

ОПТИМАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ИЗМЕРЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ФЕЙГТОВСКОГО КОНТУРА С ПОМОЩЬЮ ЭТАЛОНА ФАБРИ-ПЕРО

В. И. Цой, А. Г. Величко и М. Л. Кач

Произведен расчет параметров эталона Фабри—Перо, при которых минимальны случайные ошибки в определении доплеровской и лорентцовой частей ширины истинного фейгтовского контура по амплитудам первых двух гармоник интерферограммы. Рассмотрены случаи теплового и дробового шумов фотоприемника, случайные ошибки регистрации сигнала и флуктуации оптической длины пути между зеркалами интерферометра.

Введение

Как известно, оптимальные значения параметров спектральных приборов с точки зрения разрешения близких спектральных линий и с точки зрения определения отдельных параметров линии не совпадают [1, 2]. Если при определении параметров спектральной линии ее форма предполагается известной, то систематические ошибки могут быть учтены полностью [1] и оптимальными будут такие условия, при которых минимальны случайные ошибки.

В работе [3] приведена формула для оценки случайной ошибки в определении доплеровской части $\Delta \nu_d$ ширины фейгтовского контура по первым трем гармоникам интерферограммы эталона Фабри—Перо. Однако вопрос об определении лорентцовой ширины $\Delta \nu_l$ и задача отыскания оптимальных параметров эталона не обсуждались. В работе [4] вычислялись случайные ошибки в определении доплеровской ширины линии при работе с эталоном Фабри—Перо для случая дробового шума, причем рассматривался чисто доплеровский контур линии и вопрос об оптимальных параметрах эталона также не затрагивался. В статье [5] найдены оптимальные толщины эталона для случая, когда по методу Баллика определяется один из параметров $\Delta \nu_d$ или $\Delta \nu_l$, а второй считается известным при постоянной относительной ошибке в измерении сигнала. В статье [6] такая же задача решалась применительно к методу коэффициентов Фурье интерферограммы эталона Фабри—Перо для случаев, когда ошибка измерений обусловлена тепловым или дробовым шумом. В настоящей работе исследуются случайные ошибки для доплеровской и лорентцовой частей ширины истинного фейгтовского контура в случае их совместного определения по двум коэффициентам Фурье. Рассматриваются случаи теплового и дробового шумов фотоприемника, ошибки индикации сигнала и флуктуации оптической длины пути между зеркалами интерферометра.

Постановка задачи

Представим интерферограмму в виде ряда [7, 8]

$$f(z) = Ff_0 \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos mz + B_m \sin mz) \right], \quad (1)$$

где F — величина сигнала в отсутствие интерферометра. Здесь

$$z \equiv 2\pi \frac{\nu_0 - \nu_m}{\Delta\nu_m} = \frac{4\pi}{c} nt (\nu_0 - \nu_m), \quad (2)$$

где ν_0 — характерная частота исследуемой спектральной линии, ν_m — частота m -го интерференционного максимума, $\Delta\nu_m$ — область дисперсии, t — расстояние между зеркалами, n — коэффициент преломления вещества между зеркалами, c — скорость света в вакууме.

Для интерферометра с зеркалами, имеющими одинаковые коэффициенты отражения r , в отсутствие поглощения величина f_0 определяется выражением

$$f_0 = \frac{1-r}{1+r}. \quad (3)$$

Доплеровская $\Delta\nu_d$ и лорентцовская $\Delta\nu_x$ ширины истинного смешанного контура связаны с коэффициентами ряда (1) соотношениями [8]

$$\sqrt{A_m^2 + B_m^2} \equiv C_m = r^m e^{-mL - \frac{m^2 D^2}{4}}, \quad (4)$$

$$L \equiv \frac{2\pi n \Delta\nu_d t}{c}, \quad (5)$$

$$D \equiv \frac{2\pi n \Delta\nu_x t}{c \sqrt{\ln 2}}. \quad (6)$$

Равенство (4) предполагает, что аппаратная функция эталона определяется только коэффициентами отражения зеркал и толщиной эталона. В рассматриваемом случае интерферограмма симметрична относительно точки $z = z_0$ в ее максимуме, и ряд (1) можно переписать в виде

$$f(z) = Ff_0 \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} C_m \cos m(z - z_0) \right]. \quad (7)$$

Пользуясь соотношениями (4), (5), (6), нетрудно выразить исследуемые параметры $\Delta\nu_d$, $\Delta\nu_x$ истинного контура через амплитуды C_l , C_m двух каких-либо гармоник интерферограммы. Считая, что ошибки в определении $\Delta\nu_d$ и $\Delta\nu_x$ вызваны только ошибками в определении коэффициентов C_l и C_m интерферограммы, получим по обычным правилам [9] следующие выражения для случайных среднеквадратических относительных ошибок в определении параметров контура:

$$\frac{\sigma[\Delta\nu_d]}{\Delta\nu_d} = \frac{2}{D^2 |l-m|} \left\{ \frac{1}{l^2} \frac{\sigma^2[C_l]}{C_l^2} + \frac{1}{m^2} \frac{\sigma^2[C_m]}{C_m^2} - \frac{2}{lm} \frac{K[C_l, C_m]}{C_l C_m} \right\}^{1/2}, \quad (8)$$

$$\frac{\sigma[\Delta\nu_x]}{\Delta\nu_x} = \frac{1}{D |l-m|} \left\{ \left(\frac{m}{l} \right)^2 \frac{\sigma^2[C_l]}{C_l^2} + \left(\frac{l}{m} \right)^2 \frac{\sigma^2[C_m]}{C_m^2} - \frac{2K[C_l, C_m]}{C_l C_m} \right\}^{1/2}. \quad (9)$$

Здесь $\sigma^2[C_l] = K[C_l, C_l]$, $\sigma^2[C_m] = K[C_m, C_m]$ — дисперсии ошибок в определении коэффициентов Фурье C_l , C_m , а $K[C_l, C_m]$ — корреляционный момент.

Амплитуды гармоник интерферограммы в соответствии с разложением (7) равны

$$C_m + \Delta C_m = \frac{\int_0^{2\pi} [f(z) + \Delta(z)] \cos m(z - z_0) dz}{\int_0^{2\pi} [f(z) + \Delta(z)] dz}, \quad (10)$$

где $\Delta(z)$ — случайная ошибка в измерении сигнала, ΔC_m — ошибка в определении коэффициента C_m . Полагая $\Delta(z)$ малой величиной по сравнению

с $f(z)$ во всех точках, получим, пользуясь формулами (7) и (10), что корреляционные моменты для величин C_l, C_m равны

$$K[C_l, C_m] \equiv \overline{\Delta C_l \Delta C_m} = \frac{1}{(2\pi F f_0)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} [\cos l(z - z_0) - C_l] [\cos m(z_1 - z_0) - C_m] \overline{\Delta(z) \Delta(z_1)} dz dz_1, \quad (11)$$

где черта означает усреднение по ансамблю интерферограмм. В случае дискретной регистрации интерферограммы в N точках $z_k = 2\pi k/N$, где $k = 1, 2, \dots, N$, выражение (11) заменяется двойной суммой

$$K[C_l, C_m] = \frac{1}{(N F f_0)^2} \sum_{l, k=1}^N [\cos l(z_i - z_0) - C_l] [\cos m(z_k - z_0) - C_m] \overline{\Delta(z_i) \Delta(z_k)}. \quad (12)$$

При этом достигаемая точность измерений эквивалентна точности в случае непрерывной записи наблюдаемого контура со скоростью сканирования $v \equiv dz/d\tau = \pi/N \tau_0$, где τ_0 — постоянная времени приемно-регистрирующей системы наиболее распространенного типа с экспоненциальной переходной функцией [10–12].

Среднеквадратический уровень случайной ошибки в измеренном сигнале зависит от природы источника ошибок. В том случае, когда преобладают тепловые шумы или наводки, этот уровень не зависит от полезного сигнала, тогда как уровень дробового шума пропорционален квадратному корню из сигнала [10, 13, 14]. Если динамический диапазон измерений сигнала велик и необходимы многопредельные измерения, может оказаться преобладающей ошибка регистрирующего прибора, уровень которой прямо пропорционален полезному сигналу. Флуктуации сканирования приводят к регистрации сигнала в точках, соседних с некоторой средней, в результате чего появляется случайная ошибка измерений, уровень которой пропорционален производной от полезного сигнала по переменной сканирования. В соответствии со сказанным корреляционные моменты интерферограммы, зарегистрированной в независимых точках, могут иметь вид (см. также [13, 14])

$$\overline{\Delta(z_i) \Delta(z_k)} = \delta_{ik} Q, \quad (13)$$

$$\overline{\Delta(z_i) \Delta(z_k)} = \delta_{ik} Q_1 f(z_k), \quad (14)$$

$$\overline{\Delta(z_i) \Delta(z_k)} = \delta_{ik} Q_2 f^2(z_k), \quad (15)$$

$$\overline{\Delta(z_i) \Delta(z_k)} = \delta_{ik} Q_3 \left(\frac{df}{dz_k} \right)^2. \quad (16)$$

Здесь δ_{ik} — символ Кронекера, а $Q, Q_1 f(z_k), Q_2 f^2(z_k), Q_3 (df/dz_k)^2$ — мощности соответствующих случайных сигналов на выходе приемно-регистрирующей системы.

Подставляя выражения (13)–(16) в формулу (12) и полагая число N достаточно большим, получим следующие выражения для корреляционных моментов коэффициентов C_l, C_m для рассмотренных источников ошибок соответственно:

$$K[C_l, C_m] = \frac{1}{NM^2} \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^2 \left(\frac{\delta_{lm}}{2} + C_l C_m \right), \quad (17)$$

$$K_1[C_l, C_m] = \frac{1}{NM^2} \frac{1+r}{1-r} \left(\frac{C_{|l-m|} + C_{l+m}}{2} - C_l C_m \right), \quad (18)$$

$$K_2[C_l, C_m] = \frac{1}{NM^2} \left\{ \frac{\delta_{lm}}{2} + (1 - \delta_{lm}) C_{|l-m|} + C_{l+m} - 3C_l C_m + \sum_{k=1}^{\infty} C_k (C_{k+|l-m|} + C_{k+l+m} - 2C_l C_{k+m} - 2C_m C_{k+l} + 2C_l C_m C_k) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{|l-m|-1} C_k C_{|l-m|-k} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{l+m-1} C_k C_{l+m-k} - C_l \sum_{k=1}^{m-1} C_k C_{m-k} - C_m \sum_{k=1}^{l-1} C_k C_{l-k} \right\}, \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
K_3 [C_l, C_m] = & \frac{1}{NM_3^2} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[C_l C_m k^2 C_k^2 + \frac{1}{2} k (k + |l - m|) C_k C_{k+l-m} + \right. \right. \\
& + \frac{1}{2} k (k + l + m) C_k C_{k+l+m} - C_l k (k + m) C_k C_{k+m} - C_m k (k + l) C_k C_{k+l}] - \\
& - \frac{1}{4} \sum_{k=m}^{|l-m|-1} k (|l - m| - k) C_k C_{|l-m|-k} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{l+m-1} k (l + m - k) C_k C_{l+m-k} + \\
& \left. + \frac{C_l}{2} \sum_{k=1}^{m-1} C_k C_{m-k} k (m - k) + \frac{C_m}{2} \sum_{k=1}^{l-1} C_k C_{l-k} k (l - k) \right\}. \quad (20)
\end{aligned}$$

Здесь величины $M = F/Q$, $M_1 = \sqrt{F/Q_1}$, $M_2 = \sqrt{1/Q_2}$ имеют смысл отношения сигнал—шум при облучении фотоприемника в отсутствие интерферометра. Можно показать, что $M_3 = \sqrt{\tau_0/\xi}$, где τ_0 — постоянная времени регистрирующей системы, ξ/π — спектральная плотность в шкале круговых частот мощности флуктуаций переменной сканирования z .

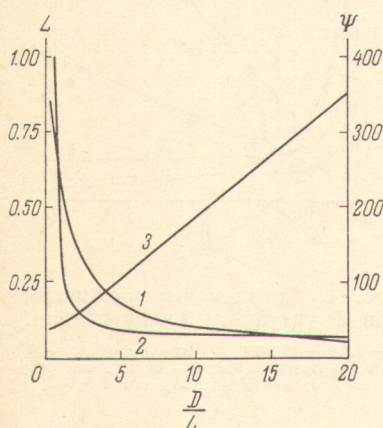


Рис. 1. Оптимальные параметры при тепловом шуме.
1 — L , 2 — Ψ для $\Delta\nu_d$, 3 — Ψ для $\Delta\nu_l$.
 $l = 1, m = 2, r = 0.5$.

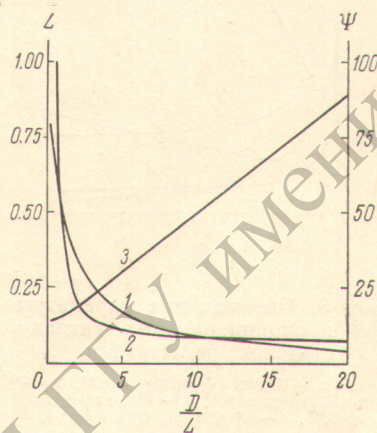


Рис. 2. Оптимальные параметры при дробовом шуме.
1 — L , 2 — Ψ для $\Delta\nu_d$, 3 — Ψ для $\Delta\nu_l$.
 $l = 1, m = 2, r = 0.8$.

Таким образом, с помощью формул (4), (8), (9), (17)—(20) среднеквадратические ошибки в определении параметров истинного фойгтовского контура могут быть выражены в виде

$$\frac{\sigma[\Delta\nu]}{\Delta\nu} = \frac{1}{M_0 \sqrt{N}} \Psi \left(l, m, \frac{D}{L}, r, L \right), \quad (21)$$

где $\Delta\nu$ принимает значения $\Delta\nu_d, \Delta\nu_l$. Величина M_0 принимает значения M, M_1, M_2, M_3 а Ψ — функция, зависящая от типа ошибок.

Результаты

Функции ошибок Ψ зависят от соотношения D/L между доплеровской и лорентцовой частями контура, номеров l, m используемых гармоник интерферограммы, коэффициента отражения r зеркал, а также от параметра L , пропорционального толщине t интерферометра.

Анализ этих функций показывает, что в случаях теплового и дробового шумов существуют оптимальные значения коэффициентов отражения зеркал эталона, при которых исследуемые ошибки минимальны. Эти значения почти не зависят от параметров истинного контура и близки к 0.5 для теплового шума и к 0.8 для дробового шума при использовании первых двух гармоник интерферограммы. Следует отметить, что при

отклонении коэффициентов отражения от оптимальных в широком интервале от 0.4 до 0.9 ошибки в определении параметров $\Delta\nu_d$ и $\Delta\nu_x$ растут довольно медленно. В случае ошибок, обусловленных погрешностями регистрации сигнала, а также ошибок в сканировании точность определения $\Delta\nu_d$ и $\Delta\nu_x$ тем лучше, чем выше коэффициенты отражения.

Во всех четырех рассмотренных случаях существуют оптимальные значения толщины эталона Фабри—Перо. Строго говоря, эти значения несколько различны для доплеровской и лорентцовой частей ширины контура, однако можно указать такие толщины, при которых ошибки в определении как доплеровской, так и лорентцовой ширины одновременно мало отличаются от минимальных.

На рис. 1—4 представлены значения параметра L , пропорционального толщине t интерферометра, которые могут быть рекомендованы в качестве

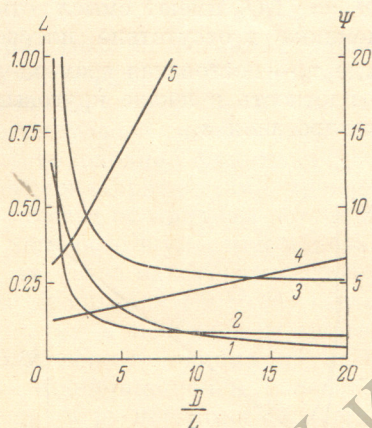


Рис. 3. Оптимальные параметры при пропорциональном сигналу ошибках регистрации.

1 — L , 2 — Ψ для $\Delta\nu_d$ при $r=0.95$, 3 — Ψ для $\Delta\nu_d$ при $r=0.6$, 4 — Ψ для $\Delta\nu_x$ при $r=0.95$, 5 — Ψ для $\Delta\nu_x$ при $r=0.6$.

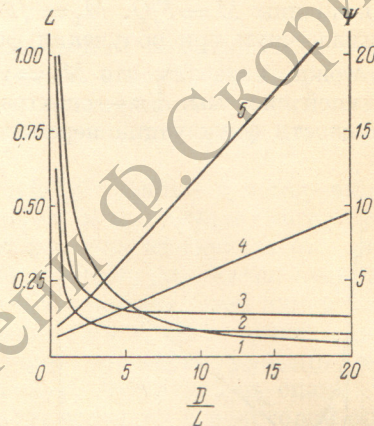


Рис. 4. Оптимальные параметры при флуктуационном сканировании.

1 — L , 2 — Ψ для $\Delta\nu_d$ при $r=0.95$, 3 — Ψ для $\Delta\nu_d$ при $r=0.6$, 4 — Ψ для $\Delta\nu_x$ при $r=0.95$, 5 — Ψ для $\Delta\nu_x$ при $r=0.6$.

оптимальных для определения $\Delta\nu_d$ и $\Delta\nu_x$ по первым двум гармоникам интерферограммы при работе по методу, описанному в работе [8]. На этих же рисунках указаны соответствующие значения функций Ψ , которые могут быть использованы для вычисления по формуле (21) среднеквадратических относительных ошибок в определении фойгтовских параметров $\Delta\nu_d$ и $\Delta\nu_x$. Как видно из рисунков, оптимальные значения параметра L и, следовательно, толщины t интерферометра для всех рассмотренных источников случайных ошибок близки друг к другу. Это очень удобно для экспериментатора, так как позволяет выбирать при ожидаемых параметрах $\Delta\nu_d$, $\Delta\nu_x$ такую толщину интерферометра, которая независимо от источника случайных ошибок обеспечивает наибольшую точность.

В приведенных расчетах предполагалось, что зеркала интерферометра идеально плоские, а диафрагма прибора бесконечно мала. Аналогичные вычисления с использованием известных формул Шабалла [4, 7] показывают, что если апертура диафрагмы захватывает не более десятой доли интерференционного порядка, погрешности полировки не больше $\lambda/60$, а сферичность зеркал не выше $\lambda/20$, то в качестве оптимальных значений толщины эталона по-прежнему могут быть использованы значения, приведенные на рис. 1—4. При этом ошибки в определении фойгтовских параметров истинного контура не более чем на $10 \div 20\%$ превысят значения, соответствующие этим же рисункам.

Литература

- [1] С. Г. Раутиан. Усп. физ. наук., 66, 475, 1958.
[2] Г. Г. Петраш. Инж. физ. ж., *1, 74, 1958.

- [3] G. T. Best. Appl. Opt., 6, 287, 1967.
[4] P. V. Haas, R. G. Roble. Appl. Opt., 10, 193, 1971.
[5] А. Г. Величко, М. Л. Кац, В. И. Цой. Опт. и спектр., 30, 961, 1971.
[6] А. Г. Величко, М. Л. Кац, В. И. Цой. Опт. и спектр., 35, 759, 1973.
[7] V. G. Coorper. Appl. Opt., 10, 525, 1971.
[8] А. Г. Величко, В. И. Цой. Опт. и спектр., 32, 202, 1972.
[9] Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике. Изд. «Наука», М., 1968.
[10] К. И. Тарасов. Спектральные приборы. Машиностроение. Л., 1968.
[11] П. Ф. Паршин. Опт. и спектр., 16, 507, 1964.
[12] Г. Г. Петраш, С. Г. Раутиан. Инж. физ. ж., 1, 80, 1958.
[13] С. М. Рытов. Введение в статистическую радиофизику. Изд. «Наука», М., 1966.
[14] Сб. «Инфракрасная спектроскопия высокого разрешения». Изд. «Мир», М., 1972.

Поступило в Редакцию 6 июля 1973 г.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. Скорини