УДК 539.12

СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА-ГОРДОНА-ФОКА

Н.В. Максименко[1], С.М. Кучин[2]

[1]Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель
[2]Брянский государственный университет им. И.Г. Петровского, Брянск

SPECTRAL PROBLEM OF THE KLEIN-GORDON-FOCK EQUATION

N.V. Maksimenko[1], S.M. Kuchin[2]

[1]F. Scorina Gomel State University, Gomel
[2]I.G. Petrovsky Bryansk State University, Bryansk, Russia

Определены собственные значения и собственные функции связанной релятивистской системы на основе уравнения Клейна-Гордона-Фока со смешанной, скалярно-векторной связью.

Ключевые слова: *релятивистская связанная система, собственные значения и собственные функции.*

The eigenvalues and eigenfunctions of the relativistic bound system based on Klein-Gordon-Fock equation with a mixed, scalar-vector coupling are determined.

Keywords: *relativistic bound system, eigenvalues and eigenfunctions.*

Введение

Согласно современным представлениям, адроны являются связанными состояниями цветных кварков и глюонов. Описание спектров масс и электромагнитных характеристик таких микросистем основано на теории связанных состояний, которая базируется на основных принципах локальной квантовой теории поля. Непосредственный расчет указанных характеристик составных систем в рамках локальной квантовой теории поля основывается на модельных представлениях, которые приводят к непертурбативным эффектам.

В нерелятивистском случае описание таких систем осуществляется на основе уравнения Шредингера [1]. Однако при больших энергиях связи соответствующий подход должен быть существенно релятивистским. В работе [2] было показано, что особенности межкваркового взаимодействия состоят в том, что свойство запирания кварков может быть объяснено в рамках потенциальной модели в том случае, когда потенциал описывается суперпозицией лоренц-векторной и лоренц-скалярной составляющих. Поведение лоренц-скалярной части потенциала связано с динамической природой массы кварка, которая должна меняться при изменении расстояния между кварками. Удержание кварков происходит за счет роста их масс при удалении друг от друга. Свойство удержания кварков определяется динамическим изменением масс кварков.

Поэтому важное место в развитии релятивистской теории связанных состояний занимает уравнение Клейна-Гордона-Фока со смешанной, скалярно-векторной связью. Основное преимущество такого уравнения состоит в том, что оно служит адекватной математической моделью для широкого круга задач адронной физики, в которых возможен последовательный переход от двухчастичной теории к приближению внешнего поля. Для решения таких уравнений обычно применяют либо численные, либо асимптотические методы, например, как выполнено в работах [3]–[6].

В работе [7] было показано, что уравнение Шредингера для различных классов физических потенциалов может быть решено путем выбора надлежащего анзаца для собственных функций.

В данной работе мы получим точное решение уравнения Клейна-Гордона-Фока со смешанным (скалярно-векторным) потенциалом, используя некоторые ограничения на параметры потенциала. Результаты, полученные в данной работе, могут быть использованы не только для описания спектров кваркониев, но и для проверки корректности различных приближенных методов, используемых для решения уравнения Клейна-Гордона-Фока.

1 Решение уравнения Клейна-Гордона-Фока

Рассмотрим задачу о движении релятивистской частицы в центрально-симметричном поле $U(r) = ar - \dfrac{b}{r}$. Уравнение Клейна-Гордона-Фока для «приведенной» волновой функции $\chi_{nl}(r) = rR_{nl}(r)$ имеет вид:

$$\chi''_{nl} + \left[\left(E - ar + \frac{b}{r}\right)^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \mu^2(r)\right]\chi_{nl} = 0, \quad (1.1)$$

где $\mu(r)$ – некоторая функция расстояния.

Для удобства перехода к нерелятивистскому пределу выделим эту зависимость $\mu(r)=\mu_0+m(r)$, где μ_0 – масса «свободной частицы».

В нерелятивистском пределе, как было показано в работе [2], потенциал, используемый в уравнении Шредингера для частиц с переменной массой, определяется суммой потенциальной энергии во внешнем поле и приростом массы этой частицы, т. е.

$$V(r)=m(r)+U(r). \qquad (1.2)$$

Как известно из квантовой хромодинамики (КХД) [8]–[10], на малых расстояниях в силу свойства асимптотической свободы основной вклад в кварк-антикварковое взаимодействие дает обычный кулоновский потенциал одноглюонного обмена. С ростом расстояния основным становится скалярное запирающее взаимодействие (конфайнмент). Расчеты, выполненные в рамках КХД-теории на основе решеточных подходов [11]–[13], свидетельствуют о том, что доминирует линейный (скалярный) конфайнмент.

Для того, чтобы потенциал (1.2) удовлетворял этим условиям, необходимо, чтобы зависимость массы от расстояния имела линейный характер, т. е. $m(r)=\mu_1 r$.

Будем искать решение уравнения (1.1) в виде:

$$\chi_{nl}=r^{\gamma}\exp\left(-\frac{1}{2}\alpha r^2-\beta r\right)\sum_{i=0}^{\infty}a_i r^i. \qquad (1.3)$$

Подставляя (1.3) в (1.1), получим следующую рекуррентную формулу для связи коэффициентов:

$$A_i a_i+B_{i+1}a_{i+1}+C_{i+2}a_{i+2}=0, \qquad (1.4)$$

где

$$A_i=\beta^2-\left(2i+2\gamma+1\right)\alpha+E^2-2ab-\mu_0^2,$$

$$B_i=-2\beta(\gamma+i)+2bE,$$

$$C_i=(i+\gamma)(i+\gamma-1)+b^2-l(l+1).$$

Причем, коэффициенты α, β и γ определяются из выражений

$$\alpha^2+a^2-\mu_1^2=0,$$

$$\alpha\beta-Ea-\mu_0\mu_1=0,$$

$$\gamma(\gamma-1)+b^2-l(l+1)=0.$$

Из последнего выражения находим:

$$\gamma=\gamma_{\pm}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2-b^2}.$$

Если a_n последний неисчезающий коэффициент в (1.3), т. е. $a_n\neq 0$, но $a_{n+1}=a_{n+2}=\ldots=0$, то из рекуррентной формулы (1.4) получаем: $A_n a_n=0$, но так как $a_n\neq 0$, то $A_n=0$, т. е.

$$\beta^2-(2n+2\gamma+1)\alpha+E_n^2-2ab-\mu_0^2=0.$$

Заменяя α и β, находим:

$$E_n=\frac{1}{\mu_1}\Big[-\mu_0 a\pm$$

$$\pm\sqrt{2\left(\mu_1^2-a^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(n+\gamma_{\pm}+\frac{1}{2}\right)+2ab\left(\mu_1^2-a^2\right)}\,\Big].$$

В свою очередь, связь между коэффициентами при a_n, входящими в рекуррентную формулу, находим из условия равенства нулю детерминанта, составленного из этих коэффициентов:

$$\begin{vmatrix} B_0 & C_1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ A_0 & B_1 & C_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & A_{n-1} & B_n \end{vmatrix}=0,$$

где $n=0,1,2,\ldots.$

Таким образом, можно выписать выражения для собственных значений и собственных функций для различных *n*. Например, если *n*=0, то энергия основного состояния имеет вид:

$$E_0=\frac{1}{\mu_1}\Big[-\mu_0 a\pm$$

$$\pm\sqrt{2\left(\mu_1^2-a^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(\gamma_{\pm}+\frac{1}{2}\right)+2ab\left(\mu_1^2-a^2\right)}\,\Big].$$

Выражение для волновой функции имеет вид:

$$\psi_{0,l,m}=\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\mu_1^2-a^2r^2}-\frac{E_0 a+\mu_0\mu_1}{\sqrt{\mu_1^2-a^2}}r\right)\cdot$$

$$\cdot a_0 r^{(\gamma_{\pm}-1)}Y_{l,m}\left(\theta,\varphi\right).$$

Связь между параметрами потенциала и орбитальным квантовым числом имеет вид:

$$E_0\left(\sqrt{\mu_1^2-a^2b}-a\gamma\right)=\mu_0\mu_1\gamma.$$

Коэффициент a_0 определяется из условия нормировки.

Если *n*=1, то

$$E_1=\frac{1}{\mu_1}\Big[-\mu_0 a\pm$$

$$\pm\sqrt{2\left(\mu_1^2-a^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(\gamma_{\pm}+\frac{3}{2}\right)+2ab\left(\mu_1^2-a^2\right)}\,\Big],$$

$$\psi_{1,l,m}=\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\mu_1^2-a^2r^2}-\frac{E_1 a+\mu_0\mu_1}{\sqrt{\mu_1^2-a^2}}r\right)\cdot$$

$$\cdot\left(a_0 r^{(\gamma_{\pm}-1)}+a_1 r^{\gamma_{\pm}}\right)Y_{l,m}\left(\theta,\varphi\right).$$

где коэффициенты a_0 и a_1 связаны соотношением:

$$\gamma a_1^2+a_1 a_0\beta-\alpha a_0^2=0.$$

Причем система уравнений для a_0 и a_1 имеет нетривиальное решение, когда коэффициенты при a_0 и a_1 удовлетворяют соотношению:

$$\begin{vmatrix} B_0 & C_1 \\ A_0 & B_1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (1.5)$$

где

$$A_0 = \beta^2 - (2\gamma+1)\alpha + E_1^2 - 2ab - \mu_0^2,$$

$$B_0 = -2\beta\gamma + 2bE_1,$$

$$B_1 = -2\beta(\gamma+1) + 2bE_1,$$

$$C_1 = \gamma(\gamma+1) + b^2 - l(l+1).$$

Соотношение (1.5) выражает связь между параметрами потенциала и орбитальным квантовым числом.

Заключение

Таким образом, в данной работе было получено точное решение уравнения Клейна-Гордона-Фока со смешанным (скалярно-векторным) потенциалом, используя некоторые ограничения на параметры потенциала.

Все собственные значения и волновые функции получены в аналитическом виде. Число нулей полученных волновых функций соответствует номеру возбуждения, что отвечает известной теореме о числе узлов волновой функции.

Связь между коэффициентами волновой функции находится из явной зависимости детерминанта полученной системы от параметров потенциала, что, в свою очередь, дает возможность определить зависимость спектра решений от этих параметров. Отметим, что в случае кулоновского потенциала такая связь между коэффициентами отсутствует, что приводит к известному спектру масс в кулоновском потенциале.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Быков, А.А.* Потенциальные модели кваркония / А.А. Быков, И.М. Дремин, А.В. Леонидов // Успехи физических наук. – 1984, Т. 143, Вып. 1. – С. 3–31.

2. *Дремин, И.М.* Уравнения движения частиц с переменной массой и удержание кварков / И.М. Дремин, А.В. Леонидов // Письма в журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1983. – Т. 37, Вып. 12. – С. 617–619.

3. *Mustafa, O.* Shifted 1/*N* expansion for the Klein-Gordon equation with vector and scalar potentials / O. Mustafa, R. Sever // Phys. Rev. – 1991. – A44. – P. 4142 – 4144.

4. *Papp, E.* Closed 1/*N* mass formulae for relativistic two-body Q1 anti-Q2 systems / E. Papp // Phys. Lett. – 1991. – B259. – P. 19–23.

5. *Stepanov, S.* A new approach to the 1/N-expansion for the Dirac equation / S. Stepanov, R. Tutik // Phys. Lett. A. – 1992. – V. 163. – P. 26–31.

6. *Barakat, T.* Perturbed Coulomb potentials in the Klein-Gordon equation via the shifted- l expansion technique / T. Barakat, M. Odeh, O. Mustafa // Journal of Physics A : Mathematical and General. – 1998. – V. 31, № 15. – P. 3469–3479.

7. *Shi-Hai Dong.* Exact solutions to the Schrödinger equation for the potential $V(r) = ar^2 + br^{-4} + cr^{-6}$ in two dimensions / Shi-Hai Dong, Zhong-Qi Ma // J. Phys. A: Math. Gen. – 1998. – V. 31. – P. 9855.

8. *Description of relativistic heavy-light quark -antiquark systems via Dirac equation* / V.D. Mur [et al.] // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1994. – Т. 105, №1. – С. 3–28.

9. *Simonov, Yu.A.* Theory of light quarks in the confining vacuum / Yu.A. Simonov // Ядерная физика. –1997. – Т. 60, № 12. – С. 2252–2276.

10. *Simonov, Yu.A.* Spectrum and regge-trajectories in QCD / Yu.A. Simonov // Ядерная физика. – 2003. – Т. 66. – С. 2088–2094.

11. Симонов, Ю.А. Конфайнмент / Ю.А. Симонов // Успехи физических наук. – 1996. – Т. 166, №4. – С. 337–361.

12. *Кузьменко, Д.С.* Вакуум, конфайнмент и структуры КХД в методе вакуумных коррелятор ов / Д.С. Кузьменко, Ю.А. Симонов, В.И. Шевченко // Успехи физических наук. – 2004. – Т. 174, № 1. – С. 3–18.

13. *Невылетание цвета и структура адронов в решеточной хромодинамике* / В.Г. Борняков [и др.] // Успехи физических наук. – 2004. – Т. 174, №1. – С. 19–38.

Поступила в редакцию 14.06.10.