**ФИЗИКА**

УДК 519.12

# ГРАВИТАЦИОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

**А.Н. Сердюков, А.Н. Егоров**

*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель*

# THE GRAVITATIONAL INTERACTION IN THE ELECTRODYNAMICS OF CONTINUOUS MEDIUM

**A.N. Serdyukov, A.N. Yegorov**

*F. Scorina Gomel State University, Gomel*

Построены уравнения электродинамики сплошной среды, находящейся в сильном гравитационном поле. Рассмотрено влияние тяготения на распространение электромагнитных волн в среде с эффектом Фарадея. Полученные решения для неоднородных электромагнитных волн позволяют моделировать процесс распространения электромагнитного излучения в материи нейтронных звезд.

***Ключевые слова***: *гравитационное взаимодействие, электромагнитные волны.*

The electrodynamical equations for continuous medium in strong gravitational field are constructed. The influence of gravitation on propagation of electromagnetic waves in the medium with Faraday effect is considered. The received solutions for non-uniform electromagnetic waves allow to model the propagation of electromagnetic radiation in the matter of neutron stars.

***Keywords***: *gravitational interaction, electromagnetic waves.*

## *Введение*

Универсальность гравитационного взаимодействия предполагает его участие в формировании реального распределения энергии (массы) в любой физической системе. При этом следует подчеркнуть, что влияние поля тяготения на реальное распределение массы в любой физической системе не исчерпывается только вкладом собственной массы этого поля в общую массу системы. Не менее важным фактором, влияющим на формирование реального распределения энергии, является гравитационный дефект массы. Это означает, что без включения в рассмотрение энергии присутствующего в системе поля тяготения и без учета гравитационного дефекта массы, связанной гравитационным взаимодействием, формулировка закона сохранения энергии для любой системы в принципе остается незавершенной и, вообще говоря, нуждается в корректировке.

## *1 Дефект массы при гравитационном взаимодействии*

Зависимость реальной массы материальных частиц и полей от гравитационного потенциала является важным обстоятельством, прежде не замечавшимся при анализе энергетики гравитирующих систем. Принципиальную необходимость учета гравитационного дефекта массы тел убедительно демонстрирует подсчет баланса энергии простейших систем при изменении их конфигурации. В частности, проведенный в [1] полный анализ изменения энергетического состояния незаряженной гравитирующей сферической оболочки при ее расширении под действием внешних сил позволил получить выражение

$$w_{\mathrm{g}} = \frac{\mathbf{g}^2}{8\pi\kappa c^2}\mathrm{e}^{\Phi/c^2}$$

для реальной плотности массы поля тяготения и доказать ее положительную определенность.

Для физической системы, пространственное распределение затравочной массы которой известно, учет дефекта массы при гравитационном взаимодействии является достаточно простой задачей, которая для точечной пробной частицы во внешнем поле тяготения была решена еще в работе [2]. Постулируя ковариантную форму уравнения движения частицы в гравитационном поле со скалярным потенциалом Ф

$$\frac{d}{d\tau}mu_\mu = -m\partial_\mu\Phi\,, \qquad (1.1)$$

где $d\tau = \sqrt{1-\upsilon^2/c^2}\,dt$ – собственное время, Нордстрём в [2] показал, что из этого уравнения с необходимостью следует зависимость массы (энергии) частицы от потенциала поля. Он допустил, что эффективная масса $m$ частицы в гравитационном поле является переменной величиной и в результате умножения (1.1) на четырехмерную скорость $u_\mu = \partial x_\mu/\partial\tau$ с учетом ортогональности 4-векторов $u_\mu$ и $\partial u_\mu/\partial\tau$ пришел к уравнению

$$c^2\frac{dm}{d\tau} = m\frac{d\Phi}{d\tau}\,,$$

интегрируя которое, получил связь

$$m = m_0 \mathrm{e}^{\Phi/c^2} . \qquad (1.2)$$

между реальной массой $m$ частицы в гравитационном поле и ее затравочной массой $m_0$.

Если частица занимает некоторый не равный нулю объём и ее затравочная масса распределена в пространстве с плотностью $\boldsymbol{M}_0$, то в соответствии с (1.2) мы должны предположить для реальной массы $\boldsymbol{M}$ аналогичную зависимость от потенциала:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_0 \,\mathrm{e}^{\Phi/c^2} . \qquad (1.3)$$

Соотношение (1.3) автоматически учитывает дефект массы системы, затравочная масса которой связана гравитационным взаимодействием.

### *2 Уравнения Максвелла с учетом гравитационного взаимодействия*

Приведенные выше рассуждения показывают, что вследствие гравитационного взаимодействия плотность затравочной массы действительно не соответствует реальному распределению массы физической системы. Это обстоятельство в полной мере относится и к рассматриваемому в настоящей статье электромагнитному полю. Реальная плотность энергии микроскопического электромагнитного поля $\mathbf{d}$, $\mathbf{h}$ с учетом вычитания энергии связи, согласно (1.3), должна записываться в виде

$$w_{\mathrm{em}} = \frac{1}{8\pi}\left(\mathbf{d}^2 + \mathbf{h}^2\right)\mathrm{e}^{\Phi/c^2} , \qquad (2.1)$$

где Φ – потенциал поля тяготения, создаваемого материальными частицами и электромагнитным полем.

В системе уравнений Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\frac{1}{\mathrm{c}}\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} , \qquad (2.2)$$

$$\nabla \mathbf{b} = 0 , \qquad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{h} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} , \qquad (2.4)$$

$$\nabla \mathbf{d} = 4\pi\rho \qquad (2.5)$$

и материальных уравнений

$$\mathbf{d} = \varepsilon^{(0)}\mathbf{e} , \quad \mathbf{b} = \mu^{(0)}\mathbf{h} \qquad (2.6)$$

с вещественными константами $\varepsilon^{(0)}$ и $\mu^{(0)}$ закон сохранения энергии электромагнитного поля имеет обычный вид

$$\nabla \frac{c}{4\pi}\mathbf{e}\times\mathbf{h} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{8\pi}(\mathbf{ed} + \mathbf{hb}) = -\mathbf{ej} .$$

Из сравнения входящей сюда стандартной плотности энергии

$$w_{\mathrm{em}} = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{ed} + \mathbf{hb})$$

и формулы (2.1) следует, что для учета гравитационного взаимодействия в структуре микроскопического электромагнитного поля следует в соотношениях (2.6) положить

$$\varepsilon^{(0)} = \mathrm{e}^{-\Phi/c^2} , \quad \mu^{(0)} = \mathrm{e}^{\Phi/c^2} . \qquad (2.7)$$

Таким образом, электромагнитное поле в присутствии поля тяготения описывается уравнениями Максвелла (2.2)–(2.5), включающими четыре полевых вектора, которые связаны материальными уравнениями (2.6), (2.7).

### *3 Уравнения макроскопической электродинамики*

Переход к макроскопическому электромагнитному полю осуществим путем обычного усреднения по физически бесконечно малым объемам входящих в уравнения Максвелла величин. Для усредненных полей $\mathbf{e}$ и $\mathbf{b}$ введем обозначения

$$\langle \mathbf{e} \rangle = \mathbf{E} , \quad \langle \mathbf{b} \rangle = \mathbf{B} .$$

В соответствии с (2.6) будем иметь

$$\langle \mathbf{d} \rangle = \mathrm{e}^{-\Phi/c^2}\mathbf{E} , \quad \langle \mathbf{h} \rangle = \mathrm{e}^{-\Phi/c^2}\mathbf{B} .$$

Проведем также обычное разбиение связанных со средой токов на токи поляризации и токи намагничения, записав

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \mathbf{j}_{\mathrm{ext}} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + c\nabla \times \mathbf{M} ,$$

$$\langle \rho \rangle = \rho_{\mathrm{ext}} + \nabla \mathbf{P} ,$$

где $\rho_{\mathrm{ext}}$ и $\mathbf{j}_{\mathrm{ext}}$ – плотности внешних зарядов и электрического тока. При усреднении второй пары уравнений Максвелла такое разбиение позволяет выделить две линейные комбинации

$$\mathbf{D} = \mathrm{e}^{-\Phi/c^2}\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} , \qquad (3.1)$$

$$\mathbf{H} = \mathrm{e}^{-\Phi/c^2}\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M} , \qquad (3.2)$$

включающие векторы электрической и магнитной поляризации среды.

В результате мы приходим к обычной форме уравнений Максвелла макроскопической электродинамики

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} , \qquad (3.3)$$

$$\nabla \mathbf{B} = 0 , \qquad (3.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{\mathrm{ext}} , \qquad (3.5)$$

$$\nabla \mathbf{D} = 4\pi\rho_{\mathrm{ext}} . \qquad (3.6)$$

Эти уравнения, как обычно, должны быть дополнены материальными уравнениями, конкретная форма которых определяется соотношениями (3.1), (3.2), если конкретизирована зависимость электрической поляризации $\mathbf{P}$ и намагниченности $\mathbf{M}$ среды от полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$.

### *4 Электромагнитные волны в магнитоактивной среде в присутствии поля тяготения*

Обратимся далее к рассмотрению электромагнитных волн в намагниченной среде с эффектом Фарадея, находящейся в постоянном поле тяготения $\mathbf{g} = -\nabla\Phi$. Материальные уравнения для поля в такой среде с учетом (3.1), (3.2) представим в виде

$$\mathbf{E} = \varepsilon^{-1}\mathbf{D}\,,\quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}\,, \tag{4.1}$$

где

$$\varepsilon^{-1} = \mathrm{e}^{\Phi/c^2}\left(\frac{1}{\varepsilon^{(0)}} + i\mathbf{G}\times\right), \tag{4.2}$$

$$\mu = \mathrm{e}^{\Phi/c^2}\,, \tag{4.3}$$

$\mathbf{G}$ – вектор магнитной гирации.

Из (3.3)–(3.6), (4.1)–(4.3) при отсутствии в среде внешних токов и зарядов находим уравнение для напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$

$$\nabla\times\left(\frac{1}{\varepsilon^{(0)}} + i\mathbf{G}\times\right)\nabla\times\mathbf{H} - \\ -\frac{1}{c^2}\mathbf{g}\times\left(\frac{1}{\varepsilon^{(0)}} + i\mathbf{G}\times\right)\nabla\times\mathbf{H} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{H} = 0. \tag{4.4}$$

Его решение будем искать в виде плоской волны с постоянной комплексной векторной амплитудой $\mathbf{H}_0$.

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0\,\mathrm{e}^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\,. \tag{4.5}$$

Подставляя (4.5) в (4.4), придем к алгебраическому уравнению

$$\frac{1}{\varepsilon^{(0)}}\mathbf{k}\times\mathbf{k}\times\mathbf{H} + i\mathbf{k}\times\mathbf{G}\times\mathbf{k}\times\mathbf{H} + \frac{i}{c^2\varepsilon^{(0)}}\mathbf{g}\times\mathbf{k}\times\mathbf{H} - \\ -\frac{1}{c^2}\mathbf{g}\times\mathbf{G}\times\mathbf{k}\times\mathbf{H} + \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{H} = 0. \tag{4.6}$$

Учитывая далее вытекающее из (3.4) равенство

$$\mathbf{kH} + \frac{i}{c^2}\mathbf{gH} = 0\,,$$

а также известное тождество для двойного векторного произведения, из (4.6) получим

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{k^2}{\varepsilon^{(0)}} - \frac{i}{c^2\varepsilon^{(0)}}\mathbf{kg} - i\mathbf{kG}\circ\mathbf{k}\times\right)\mathbf{H} - \\ -\frac{1}{c^2}\mathbf{g}\times\mathbf{k}\circ\mathbf{GH} + \frac{1}{c^2}\mathbf{kG}\circ\mathbf{g}\times\mathbf{H} = 0. \tag{4.7}$$

Рассмотрим далее случай, когда электромагнитная волна распространяется в направлении, коллинеарном вектору напряженности поля тяготения $\mathbf{g}$. При таком предположении можем записать

$$\mathbf{k} = N\frac{\omega}{c}\mathbf{n}\,, \tag{4.8}$$

$$\mathbf{g} = g\mathbf{n}\,, \tag{4.9}$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор, $N$ – показатель преломления волны (в общем случае комплексный). Использование (4.8), (4.9) позволяет существенно упростить уравнение (4.7):

$$\left(\varepsilon^{(0)} - \left(N^2 + i\frac{Ng}{c\omega}\right) - \\ - i\varepsilon^{(0)}\left(N^2 + i\frac{Ng}{c\omega}\right)\mathbf{nG}\circ\mathbf{n}\times\right)\mathbf{H} = 0.$$

Условием существования нетривиальных решений для поля $\mathbf{H}$ будет равенство нулю определителя этого уравнения

$$\left|\varepsilon^{(0)} - \left(N^2 + i\frac{Ng}{c\omega}\right) - i\varepsilon^{(0)}\left(N^2 + i\frac{Ng}{c\omega}\right)\mathbf{nG}\circ\mathbf{n}\times\right| = 0.$$

Отсюда следует уравнение для показателей преломления поперечных волн

$$\left[\varepsilon^{(0)} - \left(N^2 + i\frac{Ng}{c\omega}\right)\right]^2 - \left[\varepsilon^{(0)}\left(N^2 + i\frac{Ng}{c\omega}\right)\mathbf{nG}\right]^2 = 0\,.$$

Два его решения с положительной вещественной частью имеют вид

$$N^{\pm} = \sqrt{\frac{\varepsilon^{(0)}}{1\mp\varepsilon^{(0)}\mathbf{nG}} - \frac{g^2}{4c^2\omega^2}} - i\frac{g}{2c\omega}\,. \tag{4.10}$$

Эти решения соответствуют двум поперечным циркулярно-поляризованным (правой и левой) волнам, удовлетворяющим условию

$$\mathbf{n}\times\mathbf{H}^{\pm} = \pm i\mathbf{H}^{\pm}\,. \tag{4.11}$$

Равенства (4.8), (4.10) позволяют окончательно определить комплексные волновые векторы этих волн:

$$\mathbf{k}^{\pm} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\varepsilon^{(0)}}{1\mp\varepsilon^{(0)}\mathbf{nG}} - \frac{g^2}{4c^2\omega^2}}\,\mathbf{n} - i\frac{\mathbf{g}}{2c^2}\,. \tag{4.12}$$

В итоге с учетом (4.12) можем записать окончательные решения для векторов магнитного поля неоднородных циркулярно-поляризованных электромагнитных волн, распространяющихся в магнитоактивной среде в мощном поле тяготения:

$$\mathbf{H}^{\pm} = \mathbf{H}_0^{\pm}\exp\left(\frac{\mathbf{gr}}{2c^2}\right)\cdot \\ \cdot\exp\left[i\left(\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\varepsilon^{(0)}}{1\mp\varepsilon^{(0)}\mathbf{nG}} - \frac{g^2}{4c^2\omega^2}}\cdot\mathbf{nr} - \omega t\right)\right]. \tag{4.13}$$

Из уравнения Максвелла (3.5) при $\mathbf{j}_{\mathrm{ext}} = 0$ также легко находим поле электрической индукции этих волн

$$\mathbf{D}^{\pm} = \mp\left(i\sqrt{\frac{\varepsilon^{(0)}}{1\mp\varepsilon^{(0)}\mathbf{nG}} - \frac{g^2}{4c^2\omega^2}} + \frac{g}{2c\omega}\right)\times \\ \times\mathbf{H}_0^{\pm}\exp\left(\frac{\mathbf{gr}}{2c^2}\right)\cdot \\ \cdot\exp\left[i\left(\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\varepsilon^{(0)}}{1\mp\varepsilon^{(0)}\mathbf{nG}} - \frac{g^2}{4c^2\omega^2}}\cdot\mathbf{nr} - \omega t\right)\right]. \tag{4.14}$$

Используя уравнения Максвелла и материальные уравнения, построим также решения для полей напряжённости электрического поля $\mathbf{E}$ и магнитной индукции $\mathbf{B}$, связанные с найденными решениями для вектора $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{B}^{\pm} = \mathbf{H}_0^{\pm}\exp\left(-\frac{\mathbf{gr}}{2c^2}\right)\cdot \\ \cdot\exp\left[i\left(\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\varepsilon^{(0)}}{1\mp\varepsilon^{(0)}\mathbf{nG}} - \frac{g^2}{4c^2\omega^2}}\cdot\mathbf{nr} - \omega t\right)\right], \tag{4.15}$$

$$\mathbf{E}^{\pm} = \mp\left(i\sqrt{\frac{\varepsilon^{(0)}}{1\mp\varepsilon^{(0)}\mathbf{nG}} - \frac{g^2}{4c^2\omega^2}} + \frac{g}{2c\omega}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon^{(0)}} \mp \mathbf{nG}\right)\times \mathbf{H}_0^{\pm}\exp\left(-\frac{\mathbf{gr}}{2c^2}\right)\cdot \qquad (4.16)$$

$$\cdot\exp\left[i\left(\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\varepsilon^{(0)}}{1\mp\varepsilon^{(0)}\mathbf{nG}} - \frac{g^2}{4c^2\omega^2}}\cdot\mathbf{nr} - \omega t\right)\right].$$

Векторы поля (4.13)–(4.16) неоднородных плоских электромагнитных волн в среде составляют единое решение уравнений Максвелла (3.3)–(3.6) и материальных уравнений (4.1)–(4.3).

***Заключение***

Подводя итог, отметим, что последовательный учет дефекта массы в распределении связанной гравитационным взаимодействием плотности энергии электромагнитного поля позволяет обосновать конкретный вид электродинамических материальных уравнений, учитывающих влияние тяготения на электромагнитные процессы. Предложенный способ описания гравитационного взаимодействия в структуре электромагнитного поля позволяет рассматривать распределенное в пространстве поле тяготения как своеобразную среду с экспоненциальной зависимостью диэлектрической и магнитной проницаемости от гравитационного потенциала.

На примере решения задачи о распространении электромагнитных волн в магнитоактивной гиротропной среде в присутствии поля тяготения показана перспективность применения предлагаемого подхода в макроскопической электродинамике нейтронных звезд.

Авторы признательны В.Н. Белому за полезные обсуждения полученных результатов и поддержку. Мы благодарим В.А. Карпенко за интерес к работе и стимулирующую дискуссию.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сердюков, А.Н.* Минимальная модель тяготения в рамках стандартных ограничений теории классических полей / А.Н. Сердюков // Письма в ЭЧАЯ. – 2009. – Т. 6, № 3 (152). – С. 312–331.

2. *Nordström, G.* Träge und schwere Masse in der Relativitätsmechanik / G. Nordström // Ann. d. Phys. – 1913. – Bd.40. – S. 856–878.

*Поступила в редакцию 06.10.09.*