В. С. Монахов, М. В. Селькин, О разрешимости нормальных подгрупп конечных групп, *Матем. заметки*, 1992, том 51, выпуск 3, 85–90

Математические заметки

том 51 выпуск 3 март 1992

О РАЗРЕШИМОСТИ НОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП КОНЕЧНЫХ ГРУПП

В. С. Монахов, М. В. Селькин

В работах Л. А. Шеметкова [1], Л. Я. Полякова [2] устанавливалось строение нормальной подгруппы K конечной группы G при дополнительных ограничениях на индексы максимальных в G подгрупп, не содержащих K. Несколько более общая ситуация достигается с помощью следующего определения.

Пусть K — нормальная подгруппа конечной группы G. Максимальная в G подгруппа M называется K-максимальной, если $M\cap K\neq 1$ и M не содержит K. Отметим, что существуют группы [3], в которых совокупность K-максимальных подгрупп не исчерпывает все множество максимальных подгрупп, не содержащих K. В настоящей заметке устанавливается разрешимость нормальной подгруппы K при некоторых ограничениях на K-максимальные подгруппы.

ЛЕММА 1. *Если в группе G нет K-максимальных подгрупп, то K нильпотентна.*

Доказательство. Если в группе G нет K-максимальных подгрупп, то по лемме Фраттини силовские подгруппы из K будут нормальными в G.

ТЕОРЕМА 1. *Если для всякой K-максимальной подгруппы M пересечение $M\cap K$ нильпотентно, то K — разрешимая подгруппа.*

Доказательство. Пусть G — контрпример минимального порядка, и пусть L — минимальная нормальная подгруппа. По индукции $K=L$, поэтому K — единственная минимальная нормальная в G подгруппа.

Пусть M — произвольная K-максимальная в G подгруппа и P — силовская подгруппа из $N=M\cap K$. Так как N нормальна в M и N нильпотентна, то $N_G(P)=M$. Ни один элемент из K, не принадлежащий $K\cap M$, не нормализует P. В противном случае, P нормальна в G, что невозможно. Отсюда следует, что $N_K(P)=M\cap K$. Из свойств p-групп заключаем, что P — силовская, а $M\cap K$ — холловская в K подгруппы.

В группе K нет нормальных дополнений к силовским подгруппам, поэтому по теореме 4 из [4] (см. также [5, теорема 13.2.2]) подгруппа $M\cap K$ должна быть силовской подгруппой.

Следовательно, для каждой K-максимальной подгруппы M группы G пересечение $M \cap K$ является силовской в K и самонормализуемой в K подгруппой.

Если теперь Q — произвольная силовская подгруппа из K, то по лемме Фраттини $G=K \cdot N_G(Q)$, а максимальная в G подгруппа H, содержащая $N_G(Q)$, будет K-максимальной. Поэтому $H \cap K=Q$ и $N_K(Q)=Q$.

Таким образом, каждая силовская подгруппа из K совпадает со своим нормализатором в K. Так как $K=A \times B$, где A — простая группа, а B — прямое произведение простых групп, изоморфных A, то легко проверить, что и в A все силовские подгруппы самонормализуемы. По теореме Глаубермана [6] подгруппа A примарна. Противоречие. Теорема доказана.

Следствие. *Если всякая K-максимальная в группе G подгруппа нильпотентна, то K разрешима.*

ЛЕММА 2. *Пусть K — минимальная нормальная в G подгруппа, а L — простая нормальная в K подгруппа. Если $N_G(L)=LC_G(L)$, то $G=KC_G(D)$, где D — некоторая диагональ в K.*

Доказательство. Пусть $N=N_G(L)$ и $G=Nx_1 \cup Nx_2 \cup \ldots \cup Nx_t$ — разложение группы G в правые смежные классы по подгруппе N, где $x_1=e$. Тогда $L_i=L^{x_i}$ будет простой нормальной в K подгруппой. Ясно, что $L_i \cap L_j=1$ при $i \neq j$ и $K=L_1 \times L_2 \times \ldots \times L_t$.

Пусть $D=\{\prod_{i=1}^{t} l^{x_i} \mid l \in L\}$ — диагональ прямого произведения. Для произвольного элемента $y \in G$ имеем: $L^{x_i g}=L_i{}^g=L_j=L^{x_j}$, т. е. $x_i g x_j^{-1} \in N=C_G(L) \cdot L$. Поэтому $x_i g x_j^{-1}=cm$, где $c \in C_G(L)$, а $m \in L$. Заметим, что если i пробегает значения 1, 2, ..., t, то j также пробегает все эти значения. Теперь

$$\left(\prod_{i=1}^{t} l^{x_i}\right)^g=\prod_{i=1}^{t} l^{(x_i g)}=\prod_{j=1}^{t} l^{(cmx_j)}=\prod_{j=1}^{t} l^{mx_j}=\prod_{i=1}^{t} l^{mx_i}=\prod_{i=1}^{t} l^{x_i x_i^{-1} m x_i},$$

откуда $g(x_i^{-1} m x_i)^{-1} \in C_G(D)$ и $g \in C_G(D)(x_i^{-1} m x_i) \subseteq C_G(D) \cdot K$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. *Пусть K — прямое произведение групп, изоморфных простой группе L. Если A — собственная в K подгруппа, содержащая некоторую диагональ, то A изоморфна прямому произведению групп, изоморфных L. В частности, индекс $|K:A|=|L|^n$, где n — натуральное число.*

Доказательство проведем индукцией по числу прямых сомножителей в K. Пусть $K=L_1 \times L_2 \times \ldots \times L_t$ — прямое произведение простых групп, изоморфных L. Пусть φ_i — изоморфизм L на L_i для $i=1, 2, \ldots, t$ и $D=\{\prod_{i=1}^{t} l^{\varphi_i} \mid l \in L\}$ — диагональ в K, содержащаяся в A.

Предположим, что $A_1=A \cap L_1 \neq 1$. Тогда A_1 нормальна в A и D нормализует A_1. Поэтому для любого $l \in L$ имеем:

$$A_1=A^{\prod_{i=1}^{t} l^{\varphi_i}}=A_1^{l^{\varphi_1}}$$

и A_1 нормальна в L_1. Так как L_1 — простая группа, то $A \supseteq L_1$ и $A=$

$=L_1\times(A\cap L_2\ldots L_t)$. Очевидно, что $F=\{\prod_{i=2}^t l^{\varphi_i}\mid l\in L\}$ — диагональ $L_2\ldots L_t$. Так как $L_1\subseteq A$ и $D\subseteq A$, то $(l^{\varphi_1})^{-1}(\prod_{i=1}^t l^{\varphi_i})=$ $=\prod_{i=2}^t l^{\varphi_i}\in A$, т. е. $F\subseteq A$. По индукции $A\cap L_2\ldots L_t$ изоморфна прямому произведению нескольких копий L. Поэтому такой будет и подгруппа A.

Пусть теперь $A\cap L_1=1$. Рассмотрим изоморфизм $K/L_1\simeq L_2\times\ldots$ $\ldots\times L_t$. При этом изоморфизме подгруппа $\bar{A}=AL_1/L_1$ содержит диагональ $\bar{D}=DL_1/L_1$ группы K/L_1. По индукции $\bar{A}$ изоморфна прямому произведению нескольких копий L. Так как $A\simeq\bar{A}$, то лемма доказана полностью.

Через $S(K)$ обозначим произведение всех разрешимых нормальных в K подгрупп.

ТЕОРЕМА 2. *Если каждая K-максимальная подгруппа имеет примарный индекс, то либо K разрешима, либо $K/S(K)$ изоморфна* PSL (2, 7).

Доказательство проведем индукцией по порядку группы G. Предположим, что $R=S(K)\neq 1$. Тогда факторгруппа $\bar{G}=G/R$ содержит нормальную подгруппу $\bar{K}=K/R$. Если $\bar{M}=M/R$ — $\bar{K}$-максимальная в $\bar{G}$ подгруппа, то $\bar{M}$ не содержит $\bar{K}$ и $\bar{M}\cap\bar{K}\neq 1$. Поэтому M не содержит K и $M\cap K\neq 1$. Теперь к группе $\bar{G}$ применима индукция. Так как $S(\bar{K})=1$, то $\bar{K}=1$, либо $\bar{K}$ изоморфна PSL (2,7). Следовательно, либо $K=S(K)$ разрешима, либо $K/S(G)\simeq$PSL (2,7).

Теперь следует считать, что $S(K)=1$. Допустим, что существует нормальная в G подгруппа L, которая, собственно, содержится в K. Ясно, что $S(L)\subseteq S(K)=1$. Кроме того, если M — L-максимальная в G подгруппа, то M не содержит L и $M\cap L\neq 1$. Но тогда M не содержит K и $M\cap K\neq 1$, т. е. каждая L-максимальная подгруппа будет K-максимальной. По индукции $L\simeq$PSL (2,7).

Допустим, что $L\cdot C_G(L)$ — собственная в G подгруппа. Так как Aut PSL (2,7)=PGL (2,7), то $G/G_G(L)\cong$PGL (2,7), а подгруппа $LG_G(L)$ в группе L имеет индекс 2. Но в PGL (2,7) есть максимальная подгруппа индекса 14, поэтому в G имеется максимальная подгруппа M, которая содержит $C_G(L)$, причем $|G:M|=14$. Ясно, что M не содержит L и $M\cap L\neq 1$. Значит, M будет K-максимальной подгруппой, и ее индекс должен быть примарным. Противоречие.

Таким образом, $LC_G(L)=G$, а поскольку $L\cap C_G(L)=Z(L)=1$, то $G=L\times C_G(L)$. Далее $K=L\times(K\cap C_G(L))$, причем $H=K\cap C_G(L)$ — нормальная в G подгруппа. Поэтому $H\simeq$PSL (2,7) и $G=H\times C_G(H)=$ $=H\times L\times(C_G(H)\cap C_G(L))$. Пусть D — диагональ в $H\times L=K$. По лемме 3 подгруппа D максимальная в K подгруппа индекса 168. Поэтому $F=D\times(C_G(H)\cap C_G(L))$ — максимальная в G подгруппа индекса 168. Так как $F\cap K\supseteq D\neq 1$ и F не содержит K, то F — K-максимальная подгруппа непримарного индекса. Противоречие.

Итак, K — минимальная нормальная в G подгруппа. Пусть M — K-максимальная в G подгруппа. Она существует по лемме 1. По условию теоремы $|G:M|=p^\alpha$, где p — некоторое простое число. Кроме того, $G=MK$ и $p^\alpha=|G:M|=|K:K\cap M|$, т. е. p делит порядок K. Если P — силовская p-подгруппа из K, то $KN_G(P)=G$ и для максимальной в G подгруппы S, содержащей $N_G(P)$, индекс $|G:S|=|K:K\cap S|$ будет взаимно прост с p. Ясно, что S – K-максимальная в G подгруппа, а по условию теоремы ее индекс равен q^β, где q – простое число, отличное от p.

Значит, группа G содержит все K-максимальные подгруппы M и S взаимно простых примарных индексов p^α и q^β. Поэтому и в K подгруппы $M\cap K$ и $S\cap K$ имеют индексы p^α и q^β соответственно. Так как $K=L_1\times L_2\times\ldots\times L_t$ есть прямое произведение изоморфных простых групп, то можно считать, что L_1 не содержится в M. Теперь $|L_1: L_1\cap M|=|L_1K\cap M: K\cap M|$ будет делить $|K: K\cap M|=p^\alpha$, т. е. простая группа L_1 содержит подгруппу $L_1\cap M$ примарного индекса. Ввиду изоморфизма прямых множителей можно считать, что L_1 не содержится в S, поэтому $S\cap L_1$ будет иметь в L_1 примарный индекс q^β.

Итак, простая группа L_1 содержит подгруппы $M\cap L$ и $S\cap L_1$ взаимно простых примарных индексов. По теореме Гуральника [7] группа $L_1\simeq \mathrm{PSL}\ (2,7)$.

Допустим, что $L_1C_G(L_1)\neq N_G(L_1)$. Так как факторгруппа $N_G(L_1)/C_G(L_1)$ изоморфна группе автоморфизмов группы $L_1=\mathrm{PSL}\ (2,7)$, то $N_G(L_1)/C_G(L_1)\cong \mathrm{PGL}\ (2,7)$. По лемме Фраттини $G=KN_G(T)$, где T – силовская 2-подгруппа из K, поэтому $N_G(L_1)=K(N_G(L_1)\cap N_G(T))$, т. е. в $N_G(T)$ существует элемент x, который на L_1 индуцирует внешний автоморфизм. Если F максимальная в G подгруппа, содержащая $N_G(T)$, то F будет K-максимальной в G подгруппой. Если $L_1\subseteq F$, то $K=L_1^G=L_1^{KF}=L_1^F\subseteq F$ и приходим к противоречию. Поэтому $L_1\cap F$ – собственная в L_1 подгруппа, допустимая относительно внешнего автоморфизма. В этом случае $21=|L_1: L_1\cap F|=|G:F|$, что противоречит условию теоремы.

Таким образом, $L_1C_G(L_1)=N_G(L_1)$. В этом случае $G=KC_G(D)$ по лемме 2, где D – некоторая диагональ в K. Пусть M – максимальная в G подгруппа, надстроенная над $DC_G(D)$. Тогда $M=(M\cap K)C_G(D)$. Так как $D\subseteq M\cap K$, то по лемме 3 подгруппа $M\cap K$ имеет индекс в K, равный 168^n для натурального n. Кроме того, $|G:M|=|M: K\cap K|=168^n$, и M является K-максимальной подгруппой. Противоречие. Теорема доказана.

Следствие. *Если каждая K-максимальная в G подгруппа имеет примарный индекс, отличный от 7 и 8, то подгруппа K разрешима.*

ТЕОРЕМА 3. *Если для каждой K-максимальной подгруппы M группы G либо $M\cap K$ нильпотентна, либо индекс $|G:M|$ примарен и не равен 7 и 8, то подгруппа разрешима.*

Доказательство проведем индукцией по числу $|G|+|K|$. Если N – нормальная в G подгруппа $\neq 1$, то факторгруппа $\overline{G}=G/N$ содержит нормальную подгруппу $\overline{K}=KN/N$. Пусть $\overline{M}=M/N$ – $\overline{K}$-максимальная в $\overline{G}$ подгруппа, т. е. $\overline{M}$ не содержит $\overline{K}$ и $\overline{M}\cap\overline{K}\neq\overline{1}$. Тогда $\overline{M}\cap\overline{K}=M/N\cap KN/N=N(M\cap K)/N$, поэтому $M\cap K\neq 1$, и подгруппа M не содержит K. Значит, M – K-максимальная в G подгруппа. Если $M\cap K$ нильпотентна, то $\overline{M}\cap\overline{K}$ нильпотентна. Если индекс $|G:M|$ примарен и отличен от 7 и 8, то и индекс $|\overline{G}:\overline{M}|=|G:M|$ примарен и отличен от 7 и 8. Таким образом, к факторгруппе G/N применима индукция, по которой подгруппа KN/N разрешима. Если N разрешима, то разрешима и G. Следовательно, в G нет разрешимых нормальных неединичных подгрупп.

Предположим, что $N \subseteq K$ и $N \neq K$. Пусть H — N-максимальная в G подгруппа, она существует по лемме 1. Тогда H не содержит K и $H \cap K \supseteq H \cap N \neq 1$, т. е. H будет K-максимальной подгруппой. Следовательно, каждая N-максимальная подгруппа удовлетворяет условиям теоремы. По индукции N разрешима. Противоречие.

Таким образом, K — минимальная нормальная подгруппа.

Если $M \cap K$ нильпотентна для всех K-максимальных подгрупп M, то K разрешима по теореме 1. Значит, не все пересечения нильпотентны, поэтому существует K-максимальная подгруппа F такая, что ее индекс $|G:F| = p^{\alpha}$, p — простое число, причем $p^{\alpha} \neq 7$ и 8.

Допустим, что существует другая K-максимальная подгруппа H примарного индекса $|G:H| = q^{\beta} \neq 7$ и 8 и допустим, что $q \neq p$. Тогда $HK = G$, поэтому $q^{\beta} = |G:H| = |K: K \cap H|$, т. е. q делит порядок K и в K имеется подгруппа $K \cap H$ примарного индекса. Так как K — минимальная нормальная подгруппа, то $K = A \times B$, где A — простая группа, а B — прямое произведение простых групп, изоморфных A. Если $K \cap H \supseteq A$, то B — q-группа; противоречие. Значит, A не содержится в $K \cap H$ и $H \cap A$ — собственная в A подгруппа. Теперь индекс $|A: A \cap \cap H| = q^{\beta_1}$, т. е. простая группа A содержит подгруппу $A \cap H$ примарного индекса q^{β_1}, не равного 7 и 8.

Аналогично, $FK = G$ и $p^{\alpha} = |G:F| = |K: K \cap F|$, а $|A: A \cap F| = p^{\alpha_1}$, т. е. $A \cap F$ — собственная в A подгруппа примарного индекса p^{α_1}, не равного 7 и 8.

Таким образом, в простой группе A имеются две собственные подгруппы $A \cap H$ и $A \cap F$ различных примарных индексов. По теореме [7] группа A изоморфна PSL (2,7), но там примарные индексы исчерпываются числами 7 и 8. Противоречие.

Следовательно, индексы всех K-максимальных подгрупп F, для которых $F \cap K$ не нильпотентна, являются степенями одного и того же простого числа p.

Пусть P — силовская p-подгруппа из K. По лемме Фраттини $N_G(P)K = G$. Обозначим через M максимальную в G подгруппу, содержащую $N_G(P)$. Так как $G = MK$ и $|G:M| = |N: M \cap K|$, то p не делит индекс $|G:M|$, поэтому $M \cap K$ нильпотентна.

Но $M \cap K$ нормальна в M, отсюда нормализаторы всех силовских подгрупп из $M \cap K$ совпадают с M, т. е. $N_G(Q) = M$ для каждой силовской подгруппы Q из $M \cap K$. Далее, $N_K(Q) = N_G(Q) \cap K = M \cap K$, поэтому $M \cap K$ — холловская в K подгруппа.

Итак, в группе K имеется холловская нильпотентная подгруппа $K \cap M$, и нормализатор каждой силовской подгруппы из $K \cap M$ совпадает с $K \cap M$. Если $K \cap M$ не примарна, то в K имеется нормальное дополнение к каждой силовской подгруппе из $K \cap M$ (см. [4] теорема 4 или [5], теорема 13.2.2). Это противоречит тому, что K — прямое произведение изоморфных простых групп.

Таким образом, $K \cap M = P$, и $N_K(P) = P$. По теореме Глаубермана $p = 2$ или 3. Кроме того, силовская p-подгруппа в A самонормализуема. Так как $p^{\alpha}=|G:F|=|K:K\cap F|$, то $|A:A\cap F|=p^{\alpha_1}$. Теперь из теоремы [7] вытекает, что A изоморфна одной из следующих групп: Ap^n; $\mathrm{PSL}(n, q)$ и $(q^n-1)/(q-1)=p^{\alpha}$; $\mathrm{PS}_{p_1}(3)$ и $p^{\alpha_1}=27$. Но в этих группах силовские p-подгруппы отличны от своих нормализаторов. Противоречие. Теорема доказана.

Следствие. *Если индекс каждой ненильпотентной K-максимальной подгруппы примарен и отличен от 7 и 8, то K разрешима.*

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило
19.10.89

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Шеметков Л. А. О конечных разрешимых группах // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1968. Т. 32, № 3. С. 533–559.
[2] Поляков Л. Я. О влиянии свойств максимальных подгрупп на разрешимость конечной группы // Конечные группы. Минск: Наука и техника, 1966. С. 89–97.
[3] Förster P. A note on primitive groups with small maximal subgroups // Algebra paper. Monach University. 1983, № 93. С. 1–5.
[4] Монахов В. С. О влиянии свойств максимальных подгрупп на строение конечной группы // Математические заметки. 1972. Т. 11, № 2. С. 183–190.
[5] Scott W. R. Group theory // Englewood Cliffs. 1964. № 1.
[6] Glauberman G. Prime-power factor groups of finite groups. II // Math. Z. 1970. Т. 117, № 1–4. С. 46–56.
[7] Guralnick R. Subgroups of prime power index in simple group // J. Algebra. 1983. Т. 81. С. 304–311.