

## ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ БАЛАНСИРОВКЕ СФЕРИЧЕСКОЙ АБЕРРАЦИИ И ВЫБОРЕ ПЛОСКОСТИ НАИЛУЧШЕЙ УСТАНОВКИ В СИСТЕМАХ С ЦЕНТРАЛЬНЫМ ЭКРАНИРОВАНИЕМ

В. А. Зверев, С. А. Родионов, М. Н. Сокольский  
и Н. И. Хлусова

Рассматривается влияние центрального экранирования зрачка на соотношения между различными порядками сферической aberrации, обеспечивающие минимальное значение среднего квадрата деформации волнового фронта для точки на оси центрированных оптических систем. Получены общие соотношения между сферической aberrацией третьего и высшего порядков и дефокусировкой при наличии aberrаций любого порядка. Более подробно рассмотрен случай aberrаций не выше пятого порядка. Исследовано влияние aberrаций и центрального экранирования на структуру изображения точки и частотно-контрастную характеристику при условии оптимальной коррекции.

Вопрос об оптимальной балансировке aberrаций различных порядков и выборе плоскости наилучшей установки рассматривался различными авторами для случая сферической aberrации до пятого порядка, комы и др. [1-4]. Несомненный практический интерес представляет исследование влияния центрального экранирования, неизбежного в центрированных зеркальных и зеркально-линзовых системах, на балансировку aberrаций.

Рассмотрим случай точки на оси центрированной системы с круглым зрачком, когда имеется только сферическая aberrация и дефокусировка. В этом случае волновая aberrация системы может быть представлена в виде [5]

$$W(\rho) = w_{20}\rho^2 + w_{40}\rho^4 + \dots + w_{2n0}\rho^{2n} = \sum_{k=1}^n w_{2k0}\rho^{2k}, \quad (1)$$

где  $W(\rho)$  — волновая aberrация как функция относительного радиус-вектора  $\rho$  точки на зрачке ( $\alpha \leq \rho \leq 1$ ),  $\alpha$  — коэффициент центрального экранирования,  $w_{20}$  — коэффициент волновой дефокусировки,  $w_{2k0}$  — коэффициенты волновой сферической aberrации  $2k-1$ -го порядка.

Коэффициенту  $w_{20}$  можно придать любые значения уже в готовой системе, так как он определяется смещением  $\Delta S'_0$  плоскости установки от плоскости Гаусса

$$w_{20} = -\Delta S'_0 \frac{A_0'^2}{2}, \quad (2)$$

где  $A'_0$  — апертура.

Коэффициент  $w_{40}$  сферической aberrации третьего порядка относительно нетрудно изменять при расчете системы в области aberrаций третьего порядка. Остальные коэффициенты  $w_{2k0}$  ( $k \geq 3$ ) сферической aberrации пятого и высших порядков значительно труднее поддаются управлению, их минимально достижимые значения определяются типом системы.

Таким образом, задача балансировки аберраций и выбора плоскости установки формулируется как задача определения значений коэффициентов  $w_{20}$  и  $w_{40}$ , обеспечивающих наилучшее значение некоторого критерия качества, при заданных значениях коэффициентов  $w_{2k0}$  ( $k \geq 3$ ).

В качестве такого критерия для систем с малыми волновыми аберрациями, т. е. для большинства астрономических объективов, удобно принять введенный Маршалем [1] средний квадрат деформации волнового фронта

$$E = \bar{W}^2 - (\bar{W})^2, \quad (3)$$

где

$$\bar{W} = \frac{1}{A} \iint_A W dA, \quad \bar{W}^2 = \frac{1}{A} \iint_A W^2 dA \quad (4)$$

усредненные по зрачку значения волновой аберрации и ее квадрата.

Как показал Маршал, при малых аберрациях величина  $E$  пропорциональна уменьшению числа Штреля  $S$ , т. е. отношения освещенностей в центре дифракционного пятна рассеяния для данной системы и для системы, свободной от аберраций,

$$S = \frac{h(0)}{h_0(0)} \geq \left(1 - \frac{2\pi^2}{\lambda^2} E\right)^2, \quad (5)$$

где  $\lambda$  — длина волны света. Область значений  $E$ , для которой справедливо это выражение, зависит от вида аберраций. По данным Кинга [8], в общем случае число Штреля  $S$  должно быть больше 0.5, т. е.  $E < \lambda^2/70$ . Для рассматриваемого случая сферической аберрации исследования авторов, приведенные ниже, дают  $E \leq \lambda^2/50$ , т. е.  $S > 0.35$ .

Наилучшая форма коррекции аберраций должна, следовательно, минимизировать  $E$ .

Для случая круглого зрачка единичного радиуса с центральным экранированием  $\alpha$  при наличии аберраций вида (1) выражения (4) принимают следующий вид

$$\left. \begin{aligned} \bar{W} &= \frac{1}{1-\alpha^2} \int_{\alpha^2}^1 W(\rho^2) d\rho^2 = \frac{1}{1-\alpha^2} \sum_{k=1}^n w_{2k0} \frac{1-\alpha^{2(k+1)}}{k+1}, \\ \bar{W}^2 &= \frac{1}{1-\alpha^2} \int_{\alpha^2}^1 W^2(\rho^2) d\rho^2 = \frac{1}{1-\alpha^2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n w_{2k0} w_{2j0} \frac{1-\alpha^{2(k+j+1)}}{k+j+1}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Подставляя (6) в (3), получим

$$E = \frac{1}{1-\alpha^2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n w_{2k0} w_{2j0} \left\{ \frac{1-\alpha^{2(k+j+1)}}{k+j+1} - \frac{[1-\alpha^{2(k+1)}][1-\alpha^{2(j+1)}]}{(1-\alpha^2)(k+1)(j+1)} \right\}. \quad (7)$$

Таким образом,  $E$  представляет собой квадратичную форму от коэффициентов  $w_{2k0}$ . Для решения поставленной задачи удобно выделить в предыдущем выражении члены, содержащие коэффициенты  $w_{20}$  и  $w_{40}$ . После некоторых преобразований получим

$$E = \frac{(1-\alpha^2)^2}{12} (w_{20}^2 E_{22} + w_{40}^2 E_{44} + 2w_{20} w_{40} E_{24} + 2w_{20} E_{20} + 2w_{40} E_{40} + E_{00}), \quad (8)$$

где коэффициенты  $E_{ij}$  имеют вид

$$\begin{aligned}
 E_{22} &= 1, \\
 E_{44} &= \frac{16}{15} \left[ (1 + \alpha^2)^2 - \frac{\alpha^2}{4} \right], \\
 E_{24} &= 1 + \alpha^2, \\
 E_{20} &= \sum_{k=3}^n w_{2k0} \frac{6k}{(k+1)(k+2)} \sum_{m=0}^{k-1} \left[ 1 + \frac{m(k-m-1)}{k} \right] \alpha^{2m}, \\
 E_{40} &= \sum_{k=3}^n w_{2k0} \frac{8k}{(k+1)(k+3)} \sum_{m=0}^k \left[ 1 + \frac{3m(k-m)}{2k} \right] \alpha^{2m}, \\
 E_{00} &= \sum_{k=3}^n \sum_{j=3}^n w_{2k0} w_{2j0} \frac{12}{(k+1)(j+1)(k+j+1)(1-\alpha^2)^2} \times \\
 &\quad \times \left\{ (k+1)(j+1) \sum_{m=0}^{k+j} \alpha^{2m} - (k+j+1) \sum_{m=0}^k \sum_{i=0}^j \alpha^{(2m+i)} \right\}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Дифференцируя (8) по  $w_{20}$  и  $w_{40}$ , легко найти оптимальные их значения, соответствующие минимуму  $E$ ,

$$w_{20 \text{ опт.}} = -(w_{40} E_{24} + E_{20}), \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
 w_{40 \text{ опт.}} &= \frac{E_{40} - E_{24} E_{20}}{E_{44} - E_{24}^2} = \frac{15}{(1 - \alpha^2)^2} \sum_{k=3}^n w_{2k0} \frac{2k(k-1)}{(k+1)(k+2)(k+3)} \times \\
 &\quad \times \left[ \sum_{m=0}^k \left[ 1 - \frac{6m(k-m)}{k(k-1)} \right] \alpha^{2m} \right].
 \end{aligned} \tag{11}$$

Выражение (11) определяет оптимальное соотношение между сферической aberrацией третьего и высшего порядков, а выражение (10) — оптимальную дефокусировку (смещение плоскости установки) в общем случае наличия aberrации  $2n-1$ -го порядка и центрального экранирования  $\alpha$ .

Часто можно ограничиться рассмотрением aberrаций не выше пятого порядка, т. е. при  $n=3$ . Выражение для оптимальной дефокусировки в этом случае принимает вид

$$w_{20 \text{ опт.}} = - \left\{ w_{40} (1 + \alpha^2) + \frac{9}{10} w_{60} \left[ (1 + \alpha^2) - \frac{2}{3} \alpha^2 \right] \right\}. \tag{12}$$

Подставляя  $w_{20 \text{ опт.}}$  в (8), получаем после преобразований выражение для  $E$  в плоскости оптимальной установки

$$E_{\text{min}} = \frac{(1 - \alpha^2)^4}{180} \left\{ [w_{40} + 1.5(1 + \alpha^2) w_{60}]^2 + \frac{9}{140} w_{60}^2 (1 - \alpha^2)^2 \right\}. \tag{13}$$

Обозначив  $\beta_{46} = -w_{40}/w_{60}$ , запишем

$$E_{\text{min}} = \frac{(1 - \alpha^2)^4}{180} w_{60}^2 \left\{ [\beta_{46} - 1.5(1 + \alpha^2)]^2 + \frac{9}{140} (1 - \alpha^2)^2 \right\}. \tag{14}$$

Оптимальное соотношение  $\beta_{46}$  между третьим и пятым порядками сферической aberrации определится из условия равенства выражения в квадратных скобках нулю, откуда

$$\beta_{46 \text{ опт.}} = 1.5(1 + \alpha^2). \tag{15}$$

При этом

$$E_{\text{min}} = \frac{(1 - \alpha^2)^6}{180} \frac{9}{140} w_{60}^2 \tag{16}$$

и

$$w_{20 \text{ опт.}} = 0.6 [(1 + \alpha^2)^2 + \alpha^2] w_{60}. \tag{17}$$

При отсутствии центрального экранирования, т. е. при  $\alpha = 0$ , формулы (14)—(17) переходят в известные выражения [2, 3].

Выражения (14)—(17) показывают, что при наличии центрального экранирования оптимальное соотношение между сферическими aberrациями третьего и пятого порядка изменяется пропорционально  $(1 + \alpha^2)$ , а между дефокусировкой и aberrацией пятого порядка изменяется пропорционально  $[(1 + \alpha^2)^2 + \alpha^2]$ , при этом остаточная величина  $E$  уменьшается пропорционально шестой степени  $(1 - \alpha^2)$  — отношения неэкранированной площади зрачка к площади зрачка в отсутствие экрана.

Рассмотрим картину продольных aberrаций для случая оптимальной балансировки. Для продольной сферической aberrации получим

$$\Delta s'(\rho) = \frac{1}{A_0'^2} \frac{1}{\rho} \left| \frac{\partial W(\rho)}{\partial \rho} \right| = \frac{6}{A_0'^2} w_{60} \rho^2 [\rho^2 - (1 + \alpha^2)]. \quad (18)$$

Приравнявая предыдущее выражение нулю, находим значение  $\rho = \rho_0$ , для которого исправлена сферическая aberrация,

$$\rho_0 = \sqrt{1 + \alpha^2}. \quad (19)$$

Таким образом, исправление сферической aberrации должно достигаться за пределами зрачка в точке  $\rho = \sqrt{1 + \alpha^2}$ , а на краю зрачка при  $\rho = 1$  сферическая aberrация должна быть недоисправлена.

Дифференцируя (18) по  $\rho$  и приравнявая производную нулю, находим значение  $\rho = \rho_{\max}$ , при котором продольная aberrация максимальна

$$\rho_{\max} = \sqrt{0.5(1 + \alpha^2)} = 0.707 \sqrt{1 + \alpha^2} = 0.707 \rho_0. \quad (20)$$

Нетрудно убедиться, что  $\alpha < \rho_{\max} < 1$  при любых  $\alpha < 1$ , следовательно, максимум продольной aberrации при оптимальной коррекции всегда лежит в пределах неэкранированной части зрачка. Кроме того, значения продольной сферической aberrации на границах неэкранированной части, т. е. при  $\rho = \alpha$  и  $\rho = 1$  равны

$$\Delta S'_1 = \Delta S'(1) = \Delta S'(\alpha) = -\frac{6}{A_0'^2} w_{60} \alpha^2. \quad (21)$$

Подставляя  $\rho = \rho_{\max}$  в (18), находим максимальную величину продольной aberrации

$$\Delta S'_{\max} = -\frac{1.5}{A_0'^2} w_{60} (1 + \alpha^2)^2 \quad (22)$$

и, сравнив с  $\Delta S'_1$ , находим стрелку прогиба кривой сферической aberrации в пределах неэкранированной части зрачка

$$\Delta S'_2 = \Delta S'_{\max} - \Delta S'_1 = -\frac{1.5}{A_0'^2} w_{60} (1 - \alpha^2)^2. \quad (23)$$

Из (2), (17), (21) и (22) получаем положение плоскости наилучшей установки  $\Delta S'_0$

$$\frac{\Delta S'_0 - \Delta S'_1}{\Delta S'_{\max} - \Delta S'_1} = 0.8 \text{ (независимо от } \alpha). \quad (24)$$

Следовательно, коррекцию сферической aberrации нужно производить таким образом, чтобы ее значения на границах неэкранированной части зрачка были бы равны, а максимум лежал бы внутри неэкранированной части (в координатах  $\rho^2$  — посередине), а затем поместить плоскость установки в точку, соответствующую  $4/5$  стрелки прогиба кривой сферической aberrации в пределах открытой части зрачка. Иллюстрация показана на рис. 1.

Рассмотрим, как зависит допускаемая остаточная сферическая aberrация от центрального экранирования. Если принять, что уменьшение числа Штреля из-за aberrаций не должно превышать 20%, то допустимая

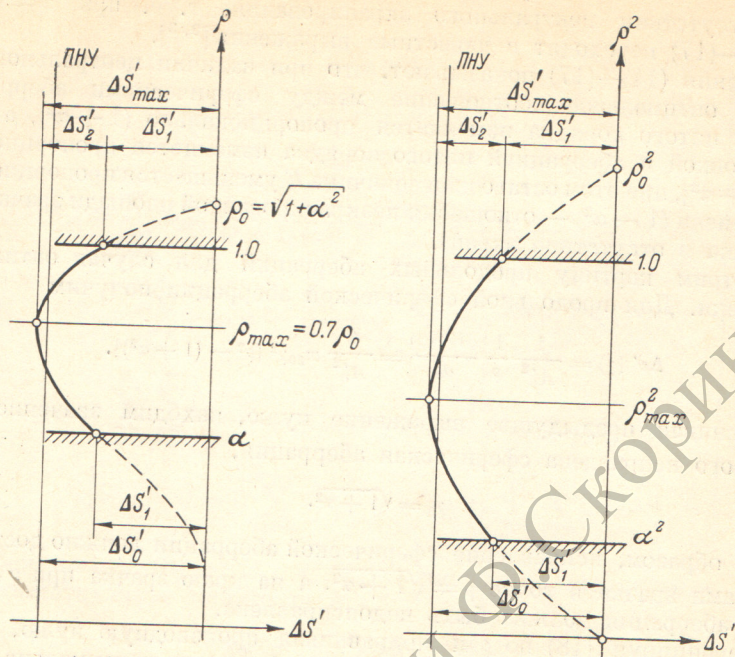


Рис. 1. Продольная сферическая aberrация и положение плоскости наилучшей установки (ПНУ) при оптимальной коррекции на минимум в случае центрального экранирования  $\alpha$ .

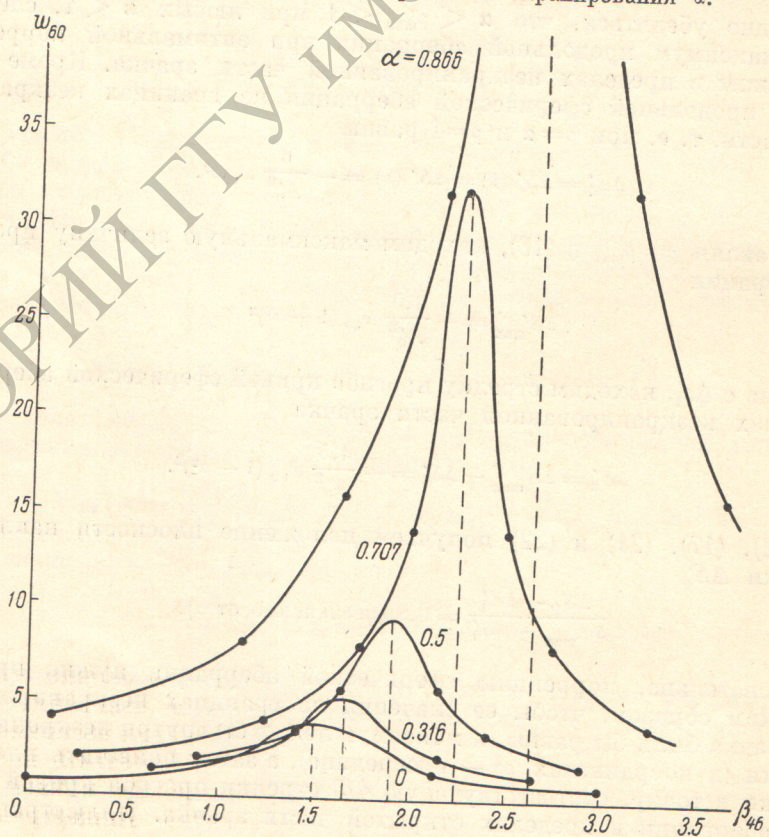


Рис. 2. Зависимость остаточной волновой aberrации пятого порядка  $w_{60}$ , обеспечивающей маршалевский допуск  $\lambda^2/180$ , от формы коррекции  $\beta_{46} = -w_{40}/w_{60}$  при различных величинах центрального экранирования  $\alpha$ , при оптимальном выборе плоскости установки.

величина  $E$  определяется маршалевским допуском  $\lambda^2/180$  [1]. Приравнивая  $E_{\min}$  из выражения (14) указанной величине, получаем

$$|w_{60}| < \frac{4\lambda}{(1-\alpha^2)^3 \sqrt{1 + \left[ \frac{4(\beta_{46} - \beta_{46\text{опт.}})}{1-\alpha^2} \right]^2}}. \quad (25)$$

Зависимость, описываемая формулой (25), для различных значений  $\alpha$  показана на рис. 2.

Для допускаемой продольной сферической aberrации в пределах открытой части зрачка из (22) и (25) получаем

$$|\Delta S'_2| < \frac{6\lambda}{A_0^2 (1-\alpha^2)}. \quad (26)$$

Для практического применения критерия  $E$  представляют интерес пределы его адекватности уменьшению числа Штреля и другим критериям качества изображения.

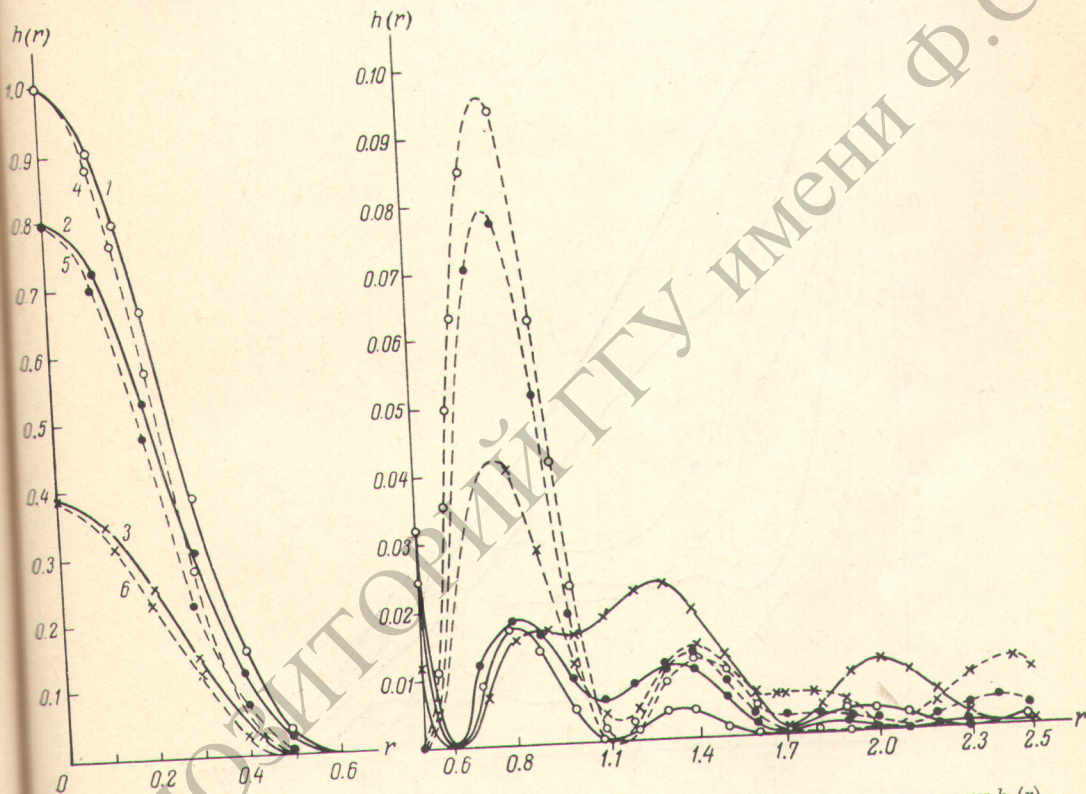


Рис. 3. Кривые распределения интенсивности в дифракционном изображении точки  $h(r)$  при различных значениях коэффициента центрального экранирования и различных aberrациях ( $r$  — в оптических единицах).

1 —  $\alpha=0, E=0$  ( $w_{20}=0, w_{40}=0, w_{60}=0$ ) (Диск Эри); 2 —  $\alpha=0, E=\lambda^2/180$  ( $w_{20}=2.4, w_{40}=6.0, w_{60}=4.0$ );  
 3 —  $\alpha=0, E=\lambda^2/45$  ( $w_{20}=4.8, w_{40}=12.0, w_{60}=8.0$ ); 4 —  $\alpha=0.5, E=0$  ( $w_{20}=0, w_{40}=0, w_{60}=0$ );  
 5 —  $\alpha=0.5, E=\lambda^2/180$  ( $w_{20}=10.33, w_{40}=-17.81, w_{60}=9.5$ ); 6 —  $\alpha=0.5, E=\lambda^2/45$  ( $w_{20}=20.66, w_{40}=-35.62, w_{60}=19$ ).

Для исследования этого вопроса, а также влияния сферической aberrации на структуру изображения в случае центрального экранирования были произведены на ЭВМ вычисления распределения интенсивности в дифракционном изображении точки  $h(r)$  и частотно-контрастных характеристик (ЧКХ)  $T(\nu)$  для различных комбинаций коэффициентов

Вычисление  $h(r)$  производилось в соответствии с формулой [6]

$$h(r) = C^2 + S^2;$$

$$\begin{cases} C \\ S \end{cases} = \frac{1}{1-a^2} \int_0^1 \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} \left[ \frac{2\pi}{\lambda} W(\rho^2) \right] J_0(2\pi\rho r) d\rho^2, \quad (27)$$

где  $J_0$  — бesselова функция нулевого порядка первого рода,  $r$  — радиус-вектор на поверхности изображения, выраженный в оптических единицах  $\lambda/A_0'$ .

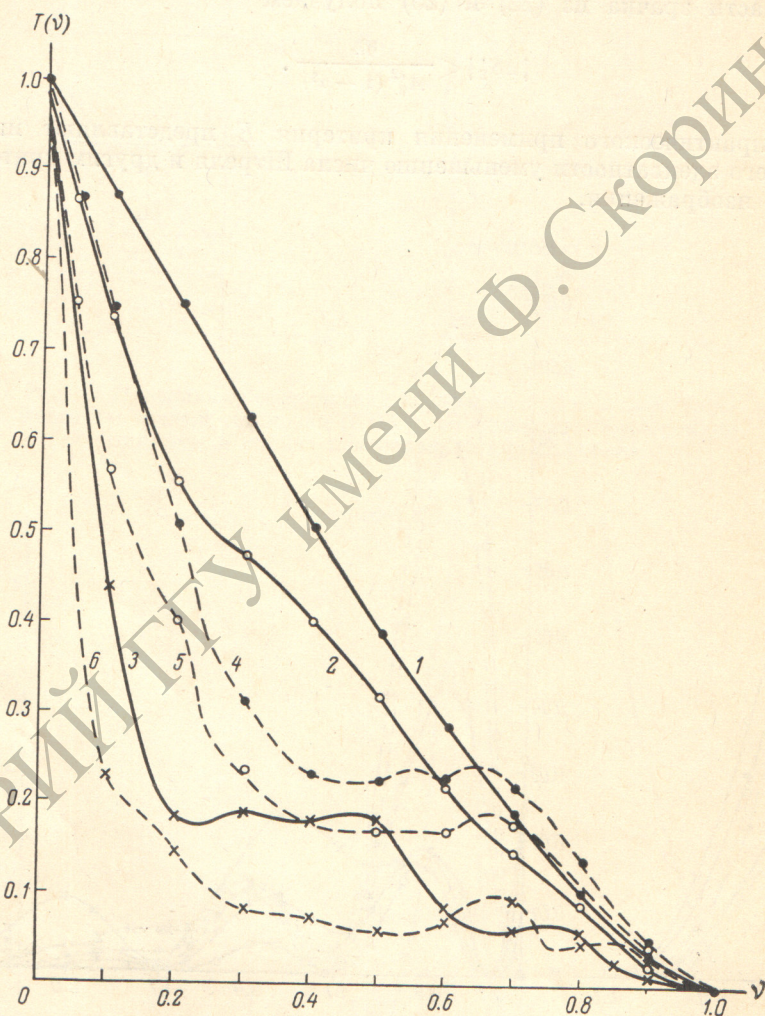


Рис. 4. Частотно-контрастные характеристики  $T(v)$  для шести случаев, указанных на рис. 3.

Пространственные частоты  $v$  — в долях предельной частоты, равной  $2A_0'/\lambda$ .

Интегрирование в (27) производилось по квадратурам Гаусса с четырьмя узлами на каждую полуосцилляцию подынтегральной функции. Погрешность вычисленных значений  $h(r)$  не превышала  $10^{-4}$ .

ЧКХ вычислялась по формуле автокорреляции [3], методом, аналогичным описанному Макдональдом [7], с количеством узлов интегрирования  $6 \times 6$ . Погрешность результатов не превышала  $5 \cdot 10^{-4}$ .

Анализ результатов расчета показал, что минимум  $E$  совпадает с максимумом числа Штреля  $S$  и с максимумом ЧКХ на половине предельной частоты для любых комбинаций коэффициентов, если  $E$  не превосходит

$\lambda^2/50$ . Таким образом, как следует из (16), оптимальная коррекция на минимум среднего квадрата деформации волнового фронта  $E$  по формулам (15), (17), (21), (24) сохраняет смысл при величинах остаточной волновой аберрации пятого порядка  $w_{60}$ , удовлетворяющей условию  $w_{60} < 8\lambda/(1 - \alpha^2)^3$ .

Влияние аберраций и центрального экранирования на структуру изображения точки и на ЧКХ для различных  $E$  и  $\alpha$  при условии оптимальной коррекции показано на рис. 3, 4.

#### Литература

- [1] А. Марешаль, М. Франсон. Структура оптического изображения. Изд. «Мир», М., 1964.
- [2] Э. О. Нейл. Введение в статистическую оптику. Изд. «Мир», М., 1966.
- [3] Н. Н. Норкин. *Optica Acta*, 13, 343, 1966.
- [4] А. Ленский. *Опт. и спектр.*, 25, 129, 1968.
- [5] Н. Н. Норкин. *Wave Theory of Aberrations*. Oxford. Clarendon Press, 1949.
- [6] Г. Г. Слюсарев. Методы расчета оптических систем. Изд. «Машиностроение», Л., 1969.
- [7] J. Macdonald. *Optica Acta*, 18, 269, 1971.
- [8] W. B. King. *J. Opt. Soc. Am.*, 58, 655, 1968.

Поступило в Редакцию 17 июля 1973 г.