

О ДЕВОЗБУЖДЕНИИ РЕЗОНАНСНЫХ УРОВНЕЙ В РАЗЯДЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КОНФИГУРАЦИИ

Ю. Б. Голубовский и Р. И. Лягущенко

Решается нестационарная задача для заселенности резонансных уровней в разряде цилиндрической конфигурации. Найдены пятнадцать первых собственных чисел и пятнадцать собственных функций интегрального уравнения Биббермана—Холстейна, с помощью которых можно получить решение задачи для разнообразных начальных распределений резонансных атомов. Решение получено для дисперсионного профиля спектральной линии.

Изменение во времени концентрации n резонансных атомов после прекращения возбуждения и без учета тушения описывается уравнением [1, 2].

$$\frac{dn(r, t)}{dt} = -An(r, t) - A \int_0^1 n(\rho, t) K(r, \rho) \rho d\rho, \quad (1)$$

где A — вероятность спонтанного излучения; $K(r, \rho)$ — вероятность кванту, испущенному в точке ρ , поглотиться в точке r . Координаты ρ и r измеряются в долях радиуса R .

Частное решение уравнения (1) можно искать в виде

$$n(r, t) = \varphi(r) \exp(-\lambda t); \quad (2)$$

Подставляя искомое решение в уравнение (1), приходим к задаче на собственные значения и собственные функции интегрального уравнения.

$$A \left[\varphi(r) - \int_0^1 \varphi(\rho) K(r, \rho) \rho d\rho \right] = \lambda \varphi(r). \quad (3)$$

Для приближенного решения уравнения (3) сведем его к системе линейных алгебраических уравнений, разбивая интервал интегрирования на N отрезков длины $2h$. Как и в работе [3], ограничимся случаем дисперсионного контура резонансной линии. Получаем систему линейных уравнений в виде

$$\sum_{m=0}^{N-1} \varphi(r_m) a_{km} = \tilde{\lambda} \varphi(r_k), \quad (4)$$

где

$$\tilde{\lambda} = \frac{\pi \sqrt{\pi k_0 R h}}{0.87 A} \lambda, \quad r_k = (2k + 1) h.$$

Коэффициенты a_{km} системы уравнений (4) были вычислены в работе [3]. Таким образом, задача вычисления собственных значений и собственных функций интегрального уравнения (3) сводится к решению векового уравнения

$$|a_{km} - \tilde{\lambda} \delta_{km}| = 0 \quad (5)$$

и определению собственных векторов матрицы $\|a_{km}\|$.

Собственные числа $\tilde{\lambda}_i$ и собственные векторы $\varphi_i(r_k)$ интегрального уравнения (3).
Значения векторов вычислены в точках $r_k = (2k + 1) (1/30)$

i	0	1	2	3	4	5	6
$\tilde{\lambda}_i$	$\tilde{\lambda}_0 = 0.73340$	$\tilde{\lambda}_1 = 1.21253$	$\tilde{\lambda}_2 = 1.55281$	$\tilde{\lambda}_3 = 1.83016$	$\tilde{\lambda}_4 = 2.06755$	$\tilde{\lambda}_5 = 2.27478$	$\tilde{\lambda}_6 = 2.45678$
k	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6
0	0.57427	0.99595	1.21661	1.37865	1.46878	1.520084	1.52406
1	0.56974	0.94376	1.044158	1.008439	0.83200	0.56897	0.24019
2	0.56078	0.84444	0.73869	0.42272	-0.02370	-0.44431	-0.73326
3	0.54747	0.70544	0.36131	-0.15852	-0.59649	-0.70153	-0.43810
4	0.52988	0.53748	-0.01317	-0.52839	-0.60539	-0.16760	0.40138
5	0.50817	0.35344	-0.31375	-0.58023	-0.16358	0.45396	0.52737
6	0.48251	0.16719	-0.48909	-0.34643	0.33435	0.49756	-0.12433
7	0.45305	-0.00755	-0.51783	0.02523	0.51208	-0.00461	-0.51800
8	0.41998	-0.15837	-0.41229	0.34488	0.27419	-0.44433	-0.11338
9	0.38343	-0.27511	-0.21374	0.46738	-0.15512	-0.34649	0.41761
10	0.34355	-0.35063	0.01852	0.35379	-0.42933	0.13259	0.28165
11	0.30019	-0.38120	0.22216	0.08053	-0.35102	0.43104	-0.26771
12	0.25283	-0.36648	0.34609	-0.20532	-0.00994	0.23176	-0.38579
13	0.19993	-0.30831	0.36114	-0.35966	0.30545	-0.20441	0.07083
14	0.13552	-0.20643	0.26093	-0.30493	0.33893	-0.36183	0.37298

Продолжение

i	7	8	9	10	11	12	13	14
$\tilde{\lambda}_i$	$\tilde{\lambda}_7 = 2.61654$	$\tilde{\lambda}_8 = 2.75559$	$\tilde{\lambda}_9 = 2.87493$	$\tilde{\lambda}_{10} = 2.97510$	$\tilde{\lambda}_{11} = 3.05649$	$\tilde{\lambda}_{12} = 3.149037$	$\tilde{\lambda}_{13} = 3.16394$	$\tilde{\lambda}_{14} = 3.11934$
k	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}
0	1.49545	1.42864	1.32959	1.19421	1.02599	0.31409	0.58107	0.82065
1	-0.10432	-0.43306	-0.70158	-0.88191	-0.94581	-0.39430	-0.68903	-0.88176
2	-0.80011	-0.63594	-0.28279	0.15063	0.53820	0.46303	0.72852	0.75506
3	0.05978	0.51857	0.69887	0.49843	0.02817	-0.50882	-0.67651	-0.45565
4	0.63703	0.33728	-0.24052	-0.61430	-0.46333	0.53476	0.55169	0.0822
5	-0.01842	-0.54289	-0.41823	0.20257	0.58024	-0.54168	-0.37175	0.25725
6	-0.54638	-0.11389	0.49928	0.32407	-0.36024	0.53121	0.16504	-0.47233
7	-0.00735	0.51561	0.02434	-0.51615	-0.03433	-0.50541	0.04267	0.51269
8	0.49221	-0.07167	-0.46399	0.24420	0.37283	0.46557	-0.22347	-0.38592
9	0.03422	-0.44777	0.30822	0.21310	-0.46910	-0.41455	0.35821	0.14438
10	-0.44639	0.21352	0.21184	-0.45212	0.29342	0.35373	-0.43052	0.12366
11	-0.04916	0.33872	-0.43311	0.27686	0.04041	-0.28654	0.43799	-0.33518
12	0.42025	-0.32047	0.11721	0.12445	-0.32603	0.21367	-0.38037	0.42164
13	0.07735	-0.21825	0.33178	-0.40049	0.41446	-0.13984	0.27501	-0.37061
14	-0.37184	0.35828	-0.33246	0.29530	-0.24805	0.06263	-0.12988	0.19229

В работе [3] была затабулирована матрица коэффициентов $\|a_{km}\|$ пятнадцатого порядка. В настоящей работе вычислены пятнадцать собственных чисел λ_i и пятнадцать собственных векторов $\varphi_i(r_k)$ матрицы $\|a_{km}\|$. Результаты вычислений приведены в таблице. Компоненты векторов $\varphi_i(r_k)$ представляют собой значения собственных функций интегрального оператора (3) в точках r_k . В силу симметрии ядра $K(r, r)$ собственные функции $\varphi_i(r)$ ортогональны с весом r в интервале $0 \rightarrow 1$. Условие ортогональности и нормировки собственных функций имеет вид

$$\int_0^1 \varphi_k(r) \varphi_m(r) r dr = \delta_{km}. \quad (6)$$

В соответствии с этим собственные векторы матрицы $\|a_{km}\|$ нормированы условием

$$\sum_{i=0}^{14} \varphi_k(r_i) \varphi_m(r_i) r_i = \delta_{km}. \quad (7)$$

Общее решение задачи может быть получено в виде ряда

$$n(r, t) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i \varphi_i(r) \exp(-\lambda_i t). \quad (8)$$

Используя приближенные значения $\tilde{\lambda}_i$ и $\varphi_i(r_k)$, получаем приближенное решение задачи

$$n(r_k, t) = \sum_{i=0}^{14} C_i \varphi_i(r_k) \exp(-\lambda_i t). \quad (9)$$

Коэффициенты C_i определяются путем разложения начального распределения $n_0(r)$ по собственным векторам

$$C_i = \int_0^1 n_0(r) \varphi_i(r) r dr \approx \sum_{k=0}^{14} n_0(r_k) \varphi_i(r_k) r_k. \quad (10)$$

Собственное значение λ_0 и собственный вектор $\varphi_0(r_k)$ определяют фундаментальную моду интегрального оператора (3). Эти величины были най-

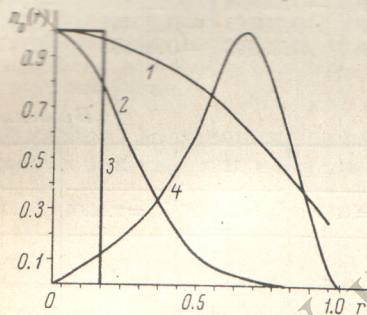


Рис. 1. Начальные распределения $n_0(r)$.

1 — фундаментальная мода интегрального оператора (3), 2 — распределение атомов в контрагированном столбце разряда, 3 — распределение, соответствующее возбуждению электронным пучком, 4 — распределение с максимумом на периферии разряда.

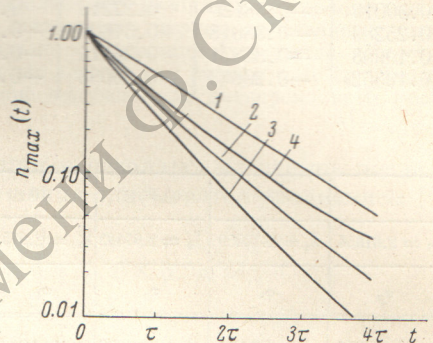


Рис. 2. Спад во времени концентрации резонансных атомов в точке, соответствующей максимуму радиального распределения.

Кривые 1-4 соответствуют начальным распределениям из рис. 1.

дены в работе [2] вариационным методом. Значение $\lambda_0 = 1.115 A/\sqrt{\pi k_0 R}$, полученное в работе [2], совпадает со значением $\lambda_0 = 1.114 A/\sqrt{\pi k_0 R}$, полученным в настоящей работе.

Если начальное распределение $n_0(r)$ близко к фундаментальной моде, то, как видно из решения (8), (9), все коэффициенты C_i , за исключением C_0 , близки к нулю. В этом случае радиальное распределение атомов не изменяется во времени, а абсолютные значения концентраций убывают по экспоненциальному закону с характерным временем

$$\tau = \frac{1}{\lambda_0} = \frac{\pi \sqrt{\pi k_0 R h}}{0.87 A \tilde{\lambda}_0} = \frac{\sqrt{\pi k_0 R}}{1.114 A}. \quad (11)$$

Если же начальное распределение $n_0(r)$ сильно отличается от фундаментального, то значительную роль могут играть высшие моды и закон распада может быть иным. При этом изменяется во времени радиальное распределение резонансных атомов таким образом, что при $t \rightarrow \infty$ $n(r, t) \rightarrow C_0 \varphi_0(r) \exp(-\lambda_0 t)$.

В качестве примера была решена задача для четырех начальных распределений, изображенных на рис. 1.

На рис. 2 показано изменение во времени заселенности в центре разряда (кривые 1-3) и в точке, соответствующей максимальной концентрации (кривая 4) для начальных распределений из рис. 1. Из рис. 2 видно, что

в случае начальных распределений, изображенных кривыми 2—4 на рис. 1, закон распада перестает быть экспоненциальным. Если пытаться аппроксимировать его экспонентой, то следует уменьшить характерное время распада приблизительно в 1.5—2 раза. Тем самым заметно более узкое, чем фундаментальное, начальное распределение увеличивает не слишком

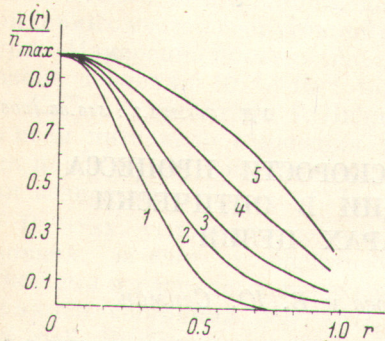


Рис. 3. Изменение во времени радиального распределения для кривой 2 из рис. 1.
1 — $t=0$, 2 — $t=\tau$, 3 — $t=2\tau$, 4 — $t=4\tau$,
5 — $t=\infty$.

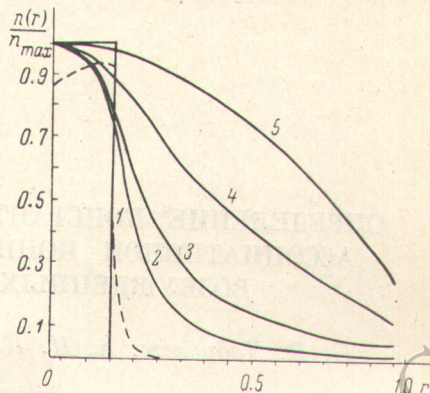


Рис. 4. То же для кривой 3 из рис. 1. Штриховой линией показано разложение в ряд из пятнадцати членов функции, имеющей разрыв 1-го рода (кривая 3 на рис. 1).

сильно скорость убывания атомов в центре разряда. Смещение максимума заселенности к периферии разряда (кривая 4) также не приводит к заметному уменьшению характерного времени девозбуждения (кривая 4 на рис. 1 и 2).

На рис. 3—5 показано изменение во времени радиальных распределений из рис. 1. Видно, каким образом начальное распределение трансформируется к фундаментальному.

При сведении интегрального уравнения к системе алгебраических предполагается, что решение $\varphi(r)$ мало меняется на длине шага. Поскольку собственные функции $\varphi_i(r)$ высоких порядков i сильно осциллируют, то для них это предположение выполняется плохо и точность нашего расчета $\varphi_i(r_k)$ при больших i плохая. Однако это обстоятельство не вносит больших ошибок в решение (9), поскольку коэффициенты разложения C_i при больших i малы. О степени точности решения задачи с помощью разложения (9), (10) можно судить по рис. 4 (кривая 1). Как видно, разложение (9), (10) отличается от истинной функции, дающей начальное распределение, на величину $\sim 10\%$.

Следует заметить, что с помощью полученных значений λ_i и собственных векторов $\varphi_i(r_k)$ (см. таблицу) можно легко получать решение задачи для самых разнообразных видов начальных распределений. Как видно из формул (9), (10), построение решения сводится к простым операциям перемножения и суммирования.

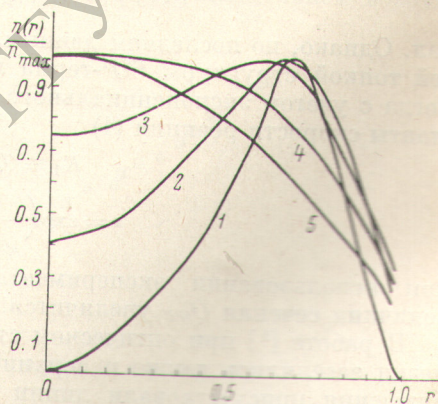


Рис. 5. То же для кривой 4 из рис. 1.

Литература

- [1] Л. М. Биберман. ЖЭТФ, 17, 416, 1947.
- [2] T. Holstein. Phys. Rev., 72, 1220, 1947.
- [3] Ю. Б. Голубовский, Ю. М. Каган, Р. И. Лагущенко. Опт. и спектр., 31, 22, 1971.

Поступило в Редакцию 15 ноября 1973 г.