная величина X имеет геометрическое распределение с параметром p (0<p<1), если она принимает натуральные значения $k \in N$ с вероятностями $P(X = k) = q^{k-1} p$, где q=1-p.

X	1	2	3	…	k	…
P	p	qp	q^2p	…	$q^{k-1}p$	…

Очевидно, что вероятности появления значений 1,2,3… образуют геометрическую прогрессию с первым членом p и знаменателем q (0<q<1).

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} p = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$$

Пример 1. Из орудия производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель p=0,6. Найти вероятность того, что попадание произойдет при третьем выстреле.

p=0,6; q=0,4; k=3. $P = q^{k-1} \cdot p = 0{,}4^2 \cdot 0{,}6 = 0{,}096$.

Пример 2. Монета брошена два раза. Написать ряд распределения случайной величины X—числа выпадений «герба».

Решение. Вероятность выпадения «герба» в каждом бросании монеты $p = \frac{1}{2}$, вероятность того, что «герб» не появится $q = \frac{1}{2}$.

При бросании монеты «герб» может появится либо 2, либо 1, либо 0 раз. Т.е. возможные значения X таковы: $x_1=0, x_2=1$, $x_3=2$.

Найдем вероятности этих возможных значений по формуле Бернулли:

$$P_2(0) = C_2^0 \cdot q^2 = (\frac{1}{2})^2 = 0{,}25;$$

$$P_2(1) = C_2^1 \cdot p \cdot q = 2 \cdot (\frac{1}{2}) \cdot (\frac{1}{2}) = 0{,}5;$$

$$P_2(3) = C_2^2 \cdot p^2 = (\frac{1}{2})^2 = 0{,}25.$$

Ряд распределения:

X	0	1	2
P	0,25	0,5	0,25

$$\sum_{i=1} p_i = 1$$

Пример 3. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,0002. Найти вероятность того, что на базу прибудут три негодных изделия(n-велико,p-мало).

По условию n=5000, p=0,0002, k=3. По формуле Пуассона
$a = n \cdot p = 5000 \cdot 0{,}0002 = 1$, искомая вероятность

$$P_{5000}(3) = \frac{a^k}{k!} e^{-a} = \frac{1}{3!} e^{-1} = \frac{1}{6e} \approx 0{,}06.$$

13. Простейший поток событий.

Рассмотрим события, которые наступают в случайные моменты времени.

- **Потоком событий** называют последовательность событий, которые наступают в случайные моменты времени.

Примерами потоков служат: поступление вызовов на АТС, на пункт неотложной медицинской помощи, прибытие самолетов в аэропорт, клиентов на предприятие бытового обслуживания, последовательность отказов элементов и многие другие.

Среди свойств, которыми могут обладать потоки, выделим свойства стационарности, отсутствия последствия и ординарности.

- Поток событий называется **стационарным**, если вероятность появления k событий за промежуток времени длительности t зависит только от k и t.

Таким образом, свойство стационарности характеризуется тем, что вероятность появления k событий на любом промежутке времени зависит только от числа k и от длительности t промежутка и не зависит от начала его отсчета; при этом различные промежутки времени предполагаются непересекающимися. Например, вероятности появления k событий на промежутках времени (1, 7), (10, 16), (T, T+6) одинаковой длительности t=6 единиц времени равны между собой.

- Поток событий называется **ординарным**, если за бесконечно малый промежуток времени может появиться не более одного события.

Таким образом, свойство ординарности характеризуется тем, что появление двух и более событий за малый промежуток времени практически невозможно. Другими словами, вероятность появления более одного события в один и тот же момент времени практически равна нулю.

- Говорят, что поток событий обладает свойством **отсутствия последствия**, если имеет место взаимная независимость появлений того или иного числа событий в непересекающиеся промежутки времени. Таким образом, свойство отсутствия последствия характеризуется тем, что вероятность появления k событий на любом промежутке времени не зависит от того, появились или не появились события в моменты времени, предшествующие началу рассматриваемого промежутка. Другими словами, условная вероятность появления k событий на любом промежутке времени, вычисленная при произвольном предположении о том, что происходило до начала рассматриваемого промежутка (т.е. сколько событий появилось, в какой последовательности), равна безусловной вероятности. Следовательно, предыстория потока не сказывается на вероятности появления событий в ближайшем будущем.
- Поток событий называется **простейшим или пуассоновским**, если он стационарный, ординарный, без последствия.
- **Интенсивностью потока λ** называют среднее число событий, которые появляются в единицу времени.

Если постоянная интенсивность потока известна, то вероятность появления k событий простейшего потока за промежуток времени длительности t определяется по формуле:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},\ k \in \{0,1,2,...\}.$$ Формула Пуассона.

Эта формула отражает все свойства простейшего потока, поэтому ее можно считать математической моделью простейшего потока.

Пример. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно двум. Найти вероятность того, что за 5 минут поступит: а) два вызова; б) менее двух вызовов; в) не менее двух вызовов. Поток вызовов предполагается простейшим.

По условию λ=2, t=5, k=2. По формуле Пуассона

А) $P_2(5) = \frac{(2\cdot 5)^2}{2!} e^{-10} = 50\cdot 0{,}000045 = 0{,}00225$—это событие практически невозможно.

Б) $P_0(5) + P_1(5) = e^{-10} + 10\cdot e^{-10} = 0{,}000495$—событие практически невозможно, т.к. события «не поступило ни одного вызова» и «поступил один вызов»— несовместимы.

В) $P_{\geq 2}(5) = 1 - P_{<2}(5) = 1 - 0{,}000465 = 099955$—это событие практически достоверно.

14. Числовые характеристики дискретных случайных величин.

Как известно, закон распределения полностью характеризует случайную величину. Однако часто закон распределения неизвестен и приходится ограничиваться меньшими сведениями. Иногда даже выгоднее пользоваться числами, которые описывают случайную величину суммарно; такие числа называют <u>числовыми характеристиками</u> случайной величины. К числу важных числовых характеристик относится математическое ожидание, которое приближенно равно среднему значению случайной величины.

o **Математическим ожиданием дискретной случайной величины** называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности. Обозначают математическое ожидание случайной величины X через MX или M(X). Если случайная величина X принимает конечное число значений, то

$$MX = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \,.$$

Если случайная величина X принимает счетное число значений, то $MX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$, причем математическое ожидание существует, если ряд в правой части равенства сходится абсолютно.

Математическое ожидание дискретной случайной величины—это неслучайная величина (т.е. число, постоянная).

<u>Пример 1.</u> Найти математическое ожидание случайной величины X, зная ее ряд распределения.

X	3	5	2
P	0,1	0,6	0,3

$$MX = 3 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}3 = 0{,}3 + 3 + 0{,}6 = 3{,}9 .$$

<u>Пример 2.</u> Найти математическое ожидание числа появлений события A в одном испытании, если вероятность события A равна p.

Случайная величина X—число появлений события A в одном испытании, может принимать значения x_1=1 (событие A наступило) с вероятностью p и x_2=0 (A не наступило) с вероятностью q=1-p.

$$MX = 1 \cdot p = 0 \cdot q = p .$$

Таким образом, математическое ожидание числа появлений события в одном испытании равно вероятности это события.

Свойства математического ожидания:

Свойство 1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной: M(C)=C.

Будем рассматривать постоянную С как дискретную случайную величину, которая принимает одно возможное значение С с вероятностью 1. Следовательно, $M(C) = C \cdot 1 = C$.

Замечание. Произведение постоянной величины С на дискретную случайную величину Х определяется как дискретная случайная величина СХ, возможные значения которой равны произведениям постоянной С на возможные значения Х, вероятности возможных значений СХ равны вероятностям соответствующих возможных значении Х.

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: М(СХ)=СМ(Х).

Если случайная величин Х имеет ряд распределения

X	x_1	x_2	…	x_n	…
P	p_1	p_2	…	p_n	…

Ряд распределения случайной величины СХ

CX	Cx_1	Cx_2	…	Cx_n	…
P	p_1	p_2	…	p_n	…

Математическое ожидание случайной величины СХ

$$M(CX) = \sum_{i=1}^{\infty} Cx_i p_i = C\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = CMX .$$

○ Случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называются независимыми, если для любых числовых множеств $B_1, B_2, \ldots, B_n$ $P(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \ldots, X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1) \cdot P(X_2 \in B_2) \cdot \ldots \cdot P(X_n \in Bn)$.

Если взять $B_1 =]-\infty, x_1[$; $B_2 =]-\infty, x_2[$; …; $B_n =]-\infty, x_n[$, то $P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, ..., X_n < x_n) = P(X_1 < x_1) P(X_2 < x_2) ... P(X_n < x_n)$.

$P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, ..., X_n < x_n) = F_{X_1, X_2, ..., X_n}(x_1, x_2, ..., x_n)$—совместимая функция распределения случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Таким образом, $F_{X_1, X_2, ..., X_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(x_n)$. Данное равенство также можно взять в качестве определения независимости случайных величин.

Свойство 3. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(XY) = MX \cdot MY .$$

Следствие. Математическое ожидание произведения нескольких взаимно независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.

Свойство 4. Математическое ожидание суммы двух случайных величин рано сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M(X+Y) = MX + MY .$$

Следствие. Математическое ожидание суммы нескольких случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых.

Пример. Найти математическое ожидание суммы числа очков, которые могут выпасть при бросании двух игральных костей.

Обозначим случайную величину Х—число очков, выпавших на первой кости, через Y обозначим число очков, выпавших на второй кости. Возможные значения этих величин одинаковы и равны 1,2,3,4,5,6, причем вероятность каждого из этих значений равна $\frac{1}{6}$. Найдем математическое ожидание числа очков, которые могут выпасть на первой кости.

$MX = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$. Очевидно, что $MY = \frac{7}{2}$.

$$M(X+Y) = MX + MY = 7.$$

Теорема 1. Математическое ожидание числа появлений события A в n независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании: $MX = n\cdot p$.

Будем рассматривать в качестве случайной величины X число появлений события A в n независимых испытаниях. Очевидно, общее число X появлений события A в этих испытаниях складывается из чисел появлений события в отдельных испытаниях. Поэтому если X_1—число появлений события в первом испытании, X_2—во втором,…, X_n—в n-ом, то общее число появлений события $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$. По свойству 4:

$$MX = MX_1 + MX_2 + ... + MX_n.$$

Согласно примеру 2 $MX_1 = MX_2 = ... = MX_n = p$. Таким образом, получим $MX = n\cdot p$.

- **Дисперсией** случайной величины называется число $DX = M(X - MX)^2$. Дисперсия является мерой разброса значений случайной величины вокруг ее математического ожидания.
- **Средним квадратическим отклонением** случайной величины X называется число $G_x = \sqrt{DX}$.

$$DX = M(X-MX)^2 = M(X^2 - 2XMX + (MX)^2) = M(X^2) - 2M(XMX) + M(MX)^2 =$$
$$= M(X^2) - 2\cdot MX\cdot MX + (MX)^2 = M(X^2) - (MX)^2.$$

Пример 4. Найти дисперсию случайной величины X, которая задана рядом распределения.

X	2	3	5
P	0,1	0,6	0,3

$$MX = 2\cdot 0{,}2 + 3\cdot 0{,}6 + 5\cdot 0{,}3 = 0{,}2 + 1{,}8 + 1{,}5 = 3{,}5.$$

Ряд распределения случайной величины X^2

X^2	4	9	25
P	0,1	0,6	0,3

$$M(X^2) = 4\cdot 0{,}1 + 9\cdot 0{,}6 + 25\cdot 0{,}3 = 0{,}4 + 5{,}4 + 7{,}5 = 13{,}3$$

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = 13{,}3 - (3{,}5)^2 = 1{,}05.$$

Свойства дисперсии.

Свойство 1. Дисперсия постоянной величины C равна 0. DC=0.

$$DC = M(C - MC)^2 = M(C - C)^2 = 0.$$

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

$D(CX) = C^2 DX$.

$D(CX) = M(CX - CMX)^2 = M(C^2[X - MX]^2) = C^2 M[X - MX]^2 = C^2 DX$

.

Свойство 3. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$D(X+Y) = DX + DY$.

$$D(X+Y) = M[(X+Y)^2] - [M(X+Y)]^2 = M[X^2 + 2XY + Y^2] - [MX + MY]^2 =$$

$$= M(X^2) + 2MXMY - [(MX)^2 + 2MXMY + (MY)^2] + M(Y^2) =$$

$$= (M(X^2) - (MX)^2) + M(Y^2) - (MY)^2 = DX + DY.$$

Следствие. Дисперсия суммы нескольких независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.

Теорема 2. Дисперсия числа появлений события А в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность p появления события постоянна, равна произведению числа испытаний на вероятность появления и непоявления события в одном испытании: $DX = n \cdot p \cdot q$.

Случайная величина X—число появлений события А в n независимых испытаниях. $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$, где X_i—число наступлений событий в i-ом испытании, взаимно независимые, т.к. исход каждого испытания не зависит от исходов остальных.

$DX = DX_1 + DX_2 + ... + DX_n$.

$DX_1 = M(X_1^2) - [MX_1]^2$. Т.к. MX_1=p. $M(X_1^2) = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q = p$, то $DX_1 = p - p^2 = p(1-p) = p \cdot q$. Очевидно, что дисперсия остальных случайных величин также равна pq, откуда $DX = n \cdot p \cdot q$.

Пример. Проводятся 10 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события равна 0,6. Найти дисперсию случайной величины X—числа появлений события в этих испытаниях.

n=10; p=0,6; q=0,4.

$DX = n \cdot p \cdot q = 10 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 2{,}4$.

- **Начальным моментом порядка к случайным величинам X** называют математическое ожидание случайной величины X^k:

$\nu_k = M(X^k)$. В частности, $\nu_1 = MX$, $\nu_2 = M(X^2)$.

Пользуясь этими моментами, формулу для вычисления дисперсии $DX = M(X^2) - (MX)^2$ можно записать так: $DX = \nu_2 - \nu_1^2$.

Кроме моментов случайной величины X целесообразно рассматривать моменты отклонения X-XM.

- **Центральным моментом порядка k** случайной величины X называют математическое ожидание величины $(X\text{-}MX)^k$.

$\mu_k = M[(X - MX)^k]$. В частности

$\mu_1 = M[X - MX] = MX - MX = 0$, $\mu_2 = M[(X - MX)^2] = DX$. Следовательно, $\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2$.

Исходя из определения центрального момента и пользуясь свойствами математического ожидания, можно получить формулы:

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\cdot\nu_2\cdot\nu_1 + 2\cdot\nu_1^3.$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\cdot\nu_3\cdot\nu_1 + 6\cdot\nu_2\cdot{\nu_1}^2 - 3\cdot\nu_1^4.$$

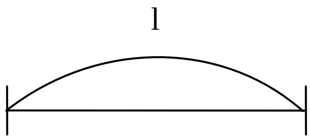
Моменты более высоких порядков применяются редко.

Замечание. Моменты, определенные выше, называют **теоретическими**. В отличие от теоретических моментов, моменты, которые вычисляются по данным наблюдений, называют эмпирическими.

15. Непрерывные случайные величины.

○ Говорят, что случайная величина X имеет плотность вероятности или плотность распределения вероятностей $p(x) = p_X(x)$, если существует функция p(x) такая, что функция распределения $\boxed{F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt}$ **(1)**.

Пример. Нужно определить массу стержня длины *l*, если плотность массы равна p(x).



$$m = \int_0^l p(x)dx$$

○ Случайная величина называется непрерывной, если она имеет плотность распределения.

Пусть p(x)—непрерывная функция. Тогда

$$P(x \le X < x+\Delta x) = F(x+\Delta x) - F(x) = \int_{-\infty}^{x+\Delta x} p(t)dt - \int_{-\infty}^{x} p(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} p(t)dt = p(c)\Delta x =$$

$$= (p(x)+\alpha)\Delta x = p(x)\Delta x + 0(\Delta x).$$

Где $x \le c \le x+\Delta x$, α—бесконечно малая величина при Δx→0.

Т.к. $p(c) = p(x)+\alpha \Rightarrow p(c) \to p(x)$, при Δx→0. Таким образом, $p(x \le X < x+\Delta x) = p(x)\Delta x + 0(\Delta x)$.

$$p(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le X < x+\Delta x)}{\Delta x} = F`(x).$$

Свойства плотности распределения.

Свойство 1. $F'(x) = p(x)$.

Свойство 2. Плотность распределения—неотрицательная функция: $p(x) \ge 0$.

Поскольку F(x)—неубывающая функция, то F’(x)≥0. Следовательно $p(x) = F'(x) \ge 0$—неотрицательная функция.

Геометрически это свойство означает, что график плотности распределения расположен либо над осью ох, либо на этой оси. График плотности распределения называют <u>кривой распределения.</u>

Свойство 3. Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от -∞ до +∞ равен единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1.$$

В формуле **(1)** подставим х=+∞, $F(+\infty) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(t)dt$. Поскольку $F(+\infty) = 1$,

то $\int_{-\infty}^{+\infty} p(t)dt = 1$.

Свойство 4. Вероятность того, что непрерывная случайная величина Х примет значение из множества В, равна интегралу по множеству В от плотности распределения.

$$P(X \in B) = \int\limits_{B} p(t)dt.$$

<u>Пример.</u> Задана плотность вероятности случайной величины Х.

$$\text{p(x)} = \begin{cases} 0, \text{ при x} \le 0 \text{ и x} > 1 \\ 2\text{x, при } 0 < \text{x} \le 1 \end{cases}.$$

Найти вероятность того, что в результате испытания Х примет значение, принадлежащее интервалу (0,5; 1).

Искомая вероятность $P(0{,}5 < x < 1) = 2\int_{0{,}5}^{1} xdx = x^2 \Big|_{0{,}5}^{1} = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$.

- Говорят, что случайная величина Х <u>равномерно</u> распределена на отрезке [a, b], если она непрерывна и имеет плотность вероятности:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, \text{ если } a \le x \le b; \\ 0, \text{ если x} \notin \text{[a, b]}. \end{cases}$$

Найдем функцию распределения равномерно распределенной случайной величины Х.

а) x<a

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0;$$

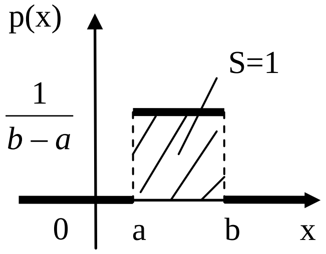
б) a≤x≤b

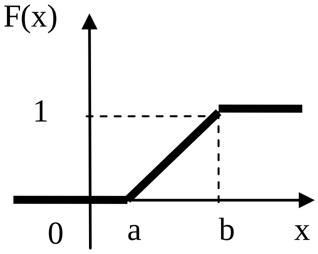
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt = \int_{-\infty}^{a} \underbrace{p(t)}_{o}dt + \int_{a}^{x} \underbrace{p(t)}_{\frac{1}{b-a}}dt = \frac{1}{b-a} \cdot t /_{a}{}^{x} = \frac{x-a}{b-a}.$$

в) x>b

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt = \int_{-\infty}^{a} \underbrace{p(t)}_{0}dt + \int_{a}^{b} \underbrace{p(t)}_{\frac{1}{b-a}}dt + \int_{b}^{x} \underbrace{p(t)}_{0}dt = \frac{b-a}{b-a} = 1.$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b\\ 1, & x>b\end{cases}$$



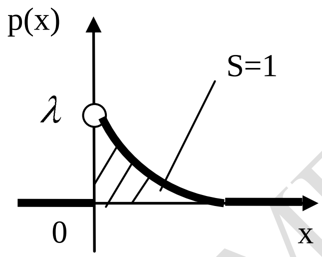


$$y=\frac{x-a}{b-a}, \text{ если } \begin{matrix} x=a\Rightarrow y=0\\ x=b\Rightarrow y=1\end{matrix}$$

Примером равномерно распределенной случайной величины может служить X-координата точки, наудачу брошенной на [a, b].

o Говорят, что случайная величина X имеет показательное (экопоненциальное) распределение с параметром λ>0, если она непрерывна и имеет плотность распределения

$$P(x)=\begin{cases}\lambda\cdot e^{-\lambda x}, \text{если } x>0\\ 0, \text{ если } x\le 0\end{cases}$$; обозначают X~M(λ).



Найдем функцию распределения показательно распределенной случайной величины X.

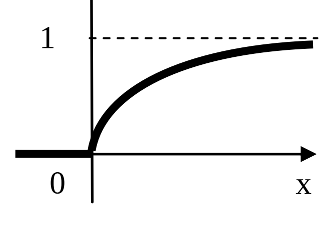
а) x≤0

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}0dt=0.$$

б) x>0

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0}0dt+\int_{0}^{x}\lambda e^{-\lambda t}dt=-\int_{0}^{x}e^{-\lambda t}d(-\lambda t)=-e^{-\lambda t}\Big/_{0}^{x}=-e^{-\lambda x}+1=1-e^{-\lambda x}.$$

Таким образом $F(x)=\begin{cases}0, \text{x} \le 0\\ 1-\text{e}^{-\lambda \text{x}}, \text{если x} > 0\end{cases}$



Мы определили показательный закон с помощью плотности распределения. Ясно, что его можно определить, используя функцию распределения.

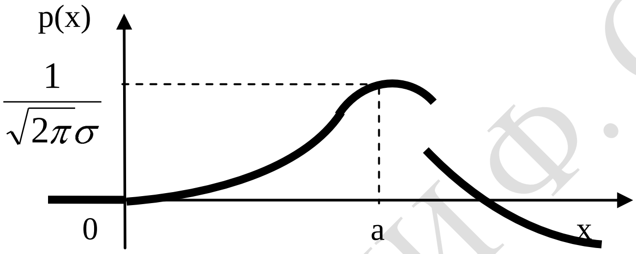
Пример. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону $p(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, \ \text{x} > 0 \\ 0, \ \text{x} \le 0 \end{cases}$. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадет в интервал (0,3; 1).

1. $P(0{,}3 < x < 1) = \int_{0,3}^{1} 2e^{-2x}dx = -e^{-2x} /_{0,3}^{1} = -e^{-2} + e^{-0,6} = e^{-0,6} - e^{-2} = 0{,}54881 -$
$- 0{,}13534 \approx 0{,}41.$

2. $P(0{,}3 < x < 1) = F(1) - F(0{,}3) = 1 - e^{-2\cdot 1} - (1 - e^{-2\cdot 0,3}) = e^{-0,6} - e^{-2}.$

- Говорят, что случайная величинf X имеет нормальное распределение с параметрами a, G^2, если она непрерывна и имеет плотность $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}G} e^{-\frac{(x-a)^2}{2G^2}}$. Обозначение X~N(a, G^2), те X имеет нормальное распределение с параметрами a, G^2.

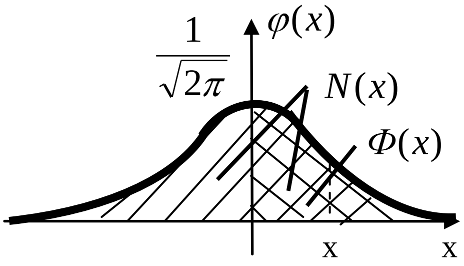
График плотности нормально распределенной случайной величины имеет вид:



- Если случайная величина X~N(0,1), то говорят, что случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. В этом случае плотность обозначается $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Через N(x) обозначим $P\{X_0 < x\} = F_{X_0}(x)$, где X_0~N(0,1).

$$N(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

$$\phi(x) = \int_{0}^{x} \varphi(t)dt.$$



$$N(x) = \Phi(x) + \frac{1}{2}$$

○ **Любая функция (правило, характеристика), позволяющая вычислить вероятность того, что случайная величина X принадлежит B—числовому множеству на прямой, т.е. P(X∈B), называется <u>законом распределения</u> случайной величины X.**

1. F(x)—функция распределения является законом распределения любой случайной величины. $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$.

2. Ряд распределения дискретной случайной величины также является законом распределения дискретной случайной величины.

3. Плотность распределения непрерывной случайной величины p(x) является законом распределения непрерывной случайной величины.

$$P(X \in B) = \int_B p(x)dx.$$

○ **Математическим ожиданием или средним значением** непрерывной случайной величины X с плотностью p(x) называется число $MX = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$ при условии, что этот интеграл сходится абсолютно.

<u>Пример 1.</u> Пусть X имеет равномерное распределение на [a, b].

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$$

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int_{-\infty}^{a} xp(x)dx + \int_{a}^{b} xp(x)dx + \int_{b}^{+\infty} xp(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^2}{2}\Big/_a^b =$$

$$= \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}. \quad \boxed{MX = \frac{a+b}{2}}.$$

<u>Пример 2.</u> Пусть случайная величина X~N(a, G^2).

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}G}e^{-\frac{(x-a)^2}{2G^2}}dx = [t = \frac{x-a}{G}, dx = Gdt, x = a + 6t] =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}(a+Gt)\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{t^2}{2}}dt = a\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt + \frac{G}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt = a$$

Поскольку $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)dt = 1$. (интеграл от плотности φ(t)).

Таким образом, $\boxed{MX = a, \text{если } X \sim N(a, G^2)}$, т.е. смысл параметра a—математическое ожидание случайной величины X.

<u>Пример 3.</u> Найти математическое ожидание случайной величины X, имеющей показательное распределение с параметром λ>0, т.е. X~M(λ)

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases}$$

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x}dx = [u = x, d\vartheta = e^{-\lambda x}dx, du = dx, \vartheta = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}, \int_0^{\infty} u\,d\vartheta =$$

$$= u\vartheta /_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \vartheta du] = (-\frac{1}{\lambda}xe^{-\lambda x} /_0^{\infty} + \int_0^{\infty}(-\frac{1}{\lambda})e^{-\lambda x}dx) = \lambda\frac{1}{\lambda}.$$

$$\boxed{MX = \frac{1}{\lambda}}$$

○ **Дисперсией непрерывной случайной величины X** называется число $DX = M(X - MX)^2 = MX^2 - (MX)^2$. Если случайная величина имеет плотность p(x), $DX = \int_{-\infty}^{+\infty}(x - MX)^2 p(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx - (\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx)^2$.

Математическое ожидание и дисперсия непрерывных случайных величин обладают теми же свойствами, что и для дискретных случайных величин.

<u>Пример 4.</u> Найти дисперсию случайной величины X, распределенной равномерно на [a, b]: $p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, a \le x \le b \\ 0, x \notin [a,b] \end{cases}$. Нашли, что $MX = \frac{a+b}{2}$.

$$DX = \int_a^b \frac{1}{b-a}x^2dx - (MX)^2 = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^3}{3}/_a^b - (\frac{a+b}{2})^2 = 3\frac{b^3 - a^3}{(b-a)} - \frac{(a+b)}{4} =$$

$$= \frac{(b-a)(a^2+ab+b^2)}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{4(a^2+ab+b^2) - 3(a+b)^2}{12} =$$

$$= \frac{4(a^2+ab+b^2) - 3(a^2+2ab+b^2)}{12} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{12} = \frac{(a-b)^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

$$\boxed{DX = \frac{(b-a)^2}{12}}$$

<u>Пример 5.</u> Пусть случайная величина X имеет нормальное распределение X~N(a, G^2). Найти дисперсию DX.

X~N(a, G^2). MX=a.

$$DX = \frac{1}{G\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2G^2}} = G^2.$$

Таким образом, $\boxed{DX = G^2}$.

<u>Пример 6.</u> Пусть случайная величина X имеет показательное распределение $p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases}$. Найти DX.

$MX = \frac{1}{\lambda}$.

$$DX = M(X^2) - (MX)^2 = \lambda\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\lambda x}dx - \frac{1}{\lambda^2} = [\text{интегрируя дважды по частям}] =$$

$= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$.

Таким образом, $\boxed{DX = \frac{1}{\lambda^2}}$.

Теорема 1. Если случайная величина X имеет нормальное стандартное распределение с параметрами (a, G^2), то случайная величина $X_0 = \frac{X-a}{G}$ имеет нормальное распределение, т.е. $X_0 \sim N(0,1)$.

$M(\frac{X-a}{G}) = \frac{1}{G}(MX - a) = 0$; $D(\frac{X-a}{G}) = \frac{1}{G^2} DX = \frac{G^2}{G^2} = 1$.

Теорема 2. (Критерий независимости дискретных случайных величин).

Для того чтобы дискретные случайные величины $X_1,\dots,X_n$ были независимы, необходимо и достаточно, чтобы для любых действительных чисел $x_1,\dots,x_n$ выполнялось соотношение

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2) \cdot ... \cdot P(X_n = x_n).$$

Теорема 3. (Критерий независимости для непрерывных случайных величин).

Для того чтобы непрерывные случайные величины X_1, $X_2,\dots,X_n$ были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы для любых действительных чисел $x_1,\dots,x_n$ выполнялось соотношение

$$p_{x_1,...,x_n}(x_1,...,x_n) = p_{x1}(x_1) p_{x_2}(x_2) ... p_{x_n}(x_n).$$

Здесь $p_{x_1,...,x_n}(x_1,..,x_n)$—совместимая плотность распределения случайных величин $X_1,\dots,X_n$, то есть совместимая функция распределения случайных величин $X_1,\dots,X_n$

$$F_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}...\int_{-\infty}^{x_n} p_{X_1,...,X_n}(t_1 t_2,...,t_n) dt_n ... dt_2 dt_1.$$

Предположим, что случайная величина $X_0 \sim N(0,1)$. Вероятность, что $X_0 \in (\alpha, \beta)$.

$$P(\alpha < X_0 < \beta) = N(\beta) - N(\alpha) = \phi(\beta) + \frac{1}{2} - \phi(\alpha) - \frac{1}{2} = \phi(\beta) - \phi(\alpha).$$

Пусть

$X \sim N(a, G^2)$. $P(\alpha < X < \beta) = P(\alpha - a < X - a < \beta - a) = P(\frac{\alpha - a}{G} < \frac{X-a}{G} < \frac{\beta - a}{G}) =$

$= P(\frac{\alpha - a}{G} < X_0 < \frac{\beta - a}{G}) = \phi(\frac{\beta - a}{G}) - \phi(\frac{\alpha - a}{G})$.

$\boxed{P(\alpha < X < \beta) = \phi(\frac{\beta - a}{G}) - \phi(\frac{\alpha - a}{G})}$, где $\phi(x)$—функция Лапласа.

<u>Замечание.</u> Необходимо отметить, что φ(t)—четная функция, т.е. φ(-x)=φ(x); функция Лапласа $\phi(x)$—нечетная, т.е. $\phi(-x) = -\phi(x)$; функция стандартного нормального распределения N(x) обладает свойством N(x)+N(-x)=1.

16. Системы случайных величин.

○ Вектор $\xi = \xi(w) = (\xi_1(w),..., \xi_n(w))$, где $\xi_i(w)$—случайные величины, называются n-мерным случайным вектором.

Таким образом, случайный вектор ξ отображает пространство элементарных исходов $\Omega \to IR^n$ в n-мерное действительное пространство IR^n.

○ Функция $F(x) = F_\xi(x) = F(x_1, x \ ,..., x_n) = F_{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n}(x_1, x_2, ..., x_n) =$ $= P\{\xi_1(w) < x_1, \xi_2(w) < x_2, ..., \xi_n(w) < x_n\}$ называется функцией распределения случайного вектора ξ или совместной функцией распределения случайных величин $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$.

Свойства функции распределения случайного вектора.

Свойство 1. $0 \le F(x) \le 1$.

Свойство 2. Функция распределения случайного вектора неубывающая по каждому аргументу.

Пусть $x_1<y_1$, тогда событие $(\xi_1 < x_1) \subset (\xi_1 < y_1)$.

Тогда $(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, ..., \xi_n < x_n) \subset (\xi_1 < y_1, \xi_2 < x_2, ..., \xi_n < x_n)$. По свойству вероятности если $A \subset B$, то $P(A) \le P(B)$, получим $F(x_1, x_2, ..., x_n) \le F(y_1, x \ ,..., x_n)$. Т.е. функция не убывает по первому аргументу. Аналогично для любого аргумента.

Свойство 3. $F(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, -\infty, x_{i+1}, ..., x_n) = P(\varnothing) = 0$.

$F(x_1, x_2, .., x_{i-1}, -\infty, x_{i+1}, .., x_n) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, .., \xi_{i-1} < x_{i-1}, \xi_i < -\infty, \xi_{i+1} < x_{i+1}, .., \xi_n < x_n)$ $=0$

Свойство 4.

$F_{\xi_1, \xi_2, .., \xi_{i-1}, \xi_i, \xi_{i+1}, .., \xi_n}(x_1, x_2, .., x_{i-1}, +\infty, x_{i+1}, .., x_n) = F_{\xi_1, .., \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, .., \xi_n}(x_1, .., x_{i-1}, x_{i+1}, .., x_n)$.

$$F_{\xi_1, ..., \xi_{i-1}, \xi_i, \xi_{i+1}, ..., \xi_n}(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, +\infty, x_{i+1}, ..., x_n) =$$
$$= P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, ..., \xi_{i-1} < x_{i-1}, \underbrace{\xi_i < +\infty}_{\Omega}, \xi_{i+1} < x_{i+1}, ..., \xi_n < x_n) =$$
$$= P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, ..., \xi_{i-1} < x_{i-1}, \xi_{i+1} < x_{i+1}, ..., \xi_n < x_n) =$$
$$= F_{\xi_1, ..., \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, ..., \xi_n}(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n).$$

○ Случайный вектор называется **дискретным**, если все его компоненты— дискретные случайные величины.

○ Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ называется **непрерывным**, если существует неотрицательная функция $p(x) = p_\xi(x) = p_{\xi_1, ..., \xi_n}(x_1, ..., x_n) = p(x_1 ..., x_n) \ge 0$, называется плотностью распределения случайных величин $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ такая, что функция распределения

$$F_{\xi_1, \xi_n}(x_1, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} ... \int_{-\infty}^{x_1} p_{\xi_1, ..., \xi_n}(t_1, ..., t_n) dt_1 ... dt_n.$$

Свойства плотности распределения случайного вектора.

Свойство 1. $p_{\xi}(x) \geq 0$

Свойство 2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n = 1$.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n = F_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(\infty,\ldots,\infty) = 1.$$

Теорема 1. Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2)$—непрерывный случайный вектор. Тогда случайные величины ξ_1 и ξ_2—непрерывны, причем

$$p_{\xi 1}(x_1) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1 \xi_2}(x_1, x_2)dx_2, \quad P_{\xi_2}(x_2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2)dx_1.$$

Свойство 3. $P\{\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n) \in B\} = \int\limits_B \ldots \int p_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n$, где $B \in IR^n$ —множество из пространства IR^n.

○ Говорят, что случайный вектор $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$ имеет равномерное распределение в области $S \subset IR^n$, если она непрерывна и имеет плотность.

$$p_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} \dfrac{1}{mes\ S}, & если\ (x_1,\ldots,x_n) \in S \\ 0, & x \notin S \end{cases}$$

Если множество $B \subset S$

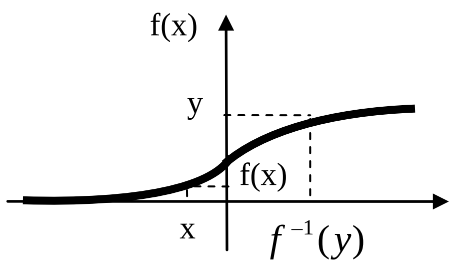
$$P(\xi \in B) = \int\limits_B \ldots \int p_{\xi_1,\ldots,\xi_2}(x_1,\ldots,x_2)dx_1\ldots dx_n = \frac{1}{mes\ S} \int\limits_B \ldots \int dx_1\ldots dx_n = \frac{mes\ B}{mes\ S}.$$

○ Если каждому возможному значению случайной величины X соответствует одно возможное значение случайной величины Y, то Y называют функцией случайного аргумента X.

Теорема 2. Пусть случайная величина X непрерывна с плотностью $p_X(x)$, а случайная величина $Y = f(X)$, где $y = f(x)$—монотонная дифференцируемая функция, тогда случайная величина Y—непрерывная и имеет плотность $p_Y(y) = p_X(f^{-1}(y))\left|[f^{-1}(y)]'\right|$.

а) Пусть функция f возрастает. По определению

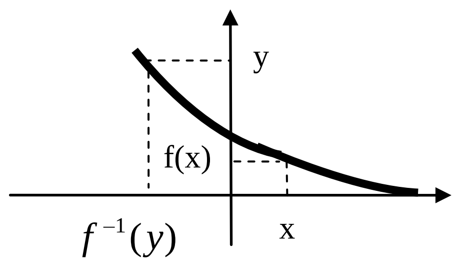
$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{f(X) < y\} = P\{X < f^{-1}(y)\} = F_X(f^{-1}(y)).$$



Продифференцируем обе части. Справа получим: $P_Y(y)$, слева— $P_X(f^{-1}(y))\cdot(f^{-1}(y))'$, что и требовалось $P_Y(y) = P_X(f^{-1}(y))\cdot(f^{-1}(y))'$.

б) Пусть f убывает.

$F_Y(y) = P(Y < y) = P(f(x) < y) = P(X > f^{-1}(y)) = P(X \geq f^{-1}(y)) = 1 - P(X < f^{-1}(y)) =$
$= 1 - F_X(f^{-1}(y))$.



$$f(x) < y \Leftrightarrow x > f^{-1}(y)$$

Продифференцировав обе части, $P_Y(y) = -P_X(f^{-1}(y))\cdot(f^{-1}(y))'$.

Покажем, как найти распределение функции случайного аргумента. Пусть аргумент X—дискретная случайная величина

А) Если различным возможным значениям аргумента функции Y, то вероятность соответствующих значений X и Y между собой равны.

<u>Пример 1.</u> Дискретная случайная величина X задана распределением

X	2	3
P	0,6	0,4

Найти распределение функции $Y = X^2$.

Решение. Найдем возможные значения X:

$y_1 = 2^2 = 4$, $y_2 = 3^2 = 9$. Искомое распределение Y:

Y	4	9
P	0,6	0,4

Б) Если различным возможным значениям X соответствуют значения Y, среди которых есть равные между собой, то следует складывать вероятности повторяющихся значений Y.

<u>Пример 2.</u> Дискретная случайная величина X задана распределением

X	-2	2	3
P	0,4	0,5	0,1

Найти распределение функции $Y = X^2$.

$y_1 = 4$, $y_2 = 9$.

Вероятность возможного значения $y_1=4$ равна сумме вероятностей несовместимых событий $X_1=-2$, $X_2=2$, т.е. 0,4+0,5=0,9. Вероятность возможного значения $y_2=9$ равна 0,1. Напишем искомое распределение X.

Y	4	9
P	0,9	0,1

Пусть задана функция $Y = \varphi(X)$ случайного аргумента X. Требуется найти математическое ожидание этой функции, зная закон распределения аргумента.

1. Пусть аргумент X—дискретная случайная величина с рядом распределения

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Y	φ(x)	φ(x)	…	φ(x)
P	p_1	p_2	…	p_n

$$M(\varphi(X)) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) p_i .$$

Пример 3. Дискретная случайная величина X задана распределением

X	1	3	5
P	0,2	0,5	0,3

Найти математическое ожидание функции $Y = \varphi(X) = X^2 + 1$.

Возможные значения Y:

$\varphi(1) = 1^2 + 1 = 2$; $\varphi(3) = 3^2 + 1 = 10$; $\varphi(5) = 5^2 + 1 = 26$.

$M[X^2 + 1] = 2 \cdot 0{,}2 + 10 \cdot 0{,}5 + 26 \cdot 0{,}3 = 13{,}2$.

2. Пусть аргумент X—непрерывная случайная величина, заданная плотностью распределения p(x). Для нахождения математического ожидания функции $Y = \varphi(X)$ можно сначала найти плотность распределения g(y) величины Y, а затем воспользоваться формулой: $M(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) p(x) dx$.

Если возможны значения $X \in (a, b)$, то $M(\varphi(x)) = \int_a^b \varphi(x) p(x) dx$.

Пример 4. Случайная величина X задана плотностью $p(x) = \sin x$ в интервале (0, π/2); вне этого интервала p(x)=0. Найти математическое ожидание функции $Y = \varphi(X) = X^2$.

$p(x) = \sin x$, $\varphi(x) = x^2$, $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$; Следовательно,

$M(\varphi(X)) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \cdot dx = [\text{по частям}] = \pi - 2$.

17. Функция двух случайных аргументов

Формула свертки. Устойчивость нормального распределения.

o Если каждой паре возможных значений случайных величин X и Y соответствует одно возможное значение случайной величины Z, то Z называют функцией двух случайных аргументов X и Y:

$Z = \varphi(X, Y)$.

Далее на примерах будет показано, как найти распределение функции $Z = X + Y$ по известным распределениям слагаемых. Такая задача часто встречается на практике. Например, если X—погрешность показаний измерительного прибора (распределена равномерно), то возникает задача—найти закон распределения суммы погрешностей $Z = X + Y$.

Случай 1. Пусть X и Y—дискретные независимые случайные величины. Для того чтобы составить закон распределения функции Z=X+Y, надо найти все возможные значения Z и их вероятности. Иными словами, составляется ряд распределения случайной величины Z.

Пример 1. Дискретные независимые случайные величины X и Y, заданы распределениями

X	1	2
P	0,4	0,6

и

Y	3	4
P	0,2	0,8

Составить распределение случайной величины Z=X+Y.

Возможные значения Z есть суммы каждого возможного значения X со всеми возможными значениями X.

$Z_1 = 1+3 = 4$; $Z_2 = 1+4 = 5$; $Z_3 = 2+3 = 5$; $Z_4 = 2+4 = 6$.

Найдем вероятность этих возможных значений. Для того чтобы Z=4 достаточно, чтобы величина X приняла значения $x_1=1$ и величина Y—значение $y_1=3$. Вероятности этих возможных значений, как следует из данных законов распределения, соответственно равно 0,4 и 0,2.

Поскольку случайные величины X и Y независимы, то события X=1 и Y=3 независимы и, следовательно, вероятность их совместного наступления (т.е вероятность события Z=1+3=4) по теореме умножения равна 0,4·0,2=0,08.

Аналогично найдем

$$p(Z = 1+4 = 5) = 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}32$$

$$p(Z = 2+3 = 5) = 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}12$$

$$p(Z = 2+4 = 6) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48$$

Напишем искомое распределение, сложив предварительно вероятности несовместимых событий $Z=z_2$ и $Z=z_3$. (0,32+0,12=0,44)

Z	4	5	6
P	0,08	0,44	0,48

Контроль: 0,08+0,44+0,48=1.

Рассмотрим общий случай:

Пусть X и Y—независимые случайные величины, принимающие значения $X, Y \in \{0,1,2,...\}$. Обозначим через $p_i = P(X = i)$, $q_i = P(Y = i)$, $i \in \{0,1,2,\ldots\}$.

Z=X+H. Обозначим через $r_k = P(Z = k) = P(X + Y = K) =$

$$= \left[\begin{array}{l} A = \{X + Y = k\}, H_i = \{X = i\}, H_i - \textit{полная}\ \text{группа событий} \\ \mathrm{H_i H_j} = \varnothing (i \neq j), \text{по формуле полной вероятности}\ P(A) = \sum_{i=0}^{\infty} p(H_i) P(A) H_i \end{array} \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} p_i P\{X + Y = k / \xi = i\} = \sum_{i=0}^{k} p_i P\{Y = k - i / X = i\} = \left[\begin{array}{c} A, B - \textit{нзависимые} \\ P(A/B) = P(A) \end{array} \right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} p_i P\{Y = k - i\} = \sum_{i=0}^{k} p_i q_{k-i}.$$

Таким образом, $\boxed{r_k = \sum_{i=0}^{k} p_i q_{k-i} = \sum_{j=0}^{k} p_{k-j} q_j}$ —<u>формула свертки.</u>

Случай 2. Пусть X и Y—непрерывные случайные величины.

Теорема. Если X и Y—независимые непрерывные случайные величины, то случайная величина Z=X+Y—также непрерывна, причем плотность распределения случайной величины Z

$\boxed{P_Z(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(u) \cdot p_Y(x-u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x-\vartheta) \cdot p_Y(\upsilon)d\vartheta}$ —формула свертки.

○ **Плотность распределения суммы** независимых случайных величин называется <u>композицией.</u>

<u>Замечание.</u> Если возможные значения X и Y неотрицательны, то <u>формула свертки</u> $P_Z(x) = \int_0^x p_X(u) p_Y(x-u)du = \int_0^x p_X(x-\vartheta) \cdot p_X(\vartheta)du$.

○ **Закон распределения вероятностей называется <u>устойчивым</u>**, если композиция таких законов есть тот же закон распределения (отличающийся, вообще говоря, параметрами). Нормальный закон обладает свойствами устойчивости, т.е. композиция нормальных законов также имеет нормальное распределение, причем математическое ожидание и дисперсия этой композиции равны соответственно суммам математических ожиданий и дисперсий слагаемых:

$M(Z) = MX = MY$, $DZ = DX + DY$.

В частности, если X~N(0,1) и Y~N(0,1), то Z=X+Y~N(0,2).

<u>Пример 2.</u> Пусть случайная величины $X_1,\ldots,X_k$—независимы и имеют показательное распределение с параметром λ>0, т.е. $X_1,..., X_k \sim M(\lambda)$.

$p_{X_i}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases}$. Найти плотность распределения $p_{\sum_{i=1}^{k} X_i}(x)$.

Если x>0

$$P_{X_1+X_2}(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda u} \lambda e^{-\lambda(x-u)}du = \int_0^x \lambda^2 e^{-\lambda x}du = \lambda^2 e^{-\lambda x} \int_0^x du = \lambda^2 x e^{-\lambda x}.$$

Если x≤0, то $p_{X_1+X_2}(x) = 0$. Таким образом,

$$P_{X_1+X_2}(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ \lambda^2 x e^{-\lambda x}, x > 0 \end{cases}.$$

Далее при x>0

$$p_{X_1+X_2+X_3}(x) = \int_0^{\infty} \lambda^2 u e^{-\lambda u} \lambda e^{-\lambda(x-u)}du = \lambda^3 e^{-\lambda x} \int_0^x u du = \lambda^3 \frac{x^2}{2} e^{-\lambda x}.$$

Если x≤0, то $p_{X_1+X_2+X_3}(x) = 0$.

Проводя аналогичные рассуждения, получим:

$$p_{X_1+X_2+...+X_k}(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^k}{(k-1)!}x^{k-1}e^{-\lambda x}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}.$$

18. Числовые характеристики системы двух случайных величин

Для описания системы двух случайных величин кроме математических ожиданий и дисперсий используют и другие характеристики. К их числу относятся ковариация и коэффициент коррекции.

○ **Ковариацией** между случайными величинами X и Y называется число $\operatorname{cov}(X,Y)=\sum_i\sum_j(x_i-MX)(y_j-MY)p_{ij}=\sum_i\sum_j x_i y_j\cdot p - MX\cdot MY$, где $p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j)$.

Для непрерывных случайных величин X и Y используют формулу $\operatorname{cov}(X,Y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-MX)(y-MY)p_{X,Y}(x,y)dxdy=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xy\cdot p_{X,Y}(x,y)dxdy-MX\cdot MY$
.

Покажем, что если случайные величины X и Y независимы, то $\operatorname{cov}(X,Y)=0$. Пусть X и Y—непрерывные случайные величины

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-MX)(y-MY)p_{X,Y}(x,y)dxdy=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-MX)p_X(x)dx\cdot\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(y-MY)p_Y(y)dy=$$

$$=(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{x\,p_x(x)dx}_{MX}-MX)\cdot(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{y\,p_Y(y)dy}_{MY}-MY)=0$$

○ **Коэффициентом корреляции** между случайными величинами X и Y называется число $r=r_{XY}=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{G_X G_Y}$.

Свойства корреляции.

Свойство 1. Абсолютная величина коэффициента корреляции не превосходит единицы, т.е. $|r|\le 1$.

Свойство 2. Для того чтобы $|r|=1$ необходимо и достаточно, чтобы случайные величины X и Y были связанны линейной зависимостью. Т.е.$|r|=1\Leftrightarrow Y=aX+b$ с вероятностью 1.

Свойство 3. Если случайные величины независимы, то они некоррелированы, т.е. r=0.

Пусть X и Y—независимы, тогда по свойству математического ожидания $M(X\cdot Y)=MX\cdot MY\Rightarrow\operatorname{cov}(X,Y)=M(X\cdot Y)-MX\cdot MY=MX\cdot MY-MX\cdot MY=0\Rightarrow r=0$

o Две случайные величины X и Y называют **коррелированными**, если их коэффициент корреляции отличен от нуля.

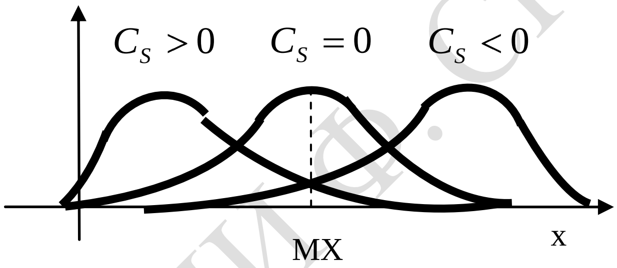
o **Случайные величины X и Y называют некоррелированными** если их коэффициент корреляции равен 0.

<u>Замечание.</u> Из коррелированности двух случайных величин следует их зависимость, но из зависимости еще не вытекает коррелированность. Из независимости двух случайных величин следует их некоррелированность, но из некоррелированности еще нельзя заключить о независимости этих величин.

Коэффициент корреляции характеризует тенденцию случайных величин к линейной зависимости. Чем больше по абсолютной величине коэффициент корреляции, тем больше тенденция к линейной зависимости.

o <u>Коэффициентом асимметрии</u> случайной величины X называется число $C_s = \frac{\mu_3}{G_x^3} = \frac{M(X - MX)^3}{G_x^3}$.

Знак коэффициента асимметрии указывает на правостороннюю или левостороннюю асимметрию.



o Эксцессом случайной величины X называется число $F = \frac{\mu_4}{G_x^4} - 3 = \frac{M(X - MX)^4}{G_x^4} - 3$.

Характеризует сглаженность кривой распределения по отношению к кривой нормального распределения.

19. Производящие функции

o Под <u>целочисленной</u> случайной величиной будем понимать дискретную случайную величину, которая может принимать значения 0,1,2,…

Таким образом, если случайная величина X—целочисленная, то она имеет ряд распределения

X	0	1	2	…
P	p_0	p_1	p_2	…

o Пусть X—целочисленная величина с законом распределения

X	0	1	2	…
P	p_0	p_1	p_2	…

Ее производящей функцией называется функция $P(Z) = P_X(Z) = MZ^X = \sum_{k=0}^{\infty} p_k Z^k$

Свойства производящих функций.

Свойство 1. Производящая функция $P(Z)$ определена в области $|Z| \le 1$.

Свойство 2. Производящая функция $|P(Z)| \le 1$

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} p_k Z^k\right| = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$$

Свойство 3. Значение производящей функции в точке Z=1, P(1)=1.

$$P(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k 1^k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

Свойство 4. **Если Z=1, то MX=P'(1)**

$$P'(Z) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \cdot k \cdot z^{k-1}.$$

$$P'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = MX.$$

Свойство 5. $DX = P''(1) + P'(1) - [P(1)]^2$

$$P''(Z) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) Z^{k-1} p_k$$. Если Z=1

$$P''(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 - p_k - \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = MX^2 - MX = MX^2 - P'(1).$$

$$MX^2 = P''(1) + P'(1).$$

Следовательно, $DX = MX^2 - (MX)^2 = P''(1) + P'(1) - [P'(1)]^2$.

Свойство 6. Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$—независимые целочисленные случайные величины, то производящая функция $P_{X_1+X_2+\ldots+X_n}(Z) = \prod_{k=1}^{n} P_{X_k}(Z)$.

$$P_{X_1+X_2+\ldots+X_n}(Z) = MZ^{X_1+X_2+\ldots+X_n} = M(Z^{X_1} Z^{X_2} \ldots Z^{X_n}) = M(Z^{X_1}) M(Z^{X_2}) \ldots M(Z^{X_n}) =$$

$$= P_{X_1}(Z) P_{X_2}(Z) \ldots P_{X_n}(Z) = \prod_{k=1}^{n} P_{X_k}(Z).$$

<u>Пример 1.</u> Пусть μ—число успехов в n независимых испытаниях Бернулли, т.е. μ~B(n,p)—биномиальное распределение с параметрами (n,p). Найти производящую функцию случайной величины μ.

$\mu = \sum_{k=1}^{n} \mu_k$, где μ_k—число успехов в каждом испытании

μ_k	0	1
P	q	p

Найдем производящую функцию случайной величины μ_k

$$P_{\mu_k}(Z) = MZ^{\mu_k} = \sum_{k=0}^{1} p_k z^k = p_0 + p_1 z = q + pz.$$

$$P_{\mu}(Z) = P_{\sum\limits_{k=1}^{n}\mu_k}(z) = (pz+q)^n.$$

<u>Пример 2.</u> Пусть случайная величина ξ имеет распределение Пуассона с параметром λ, т.е. $\xi \sim \prod(\lambda)$. Найти производящую функцию случайной величины ξ.

$$P_{\xi}(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} z^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda z} = e^{\lambda(z-1)}.$$

$$M\xi = P'(1) = \lambda e^{\lambda(z-1)} /_{z=1} = \lambda.$$

20. Распределение «хи квадрат»

Пусть X_i, $i \in \{1,2,3,...,n\}$—нормальные независимые случайные величины, причем математическое ожидании каждой из них равно нулю, а среднее квадратическое отклонение (или дисперсия)—единице. Тогда сумма квадратов этих величин $X^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$ распределена по закону X^2 с k=n степенями свободы. Если же эти величины X_i связаны одним линейным соотношением, например $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = n\overline{X}$, то число степеней свободы k=n-1.

Плотность этого распределения $P(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x \le 0 \\ \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma(\frac{k}{2})} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{k}{2}-1}, \text{ при } x > 0 \end{cases}$, где

$\Gamma(x) = \int\limits_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dx$—гамма-функция; в частности, Γ(n+1)=n!

Отсюда видно, что распределение «х и квадрат» определяется одним параметром—числом степеней свободы k. С увеличением числа степеней свободы распределение медленно приближается к нормальному.

21. Распределение Стьюдента

Пусть Z—нормально распределенная величина, причем M(Z)=0, G^2=1, т.е. Z~N(0,1), а V—независимая от Z величина, которая распределена по закону X^2 с k степенями свободы. Тогда величина $t = \dfrac{Z}{\sqrt{\frac{V}{k}}}$ имеет распределение, которое называют t—распределением или распределением Стьюдента (псевдоним английского статистика В.Госсета), с k степенями свободы. С возрастанием числа степеней свободы распределение Стьюдента быстро приближается к нормальному.

Плотность распределения случайной величины t имеет вид $$p(t)=S(t,k)=\frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\sqrt{\pi k}\,\Gamma(\frac{k}{2})}(1+\frac{t^2}{k})^{-\frac{k+1}{2}},\ -\infty<t<\infty.$$

Случайная величина t имеет математическое ожидание Mt=0, $Dt=\dfrac{k}{k-2}$ (k>2).

22. Распределение Фишера

Если U и V—независимые случайные величины, распределенные по закону X^2 со степенями свободы k_1 и k_2, то величина $F=\dfrac{\frac{U}{k_1}}{\frac{V}{k_2}}$ имеет распределение Фишера F со степенями свободы k_1 и k_2. Плотность этого распределения

$$p(x)=\begin{cases}0,\ при\ x\le 0\\ C_0\dfrac{x^{\frac{(k_1-2)}{2}}}{(k_2+k_1x)^{\frac{k_1+k_2}{2}}},\ при\ x>0\end{cases},\ где$$

$$C_0=\frac{\Gamma(\frac{k_1+k_2}{2})k_1^{\frac{k_1}{2}}k_2^{\frac{k_2}{2}}}{\Gamma(\frac{k_1}{2})\Gamma(\frac{k_2}{2})}.$$

Распределение Фишера F определяется двумя параметрами—числами степеней свободы.

23. Характеристические функции

0. 1 Случайная величина $Z(w)=X(w)+iY(w)$, где i—мнимая единица, т.е. $i=\sqrt{-1}$,а X и Y—действительные случайные величины, называется <u>комплекснозначной</u> случайной величиной. ($i^2=-1$).

0. 2 Математическим ожиданием комплекснозначной случайной величины Z называется $MZ=MX+iMY$. Все свойства математического ожидания остаются справедливыми для комплекснозначных случайных величин.

0. 3 Комплекснозначные случайные величины $Z_1=X_1+iY_1$ и $Z_2=X_2+iY_2$ называются независимыми, если независимы соответственно X_1 и X_2, X_1 и Y_2, Y_1 и X_2, Y_1 и Y_2.

<u>Свойство комплекснозначных случайных величин.</u>

Если комлекснозначные случайные величины Z_1 и Z_2—независимы, то математическое ожидание их произведения равно произведению математических ожиданий, т.е. $M(Z_1\cdot Z_2)=MZ_1\cdot MZ_2$.

$$M(Z_1 \cdot Z_2) = M((X_1 + iY_1)(X_2 + iY_2)) = M(X_1 \cdot X_2 - Y_1 \cdot Y_2 + i(Y_1 \cdot X_2 + X_1 \cdot Y_2)) =$$

$$= M(X_1X_2 - Y_1Y_2) + iM(Y_1X_2 + X_1Y_2) = MX_1MX_2 - MY_1M_2Y + iM(MY_1MX_2 + MX_1MY_2) =$$
$$= MX_1(MX_2 + iMY_2) + iMY_1(MX_2 + iMY_2) = (MX_1 + iMY_1)(MX_2 + iMY_2) = MZ_1 \cdot MZ_2$$
.

0. 4 Характеристической функцией случайной величины ξ называется функция $\varphi_\xi(t) = \varphi(t) = Me^{it\xi}$, где $i = \sqrt{-1}$.

Формулы для вычисления характеристической функции.

Случай 1. Пусть ξ—дискретная случайная величина с рядом распределения

ξ	x_1	x_2	…
P	p_1	p_2	…

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itx_k} p_k .$$

Случай 2. Пусть ξ—целочисленная случайная величина с плотностью $p_\xi(x)$. Тогда характеристическая функция $\varphi_\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p_\xi(x) dx$.

Пример 1. Пусть ξ—целочисленная случайная величина с производящей функцией $P(Z) = P_\xi(Z) = MZ^\xi$. Тогда характеристическая функция случайной величины ξ $\varphi_\xi(t) = Me^{it\xi} = M(e^{it})^\xi = [Z = e^{it}] = P(e^{it})$—производящая функция от аргумента e^{it}.

Пример 2. Пусть случайная величина ξ имеет биномиальное распределение с параметрами (n,p), т.е. $\xi \sim B(n,p)$. Найти характеристическую функцию $\varphi_\xi(t)$.

$P(\xi = m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, m=0,1,2…,n.

$t \neq 0$.

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} e^{itm} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m (p \cdot e^{it})^m q^{n-m} = (pe^{it} + q)^n .$$

Если t=0, то $\varphi(0) = 1$.

Из примера 1, § 12 найдена производящая функция случайной величины ξ, $P_\xi(Z) = P(Z) = (pz + q)^n$, если $\xi \sim B(n,p)$.

Пример 3. Пусть случайная величина ξ имеет пуассоновское распределение с параметром λ, т.е. $\xi \sim \prod(\lambda)$. Найти характеристическую и производящую функции.

$$P(\xi = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \text{ m=0,1,2,…}$$

Если $t \neq 0$

$$\varphi_\xi(t)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}e^{itm}=e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{it})^m}{m!}=e^{-\lambda}e^{\lambda\cdot e^{it}}=e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$ t=0, $\varphi(0)=1$.

Производящая функция $P_\xi(Z)=e^{\lambda(z-1)}$.

Таблица 1. Производящие функции.

Название распределения	Формула для $P(\xi=k)$	Производящая функция $P_\xi(Z)$
Геометрическое	$\boxed{(1-p)p^k}$, k=0,1,2,… pq^k	$\boxed{\frac{1-p}{1-pz}}$ $\frac{p}{1-qz}$
Биномиальное	$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$, k=0,1,2…,n.	$(1+p(z-1))^n=(pz+q)^n$
Пуассоновское	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, k=0,1,…	$e^{\lambda(z-1)}$

Таблица 2. Характеристические функции.

Название распределения	Формула для $P(\xi=k)$ или плотности	Характеристическая функция $\varphi(t)$
Биномиальное	$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$, k=0,1,2…	$(1+p(e^{it}-1))^n=$ $=(pe^{it}(1-p))^n=$ $=(pe^{it}+q)^n$
Пуассоновское	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, k=0,1,2,..	$e^{\lambda(e^{it}-1)}$
Равномерное	$\frac{1}{a},\quad 0\le x\le a$	$\frac{e^{iat}-1}{iat}$
Равномерное	$\frac{1}{2a},\quad -a\le x\le a$	$\frac{\sin at}{at}$
Показательное	$\lambda e^{-\lambda x},\quad x\ge 0$	$\frac{1}{1-\frac{it}{\lambda}}$
Нормальное распределение	$\frac{1}{G\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2G^2}}$	$e^{ita}-\frac{G^2t^2}{2}$

Свойства характеристических функций.

Свойство 1. Характеристическая функция определена для любой случайной величины. При этом $|\varphi(t)|\le 1$, $\varphi(0)=1$.

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p(x)dx.$$

$$|\varphi(t)| \le \int_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{itx}\right| p(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1.$$

Поскольку $\varphi(t) = Me^{it\xi}$, то $\varphi(0) = Me^{0} = 1$

Свойство 2. Характеристическая функция случайной величины $a\xi + b$, где a, b—некоторые числа.

$$\varphi_{a\xi+b}(t) = e^{itb}\varphi_{\xi}(at).$$

$$\varphi_{a\xi+b}(t) = Me^{it(a\xi+b)} = M(e^{itb}e^{ita\xi}) = e^{itb}Me^{i(at)\xi} = e^{itb}\varphi_{\xi}(at).$$

Свойство 3. Если случайные величины $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$—независимы, то характеристическая функция суммы данных случайных величин равна произведению характеристических функций этих случайных величин, т.е.

$$\varphi_{\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k}(t) = \prod_{k=1}^{n}\varphi_{\xi_k}(t)$$

$$\varphi_{\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k}(t) = Me^{it\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k} = M\left(\prod_{k=1}^{n} e^{it\xi_k}\right) \overset{нез-ть}{=} \prod_{k=1}^{n} M(e^{it\xi_k}) = \prod_{k=1}^{n}\varphi_{\xi_k}(t).$$

Свойство 4. Если $M\xi^n < +\infty$, характеристическая функция случайной величины ξ n раз дифференцируема, причем $\varphi^{(k)}(0) = i^k M\xi^k$, где $k \in \{1,2,...,n\}$.

Замечание. Необходимо отметить, что функция распределения величины однозначно определяется характеристической функцией. Таким образом, характеристическая функция является законом распределения случайной величины.

24. Законы больших чисел

0. 1 Последовательность случайных величин X_1, X_2,… называется сходящейся по вероятности к случайной величине X, если для любого положительного числа ε, т.е. $\forall\varepsilon > 0$

$P\{|X_n - X| \ge \varepsilon\} \to 0$ при $n \to \infty$. Обозначается $X_n \xrightarrow{P} X$.

0. 2 **Говорят, что последовательность** случайных величин X_1, X_2,… удовлетворяют закону больших чисел, если $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} MX_i \xrightarrow{P} 0$.

Теорема 1. Для любой случайной величины X, имеющей конечную дисперсию DX, справедливо неравенство Чебышёва:

Для $\forall\varepsilon > 0$. $\quad P\{|X - MX| \ge \varepsilon\} \le \frac{DX}{\varepsilon^2}$.

$$DX = M(X - MX)^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x - MX)^2 p_X(x)dx = \int\limits_{\{x \,|\, |x-MX| \geq \varepsilon\}}(x - MX)^2 p_X(x)dx +$$

$$+ \int\limits_{\{x \,|\, |x-MX| \geq \varepsilon\}}(x - MX)^2 p_X(x)dx \geq \int\limits_{\{x \,|\, |x-MX| \geq \varepsilon\}}(x - MX)^2 p_X(x)dx \geq \int\limits_{\{x \,|\, |x-MX| \geq \varepsilon\}}\varepsilon^2 p_X(x)dx = \varepsilon^2 \int\limits_{\{x \,|\, |x-MX| \geq \varepsilon\}} p_X(x)dx =$$

$$\underline{\varepsilon^2 P\{|x - MX| \geq \varepsilon\}.}$$

Таким образом, $DX \geq \varepsilon^2 P\{|X - MX| \geq \varepsilon\}$

$$P\{|x - MX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

Теорема 2. (закон больших чисел в форме Чебышёва).

Пусть $X_1, X_2, \ldots$—последовательность попарно независимых случайных величин, имеющих конечные дисперсии, ограниченные одной и той же постоянной, т.е. $DX_n \leq C$. Тогда эта последовательность удовлетворяет закону больших чисел.

Обозначим через $Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Нужно доказать, что $Z_n - MZ_n \xrightarrow{P} 0$.

$$0 \leq DZ_n = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i \leq \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} C = \frac{nC}{n^2} = \frac{C}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Отсюда $DZ_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \Rightarrow Z_n - MZ_n \xrightarrow{P} 0$ (т.к. $DZ_n = M(Z_n - MZ_n)^2$).

Теорема 3. (Закон больших чисел в форме Бернулли).

Пусть μ—число успехов в n независимых испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p в одном испытании, тогда $\frac{\mu}{n} \xrightarrow{P} p$.

Введем случайные величины μ_i—число успехов в i-ом испытании. Тогда $\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$.

μ_i	1	0
P	p	q

$M\mu_i = p$, $M\mu_i^2 = M\mu_i = p$, (т.к. $\mu_i^2 = \mu_i$).

$D\mu_i = M\mu_i^2 - (M\mu_i)^2 = p - p^2 = -(p - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$ (т.е. дисперсия ограничена $\frac{1}{4}$).

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$—независимы. По закону больших чисел в форме Чебышёва $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\mu_i \xrightarrow{P} 0$.

$\frac{\mu}{n} - \frac{np}{n} \xrightarrow{P} 0$.

$\frac{\mu}{n} \xrightarrow{P} p$.

В чем смысл закона больших чисел в форме Бернулли?

Пусть в результате эксперимента может произойти или не произойти событие А. P(A)—вероятность события А в одном эксперименте. Эксперимент повторяется N раз, N(A)—число появлений события А в этих N экспериментах.

$P_N(A) = \frac{N(A)}{N}$ —относительная частота появления события А.

$\boxed{\frac{N(A)}{N} \approx P(A)}$. N(A)=μ, $\frac{N(A)}{N} \xrightarrow{P} P(A)$.

Таким образом, закон больших чисел в форме Бернулли теоретически подтверждает устойчивость относительных частот, т.е. стабилизацию при большом числе испытаний относительной частоты вокруг вероятности (относительная частота ≈P(A)).

25. Центральная предельная теорема

Теорема. (Ц.П.Т.). Пусть $X_1, X_2, \ldots$—последовательность независимых случайных величин, имеющих один и тот же закон распределения и конечное математическое ожидание a и дисперсию G^2. Тогда при $n \to \infty$ вероятность того, что $P\{\frac{S_n - na}{G\sqrt{n}} < x\} \to N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, где $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

N(x)—функция стандартного нормального распределения.

Замечание 1. Центральная предельная теорема обосновывает тот факт, что нормальное распределение встречается в природе чаще других.

Замечание 2. При больших $n \to \infty$ $\frac{S_n}{G\sqrt{n}} \sim N(0,1)$, поэтому $S_n \sim N(na, nG^2)$. ЦПТ можно записать в другой форме: $n \to \infty$ $P\{b_1 \le \frac{S_n - na}{G\sqrt{n}} \le b_2\} \to \int_{b_1}^{b_2}\varphi(x)dx = N(b_2) - N(b_1)$.

26. Функция надежности. Показательный закон надежности. Характеристическое свойство показательного закона надежности

○ Будем называть **элементом** некоторое устройство, независимо от того, «простое» оно или «сложное».

Пусть элемент начинает работать в момент времени $t_0=0$, а по истечении временного интервала длительности t происходит его отказ. Обозначим через T непрерывную случайную величину—длительность времени безотказной работы элемента. Если элемент проработал безотказно (до наступления отказа) время, меньшее t, то, следовательно, за интервал времени длительности t наступит отказ.

Таким образом, функция распределения $F(t) = P\{T < t\}$ определяет **вероятность отказа** элемента за интервал времени длительности t. Следовательно, вероятность безотказной работы за этот же интервал времени длительности t, т.е. вероятность противоположного события T>t равна $\boxed{R(t) = P\{T > t\} = 1 - F(t)}$ (1).

- **Функцией надежности R(t)** называют функцию, определяющую вероятность безотказной работы элемента за интервал времени длительности t: $R(t) = P\{T > t\}$.

Часто длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение, функция распределения которого $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, где t>0.

Следовательно, в силу (1) функция надежности в случае показательного распределения времени безотказной работы элемента имеет вид: $\boxed{R(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}}$.

- **Показательным законом надежности** называют функцию $R(t) = e^{-\lambda t}$ (2), где λ—интенсивность отказов.

Формула (2) позволяет найти вероятность безотказной работы элемента на интервале времени длительности t, если время безотказной работы имеет показательное распределение.

<u>Пример.</u> Время безотказной работы элемента распределено по показательному закону с интенсивностью λ=0,02. Найти вероятность того, что элемент проработает безотказно 100ч.

$$R(100) = e^{-0,02 \cdot 100} = e^{-2} = 0{,}13534 \approx 0{,}14.$$

Показательный закон надежности весьма прост и удобен для решения задач, возникающих на практике. Очень многие формулы теории надежности значительно упрощаются. Объясняется это тем, что этот закон обладает следующим важным <u>свойством:</u> **вероятность безотказной** работы элемента на интервале времени длительности t не зависит от времени предшествующей работы до начала рассматриваемого интервала, а зависит от длительности интервала времени t (при заданной интенсивности отказов λ).

Введем обозначения событий:

A={безотказная работа на интервале (0, t_0) длительности t_0}; B={безотказная работа на интервале (t_0,t_0+t) длительности t}.

По формуле (2) $P(A) = e^{-\lambda t_0}$, $P(B) = e^{-\lambda t}$.

$$P(AB) = e^{-\lambda(t_0 + t)} = e^{-\lambda t_0} e^{-\lambda t} = P(A)P(B).$$

$$P(B \mid A) = P(B) = e^{-\lambda t}.$$

Полученная формула не содержит t_0, а содержит только t.

Таким образом, условная вероятность безотказной работы элемента в предположении, что элемент проработал безотказно на предшествующем интервале, равна безусловной вероятности.

Таким образом, в случае показательного закона надежности безотказная работа элемента «в прошлом» не сказывается на величине вероятности его безотказной работы «в ближайшем будущем».

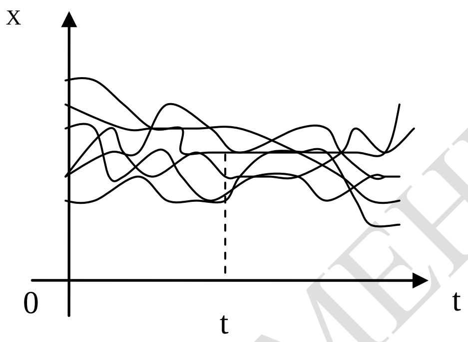
Замечание. Можно доказать, что рассматриваемым свойством обладает только показательное распределение. Поэтому, если на практике изучаемая случайная величина этим свойством обладает, то она распределена по показательному закону. Например, при допущении, что метеориты распределены равномерно в пространстве и во времени, вероятность попадания метеорита в космический корабль не зависит от того, попадали или не попадали метеориты в корабль до начала рассматриваемого интервала времени. Следовательно, случайные моменты времени попадания метеоритов в космический корабль распределены по показательному закону.

27. Случайные функции

- **Случайной функцией** называется функция X(t), значение которой при любом значении аргумента t является случайной величиной.

Другими словами, случайной функцией называется функция, которая в результате опыта может принять тот или иной конкретный вид, при этом заранее не известно, какой именно.

- Конкретный вид, принимаемый случайной величиной в результате опыта, называется **реализацией случайной функции.**



Т.к. на практике аргумент t чаще всего является временным, то случайную функцию иначе называют **случайным процессом.**

На рисунке изображено несколько реализаций некоторого случайного процесса.

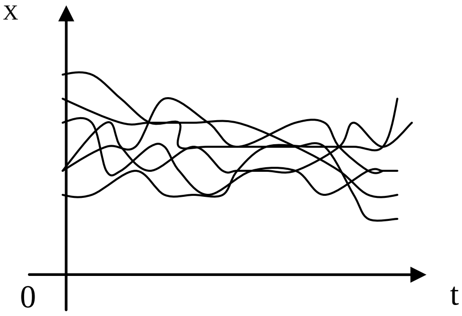
Если зафиксировать значение аргумента t, то случайная функция X(t) превратится в случайную величину, которую называют **сечением случайной функции**, соответствующим моменту времени t. Будем считать распределение сечения непрерывным. Тогда X(t) при данном t определяется плотностью распределения p(x; t).

Очевидно, p(x; t) не является исчерпывающей характеристикой случайной функции X(t), поскольку она не выражает зависимости между сечениями X(t) в разные моменты времени t. Более полную характеристику дает функция $p(x_1, x_2; t_1, t_2)$—совместная плотность распределения системы случайных величин $(X(t_1), X(t_1))$, где t_1 и t_2—произвольные значения аргумента t случайной функции. Еще более полную характеристику случайной функции X(t) даст совместимая плотность распределения системы трех случайных величин $(X(t_1), X(t_2), X(t_3))$ и т.д.

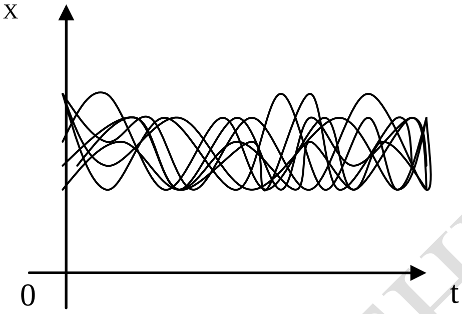
- Говорят, что случайный процесс **имеет порядок n**, если он полностью определяется плотностью совместимого распределения $p(x_1, x_2,..., x_n; t_1, t_2,..., t_n)$ n произвольных сечений процесса, т.е. системы n случайных величин $(X(t_1), X(t_2),..., X(t_n))$, где $X(t_i)$—сечение процесса, отвечающее моменту времени t_i, но не определяется заданием совместного распределения меньшего, чем n, числа сечений.

- Если плотность совместного распределения произвольных двух сечений процесса вполне его определяет, то такой процесс называется **марковским.**

Пусть имеется случайная функция X(t). Возникает задача описания ее с помощью одной или нескольких неслучайных характеристик. В качестве первой из них естественно взять функцию $m_X(t) = M(X(t))$—математическое ожидание случайного процесса. В качестве второй берется среднее квадратическое отклонение случайного процесса $G_X(t) = \sqrt{D(X(t))}$.



Эти характеристики являются некоторыми функциями от t. Первая из них—это средняя траектория для всех возможных реализаций. Вторая характеризует возможный разброс реализаций случайной функции около средней траектории. Но и этих характеристик недостаточно. Важно знать зависимость величин $X(t_1)$ и $X(t_2)$. Эту зависимость можно характеризовать с помощью корреляционной функции или корреляционного момента.



$K_X(t_1,t_2) = M(X(t_1) - m_x(t_1))(X(t_2) - m_x(t_2))$. (1)

Пусть имеются два случайных процесса, по нескольку реализаций которых изображено на рисунках.

У этих случайных процессов примерно одинаковые математические ожидания и средние квадратичные отклонения. Тем не менее это различные процессы. Всякая реализация для случайной функции $X_1(t)$ медленно меняет свои значения с изменением t, чего нельзя сказать о случайной функции $X_2(t)$. У первого процесса зависимость между сечениями $X_1(t)$ и $X_1(t+\Delta t)$ будет больше, чем зависимость для сечений $X_2(t)$ и $X_2(t+\Delta t)$ второго процесса, т.е. $K_{X_1}(t,t+\Delta t)$ убывает медленнее, чем $K_{X_2}(t,t+\Delta t)$, при увеличении Δt. Во втором случае процесс быстрее «забывает» свое прошлое.

Остановимся на свойствах корреляционной функции, которые вытекают из свойств корреляционного момента пары случайных величин.

Свойство 1. Свойство симметричности $K_X(t_1,t_2) = K_X(t_2,t_1)$.

Свойство 2. Если к случайной функции X(t) прибавить неслучайное слагаемое $\varphi(t)$, то от этого корреляционная функция $K_X(t_1,t_2)$ не изменится, т.е. $K_{X(t)+\varphi(t)}(t_1,t_2) = K_{X(t)}(t_1,t_2)$.

Действительно,

$$K_{X(t)+\varphi(t)}(t_1,t_2) = M(X(t_1)+\varphi(t_1) - M(X(t_1)+\varphi(t_1)))(X(t_2)+\varphi(t_2) - M(X(t_2)+\varphi(t_2))) =$$

$$= M(X(t_1)+\varphi(t_1) - m_x(t_1) - \varphi(t_1))(X(t_2)+\varphi(t_2) - m_x(t_2) - \varphi(t_2)) =$$
$$= M(X(t_1) - m_x(t_1))(X(t_2) - m_x(t_2)) = K_{X(t)}(t_1,t_2)$$

Свойство 3. $K_{\varphi(t)X(t)}(t_1,t_2) = \varphi(t_1)\cdot\varphi(t_2)\cdot K_{X(t)}(t_1,t_2)$, где $\varphi(t)$—неслучайная функция.

$$K_{\varphi(t)X(t)}(t_1,t_2) = M(\varphi(t_1)X(t_1) - M(\varphi(t_1)X(t_1)))(\varphi(t_2)X(t_2) - M(\varphi(t_2)X(t_2))) =$$

$$= M(\varphi(t_1)X(t_1) - \varphi(t_1)M(X(t_1)))(\varphi(t_2)X(t_2) - \varphi(t_2)M(X(t_2))) =$$
$$= M(\varphi(t_1)(X(t_1) - m_x(t_1))\varphi(t_2)X(t_2) - m_x(t_2))) = (\varphi(t_1)\varphi(t_2)M(X(t_1)) - m_x(t_1))(X(t_2)) -$$
$- m_x(t_2)) = \varphi(t_1)\varphi(t_2)K_x(t_1,t_2)$. При $\varphi(t) = C$ $K_{CX}(T_1,t_2) = C^2 K_X(t_1,t_2)$

- **Центрированной случацной функцией** $\overset{o}{X}(t)$**,** соответствующей X(t), называется $\overset{o}{X}(t) = X(t) - m_x(t)$ (2)

Очевидно, математическое ожидание центрированной функции— тождественный нуль, среднее квадратичное отклонение и корреляционная функция такие же, как и у X(t).

- **Нормированной** называется случайная функция

$$\hat{X}(t) = \frac{\overset{o}{X}}{G_x(t)} = \frac{X(t) - m_x(t)}{G_x(t)} \quad (3),$$

$m_{\hat{X}}(t) = 0$, $G_{\hat{X}}(t) = 1$.

Для этой функции $m_{\hat{X}}(t) = 0$, $G_{\hat{X}}(t) = 1$, $K_{\hat{X}}(t_1,t_2) = r_x(t_1,t_2)$— коэффициент линейной корреляции между $X(t_1)$ и $X(t_2)$.

28. Взаимно корреляционная функция

Во многих задачах можно встретиться с тем, что имеются 2 случайных процесса, которые оказывают влияние друг на друга. Это влияние может быть оценено с помощью взаимной корреляционной функции, которая определяется по формуле $R_{X,Y}(t_1,t_2)M(\overset{o}{X}(t_1)\overset{o}{Y}(t_2))$ (4).

Здесь X(t) и Y(t)—два случайных процесса:

$\overset{o}{X}(t) = X(t) - m_x(t)$; $\overset{o}{Y}(t) = Y(t) - m_y(t)$.

Рассмотрим случайный процесс Z(t), равный алгебраической сумме случайных процессов X(t) и Y(t):

$Z(t) = X(t) \pm Y(t)$ (5).

Найдем корреляционную функцию для процесса Z(t):

$$K_Z(t_1,t_2)M(\overset{o}{Z}(t_1)\overset{o}{Z}(t_2)) = M((\overset{o}{X}(t_1) \pm \overset{o}{Y}(t_2))(\overset{o}{X}(t_2) \pm \overset{o}{Y}(t_2))) =$$

$$= M(\overset{o}{X}(t_1)\overset{o}{X}(t_2) + \overset{o}{Y}(t_1)\overset{o}{Y}(t_2) \pm \overset{o}{X}(t_1)\overset{o}{Y}(t_2) \pm \overset{o}{Y}(t_1)\overset{o}{X}(t_2)) =$$

$$= M(\overset{o}{X}(t_1)\overset{o}{X}(t_2)) + M(\overset{o}{Y}(t_1)\overset{o}{Y}(t_2)) \pm M(\overset{o}{X}(t_1)\overset{o}{Y}(t_2)) \pm M(\overset{o}{Y}(t_1)\overset{o}{X}(t_2)) =$$

$$= K_X(t_1,t_2) + K_Y(t_1,t_2) \pm R_{XY}(t_1,t_2) \pm R_{YX}(t_1,t_2).$$

Таким образом,

$$K_{X \pm Y}(t_1,t_2) = K_X(t_1,t_2) + K_Y(t_1,t_2) \pm R_{XY}(t_1,t_2) \pm R_{XY}(t_2,t_1). \qquad (6)$$

В случае, если случайные функции X(t) и Y(t) не коррелирован ны, то при $\forall t_1$ и t_2 $M(X(t_1)Y(t_2)) = M(X(t_1))M(Y(t_2))$, взаимно корреляционная функция случайных функций тождественно равна нулю и $K_{X \pm Y}(t_1,t_2) = K_X(t_1,t_2) + K_Y(t_1,t_2)$ (7) , т.е. корреляционная функция алгебраической суммы некоррелированных функций равна сумме их корреляционных функций.

Если $X(t) = \sum_{i=1}^{n} X_i(t)$, то $K_X(t_1,t_2) = \sum_{i=1}^{n} K_{X_i}(t_1,t_2) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} R_{X_i X_j}(t_1,t_2)$ (8).

При некоррелированности слагаемых имеем $K_X(t_1,t_2) = \sum_{i=1}^{n} K_{X_i}(t_1,t_2)$ (9).

<u>Пример 1.</u> Пусть случайный процесс определяется формулой $X(t) = X \sin wt$, $Y(t) = Y \cos wt$, где X,Y—случайные величины. Требуется найти основные характеристики этого процесса, если $MX = a,\ MY = a, DX = G^2, DY = G^2$.

На основании свойств математического ожидания и дисперсии имеем:

$$m_{X(t)}(t) = M(X \sin wt) = \sin wt\, MX = a \sin wt;$$

$$G_{X(t)}(t) = G|\sin wt|.$$

Корреляционная функция находится по формуле (1).

$$K_{X(t)}(t_1,t_2) = K_{X \sin wt}(t_1,t_2) = \sin wt_1 \sin wt_2\, M((X-a)(X-a)) =$$

$$= \sin wt_1 \sin wt_2\, M(X-a)^2 = \sin wt_2 \sin wt_2 G^2.$$

$$m_{Y(t)}(t) = a \cos wt;\ \ G_{Y(t)}(t) = G|\cos wt|,\ \ K_{Y(t)}(t_1,t_2) = G^2 \cos wt_1 \cos wt_2.$$

<u>Пример 2.</u> Пусть X и Y—некоррелированные случайные величины, $MX = MY = 0$, $DX = DY = G^2$. Требуется найти корреляционную функцию для случайного процесса $Z(t) = X \sin wt + Y \cos wt$.

$$K_Z(t_1,t_2) = K_{X(t)}(t_1,t_2) + K_{Y(t)}(t_1,t_2) = G^2 \sin wt_1 \sin wt_2 + G^2 \cos wt_1 \cdot \cos wt_2 =$$

$$= G^2(\sin wt_1 \sin wt_2 + \cos wt_1 \cos wt_2) = G^2 \cos(t_2 - t_1)w.$$

29. Стационарный процесс

- Процесс X(t) называется **стационарным в узком смысле,** если плотность его распределения $p(x_1,x_2,...,x_n;t_1,t_2,...,t_n)$ удовлетворяет условию $p(x_1,x_2,...,x_n;t_1+\tau,t_2+\tau,...,t_n+\tau)=p(x_1,x_2,...,x_n;t_1,t_2,...,t_n)$ (1) для $\forall t_1,t_2,..,t_n,\tau,n$. Если (1) выполняется для n=2, то случайный процесс называется **стационарным в широком смысле**.

Для стационарных процессов

$$m_x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x,t)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x,t+\tau)dx=m_x(t+\tau)=const.$$

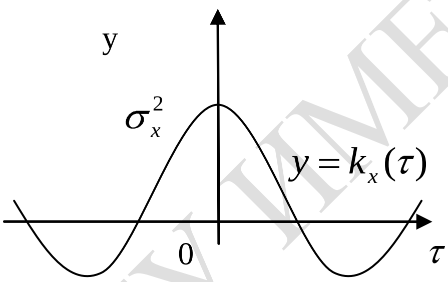
Аналогично можно показать, что $G_X(t)$ также не зависит от времени t. Переходим к нахождению корреляционной функции случайного процесса:

$$K_X(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x_1-m_x(t_1))(x_2-m_x(t_2))p(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x_1-m_x(t-\bar{\tau}))(x_2-m_x(t_2-\bar{\tau}))p(x_1,x_2;t_1-\bar{\tau},t_2-\bar{\tau})dx_1dx_2=K_X(t_1-\bar{\tau},t_2-\bar{\tau})$$

Положим $\bar{\tau}=t_1$, тогда $K_X(t_1,t_2)=K_X(0,t_2-t_1)=k_X(t_2-t_1)$ зависит от разности t_2-t_1. Положим $t_2-t_1=\tau$. Тогда имеем $K_X(0,t_2-t_1)=k_X(\tau)$. Т.к. $K_X(t_1,t_2)=K_X(t_2,t_1)=K_X(t_1,t_2)$, то корреляционная функция $k(\tau)$ четная.

На рисунке изображен график корреляционной функции одного из стационарных процессов.



Пусть X(t)—стационарный случайный процесс. Его корреляционная функция $k_X(\tau)$— четная функция от τ. Например, если $X(t)=X\sin wt+Y\cos wt$, где X и Y— некоррелированные случайные величины, у которых $DX=DY=G^2$, то $k_X(\tau)=G^2\cos wt$.

Теорема. Если X(t) и Y(t)—некоррелированные стационарные случайные функции, то их сумма $Z=X(t)+Y(t)$—также стационарная функция.

$$m_{Y+X}(t)=M(X(t)+Y(t))=MX(t)+MY(t)=m_x(t)+m_y(t)=m_x+m_y=const$$,

$$G_{X+Y}^2(t)=D(X(t))+D(Y(t))=G_x^2(t)+G_y^2(t)=G_x^2+G_y^2=const,$$

$$K_{X+Y}(t_1+t_2)=K_X(t_1,t_2)+K_Y(t_1,t_2)=k_X(\tau)+k_Y(\tau).\ \ (\tau=t_2-t_1).$$

Это означает, что Z(t)—стационарная в широком смысле случайная функция.

Литература

1. В.Е. Гмурман «Теория вероятностей и математическая статистика», М., «Высшая школа», 1977 г., 480 с.
2. В.Е. Гмурман «Руководство к решению задач по ТВ и МС», М., «Высшая школа», 1979, 400 с.
3. А.И. Герасимович «Математическая статистика», Минск, «Вышэйшая школа», 1983 г.
4. В.С. Пугачев «ТВ и МС», М., 1980 г.
5. Смирнов Н.В., Дунин-Барковский «Курс по ТВ и МС для технических приложений», М., Наука, 1969 г.
6. Бураковский В.В. Лабораторный практикум по курсу «ТВ и МС» для студентов математического и экономического факультетов. Гомель, ГГУ им. Ф. Скорины, 1993, 42 с.
7. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. Под редакцией А.А. Свешникова, Москва, 1965.
8. Бураковский В.В. Теория вероятностей и математическая статистика. Лабораторный практикум. Часть 1. Гомель, ГГУ им. Ф. Скорины, 2002, 52 с.