МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

ПЕРЕСЕЧЕНИЯ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ В СВЯЗИ С ЛОКАЛЬНЫМИ ФОРМАЦИЯМИ И ОБОБЩЁННО АБНОРМАЛЬНО ПОЛНЫМ ПОДГРУППОВЫМ *m*-ФУНКТОРОМ

Л.М. Белоконь

Могилёвский государственный университет продовольствия

INTERSECTIONS OF MAXIMAL SUBGROUPS IN A FINITE GROUP IN CONNECTION WITH THE LOCAL FORMATIONS AND A GENERALLY ABNORMALLY FULL SUBGROUP *m*-FUNCTOR

L.M. Belokon

Mogilev State University of Food Technologies

Пусть π − некоторое множество простых чисел. Установлены достаточные условия, предъявляемые к локальной формации $\mathfrak{F}=\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$, конечной группе G и подгрупповому m-функтору θ, при которых $\overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G)=\Phi_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G)=\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)\in\mathfrak{F}$, а также $\overline{\Delta}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}}(G)=\Phi_{\theta_\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}}(G)=\Phi_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G)=\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)\subset G_{\mathfrak{F}}\subset G$ в случае радикальности $\mathfrak{F}=\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$. В качестве следствий получены утверждения для случая $\pi=\varnothing$ и соответствующих локальных формаций.

Ключевые слова: *максимальные подгруппы конечных групп*, *локальные и радикальные локальные формации*, *подгрупповой m-функтор.*

Let π be a set of primes. The sufficient conditions that must satisfy a local formation $\mathfrak{F}=\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$, a finite group G and a subgroup m-functor θ, under which $\overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G)=\Phi_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G)=\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)\in\mathfrak{F}$ also $\overline{\Delta}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}}(G)=\Phi_{\theta_\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}}(G)=\Phi_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G)=\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)\subset G_{\mathfrak{F}}\subset G$, if $\mathfrak{F}=\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$ is radical, are achieved. As the consequences of the main results there were obtained the assertions for $\pi=\varnothing$ and corresponding local formations.

Keywords: *maximal subgroups of finite groups*, *local and local radical formations*, *subgroup m-functor.*

Введение

Рассматриваются только конечные группы и формации конечных групп. Используются определения и обозначения, принятые в монографии [1]. Пусть π − некоторое множество простых чисел, $\mathfrak{F}=\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$ − локальная S_n-замкнутая формация, содержащая формацию всех нильпотентных π'-групп $\mathfrak{N}_{\pi'}$. В работе [2] доказано, что если подгруппа $\Phi_\pi(G)$ группы G обладает свойством C_π и в G существуют $\mathfrak{F}$-абнормальные, не принадлежащие $\mathfrak{F}$ и имеющие с числами из π взаимно простые индексы, максимальные подгруппы, то пересечение $\overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$ всех таких подгрупп совпадает с пересечением $\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$ всех $\mathfrak{F}$-абнормальных, имеющих с числами из π взаимно простые индексы, максимальных подгрупп, причём $\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)\in\mathfrak{F}$. При дополнительном условии радикальности для формации $\mathfrak{F}=\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$ были установлены условия, при которых $\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$ совпадает с пересечением $\overline{\Delta}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}}(G)$ всех $\mathfrak{F}$-абнормальных, не принадлежащих $\mathfrak{F}$, имеющих с числами из π взаимно простые индексы и не содержащих $\mathfrak{F}$-радикал $G_{\mathfrak{F}}$, максимальных подгрупп группы G. Из полученных результатов как следствия вытекают утверждения относительно локальной S_n-замкнутой (локальной радикальной) формации $\mathfrak{F}$, содержащей формацию всех нильпотентных групп $\mathfrak{N}$, и пересечений $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G)$ и $\overline{\Delta}_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}}(G)$ соответствующих максимальных подгрупп без ограничений на их индексы в группе. Настоящая работа расширяет эти результаты, используя понятия $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально π'-полного, радикально $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально π'-полного, а также $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально полного и радикально $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально полного подгрупповых m-функторов. Исследование пересечений максимальных подгрупп с привлечением функторного метода восходит к работе [3]. В работе [4] изучались пересечения $\overline{\Phi}_\theta^{\mathfrak{F}}(G)$ и $\overline{\Phi}_{\theta,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}}(G)$, θ − абнормально полный регулярный подгрупповой m_s-функтор.

© *Белоконь Л.М.*, 2017

1 Предварительные сведения

Под подгрупповым m-функтором понимают всякое отображение θ, которое ставит в соответствие каждой группе G множество $\theta(G)$, состоящее из группы G и некоторых её максимальных подгрупп. Подгруппы множества $\theta(G)$ называют θ-подгруппами группы G, через $\Phi_\theta(G)$ обозначают пересечение всех θ-подгрупп группы G. Подгрупповой m-функтор θ, обладающий свойством: если $H \in \theta(G)$, то $H^x \in \theta(G)$ для всех $x \in G$, рассматривался в работах [4], [5]. Такой функтор будем называть подгрупповым m_s-функтором [6], [7].

Обозначаем через π некоторое множество простых чисел, $\pi' = \mathrm{P} \setminus \pi$, где P – множество всех простых чисел, считаем, что $\pi \neq \mathrm{P}$. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация, θ – подгрупповой m-функтор, G – группа. Через $\mathrm{M}(G)$ будем обозначать множество всех максимальных подгрупп группы G; $\mathrm{M}_\theta(G)$ – множество всех максимальных θ-подгрупп группы G. В отношении некоторых конкретных подгрупповых m-функторов используются следующие обозначения.

$\mathrm{M}_\pi(G)$ – множество всех максимальных подгрупп группы G, имеющих взаимно простые с числами из π индексы, $\mathrm{M}^{\mathfrak{F}}(G)$ – множество всех $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных подгрупп группы G, $\overline{\mathrm{M}}^{\mathfrak{F}}(G)$ – множество всех $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных подгрупп группы G, не принадлежащих $\mathfrak{F}$; $\Phi_\pi(G)$, $\Delta^{\mathfrak{F}}(G)$ и $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G)$ – пересечения всех подгрупп множеств $\mathrm{M}_\pi(G)$, $\mathrm{M}^{\mathfrak{F}}(G)$ и $\overline{\mathrm{M}}^{\mathfrak{F}}(G)$, соответственно,

$$\mathrm{M}_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = \mathrm{M}^{\mathfrak{F}}(G) \cap \mathrm{M}_\pi(G), \quad \overline{\mathrm{M}}_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = \overline{\mathrm{M}}^{\mathfrak{F}}(G) \cap \mathrm{M}_\pi(G);$$

$$\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = \cap H, H \in \mathrm{M}_\pi^{\mathfrak{F}}(G), \quad \overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = \cap H, H \in \overline{\mathrm{M}}_\pi^{\mathfrak{F}}(G).$$

Для формации всех нильпотентных групп $\mathfrak{N}$ используется обозначение $\Delta_\pi^{\mathfrak{N}}(G) = \Delta_\pi(G)$, $\Delta(G)$ – подгруппа Гашюца, пересечение всех абнормальных (неинвариантных) максимальных подгрупп группы G.

Пусть φ – некоторое множество групп. Обозначаем:

$(\Delta^{\mathfrak{F}})^{\overline{\varphi}}(G)$ – пересечение всех групп из $\mathrm{M}^{\mathfrak{F}}(G)$, не принадлежащих φ; $(\Delta^{\mathfrak{N}})^{\overline{\varphi}}(G) = (\Delta)^{\overline{\varphi}}(G)$;

$(\mathrm{M}_\pi^{\mathfrak{F}})^{\overline{\varphi}}(G)$ – множество всех групп из $\mathrm{M}_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$, не принадлежащих множеству φ;

$(\Delta_\pi^{\mathfrak{F}})^{\overline{\varphi}}(G)$ – пересечение всех групп из $(\mathrm{M}_\pi^{\mathfrak{F}})^{\overline{\varphi}}(G)$; $(\Delta_\pi^{\mathfrak{N}})^{\overline{\varphi}}(G) = (\Delta_\pi)^{\overline{\varphi}}(G)$;

Пусть N – нормальная подгруппа группы G. Тогда:

$(\mathrm{M}_{\overline{N}}^{\mathfrak{F}})^{\overline{\varphi}}(G)$ – множество всех групп из $(\mathrm{M}^{\mathfrak{F}})^{\overline{\varphi}}(G)$, не содержащих N;

$(\mathrm{M}_{\pi,\overline{N}}^{\mathfrak{F}})^{\overline{\varphi}}(G)$ – множество всех групп из $(\mathrm{M}_\pi^{\mathfrak{F}})^{\overline{\varphi}}(G)$, не содержащих N;

$(\Delta_{\overline{N}}^{\mathfrak{F}})^{\overline{\varphi}}(G)$ – пересечение всех групп из $(\mathrm{M}_{\overline{N}}^{\mathfrak{F}})^{\overline{\varphi}}(G)$; $(\Delta_{\overline{N}})^{\overline{\varphi}}(G) = (\Delta_{\overline{N}}^{\mathfrak{N}})^{\overline{\varphi}}(G)$;

$(\Delta_{\pi,\overline{N}}^{\mathfrak{F}})^{\overline{\varphi}}(G)$ – пересечение всех групп из $(\mathrm{M}_{\pi,\overline{N}}^{\mathfrak{F}})^{\overline{\varphi}}(G)$; $(\Delta_{\pi,\overline{N}})^{\overline{\varphi}}(G) = (\Delta_{\pi,\overline{N}}^{\mathfrak{N}})^{\overline{\varphi}}(G)$.

Кроме того,

$\mathrm{M}_{\overline{N}}(G)$ – множество всех групп из $\mathrm{M}(G)$, не содержащих N;

$\mathrm{M}_{\overline{N}}^{\mathfrak{F}}(G) = \mathrm{M}^{\mathfrak{F}}(G) \cap \mathrm{M}_{\overline{N}}(G)$; $\Delta_{\overline{N}}^{\mathfrak{F}}(G)$ – пересечение всех групп из $\mathrm{M}_{\overline{N}}^{\mathfrak{F}}(G)$;

$\mathrm{M}_{\pi,\overline{N}}^{\mathfrak{F}}(G)$ – множество всех групп из $\mathrm{M}_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$, каждая из которых не содержит N;

$\Delta_{\pi,\overline{N}}^{\mathfrak{F}}(G)$ – пересечение всех групп из $\mathrm{M}_{\pi,\overline{N}}^{\mathfrak{F}}(G)$;

$\overline{\Delta}_{\pi,\overline{N}}^{\mathfrak{F}}(G)$ – пересечение всех групп из $\overline{\mathrm{M}}_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$, не содержащих N;

$\overline{\mathrm{M}}_{\overline{N}}^{\mathfrak{F}}(G) = \overline{\mathrm{M}}^{\mathfrak{F}}(G) \cap \mathrm{M}_{\overline{N}}(G)$; $\overline{\Delta}_{\overline{N}}^{\mathfrak{F}}(G)$ – пересечение всех групп из $\overline{\mathrm{M}}_{\overline{N}}^{\mathfrak{F}}(G)$;

$\overline{\Delta}_{\pi,N}^{\mathfrak{F}}(G)$ – пересечение всех групп из $\overline{\mathrm{M}}_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$, содержащих N,

$$(\Delta_{\overline{N}})^{\overline{\mathfrak{F}}}(G) = (\Delta_{\overline{N}}^{\mathfrak{N}})^{\overline{\mathfrak{F}}}(G).$$

Пусть θ – некоторый подгрупповой m-функтор. Обозначаем:

$\mathrm{M}_\theta^{\mathfrak{F}}(G)$ – множество всех $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных θ-подгрупп группы G;

$\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G)$ – пересечение всех групп из $\mathrm{M}_\theta^{\mathfrak{F}}(G)$;

$\overline{\Phi}_\theta^{\mathfrak{F}}(G)$ – пересечение всех групп из

$$\overline{\mathrm{M}}_\theta^{\mathfrak{F}}(G) = \overline{\mathrm{M}}^{\mathfrak{F}}(G) \cap \mathrm{M}_\theta(G);$$

$\overline{\mathrm{M}}_{\theta,\overline{N}}^{\mathfrak{F}}(G)$ – множество всех групп из $\overline{\mathrm{M}}_\theta^{\mathfrak{F}}(G)$, не содержащих N;

$\overline{\Phi}_{\theta,\mathrm{N}}^{\mathfrak{F}}(G)$ – пересечение всех групп из $\overline{\mathrm{M}}_{\theta,\overline{N}}^{\mathfrak{F}}(G)$.

Через θ_π обозначаем подгрупповой m-функтор, выделяющий в каждой группе G множество $\mathrm{M}_{\theta_\pi}(G)$ всех максимальных θ-подгрупп, имеющих взаимно простые индексы с числами из π; пересечение всех максимальных θ_π-подгрупп в G обозначаем $\Phi_{\theta_\pi}(G)$. Кроме того,

$$\mathrm{M}_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G) = \mathrm{M}_{\theta_\pi}(G) \cap \mathrm{M}^{\mathfrak{F}}(G);$$

$\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi}(G)$ − пересечение всех групп из $\mathrm{M}^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi}(G)$;

$$\mathrm{M}^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi,\overline{N}}(G)=\mathrm{M}^{\mathfrak{F}}_{\overline{N}}(G)\cap\mathrm{M}_{\theta_\pi}(G);$$

$$\overline{\mathrm{M}}^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi,\overline{N}}(G)=\overline{\mathrm{M}}^{\mathfrak{F}}_{\overline{N}}(G)\cap\mathrm{M}_{\theta_\pi}(G);$$

$\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi,\overline{N}}(G)$ и $\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi,\overline{N}}(G)$ обозначают пересечения всех групп из $\mathrm{M}^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi,\overline{N}}(G)$ и $\overline{\mathrm{M}}^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi,\overline{N}}(G)$, соответственно.

Для $\pi=\{p\}$, p − простое число, в обозначениях используем p вместо $\{p\}$: θ_p, $\Delta_p(G)$ и т. д. В случае отсутствия в группе G максимальных подгрупп, отвечающих требуемым условиям, соответствующие пересечения полагаем совпадающими с G.

$$\tilde{\mathrm{F}}_N(G)/N=Soc(G/N);$$

$$\tilde{\mathrm{F}}_N(G)\in\left\{\tilde{\mathrm{F}}_\Delta(G),\tilde{\mathrm{F}}_{\Delta_\pi}(G),\tilde{\mathrm{F}}_{\Delta^{\mathfrak{F}}_\pi}(G),\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_\pi}(G)\right\}$$

в соответствующих случаях для

$$N\in\left\{\Delta(G),\Delta_\pi(G),\Delta^{\mathfrak{F}}_\pi(G),\Phi_\pi(G)\right\}.$$

Сформулируем в виде леммы некоторые результаты, которые будут использованы в настоящей работе.

***Лемма* 1.1.** *Имеют место следующие утверждения.*

(1) [6, лемма 1.1] *Пусть* $\mathfrak{F}_1$ *и* $\mathfrak{F}_2$ *− непустые формации,* $\pi(\mathfrak{F}_1)\cap\pi(\mathfrak{F}_2)=\varnothing$, $\mathfrak{F}_0=\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$. *Для всякой формации* $\mathfrak{F}_3$, *удовлетворяющей условию* $\mathfrak{F}_2\subseteq\mathfrak{F}_3\subseteq\mathfrak{F}_0$, *и максимальной,* $\pi(\mathfrak{F}_2)$ *-индекса подгруппы H в группе G равносильны условия: подгруппа H* $\mathfrak{F}_i$*-абнормальна в G,* $i\in\{0,2,3\}$. *В частности, если максимальная в группе G подгруппа H имеет индекс, взаимно простой с числами из множества простых чисел* π, *то условие абнормальности H в G равносильно условию* $\mathfrak{N}_{\pi'}$*-абнормальности и условию* $\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}$*-абнормальности H в G.*

(2) [8]. *Пусть* $\mathfrak{F}=\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$ *− локальная* S_n*-замкнутая формация,* $\pi(\mathfrak{F})=\mathrm{P}$. *И пусть подгруппа* $\Phi_\pi(G)$ *группы G обладает свойством* C_π. *Тогда* $\Delta^{\mathfrak{F}}_\pi(G)\in\mathfrak{F}$.

(3) [9]. *Пусть* $\mathfrak{F}=\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$ *− радикальная локальная формация,* $\pi(\mathfrak{F})=\mathrm{P}$. *И пусть подгруппа* $\Phi_\pi(G)$ *группы G обладает свойством* C_π; *L − субнормальная подгруппы группы G, K − нормальная подгруппа L. Если* $K\subseteq\Delta^{\mathfrak{F}}_\pi(G)$, *то*

$$(L/K)_{\mathfrak{F}}=L_{\mathfrak{F}}/K.$$

(4) [6]. I. *Если подгруппа* $\Phi_\pi(G)$ *группы G обладает свойством* C_π, *то* $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_\pi}(G)=\tilde{\mathrm{F}}_{\Delta_\pi}(G)$.

II. *Для любой группы G справедливо равенство* $\tilde{\mathrm{F}}(G)=\tilde{\mathrm{F}}_\Delta(G)$.

Простая проверка показывает справедливость следующего утверждения.

(5) *Пусть* $\mathfrak{F}_0$ *− непустая формация,* θ *−* $\mathfrak{F}_0$*-абнормально полный подгрупповой m-функтор. Тогда* θ *является* $\mathfrak{F}$*-абнормально полным подгрупповым m-функтором для всякой формации* $\mathfrak{F}$, *содержащей* $\mathfrak{F}_0$.

В частности, [7], *всякий абнормально полный подгрупповой m-функтор является* $\mathfrak{F}$*-абнормально полным для любой формации* $\mathfrak{F}$, *содержащей формацию всех нильпотентных групп.*

Согласно определению [6], [7], подгрупповой m-функтор θ называется $\mathfrak{F}$-абнормально полным, $\mathfrak{F}$ − непустая формация, если $\theta(G)\supseteq\mathrm{M}^{\mathfrak{F}}(G)$ для любой группы G.

***Определение* 1.1.** Пусть $\mathfrak{F}$ − непустая формация. Подгрупповой m-функтор θ назовём $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально π'-полным ($\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально полным) подгрупповым m-функтором, если $\theta(G)\supseteq\overline{\mathrm{M}}^{\mathfrak{F}}_\pi(G)$ ($\theta(G)\supseteq\overline{\mathrm{M}}^{\mathfrak{F}}(G)$, соответственно) для любой группы G.

Отметим, что ввиду $\overline{\mathrm{M}}^{\mathfrak{F}}_\pi(G)\subseteq\mathrm{M}^{\mathfrak{F}}_\pi(G)$ для любой группы G, $\mathfrak{F}$ − непустая формация, условие, определяющее $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально π'-полный подгрупповой m-функтор, является более слабым, чем условие, определяющее $\mathfrak{F}$-абнормально π'-полный подгрупповой m-функтор θ [7], согласно которому $\theta(G)\supseteq\mathrm{M}^{\mathfrak{F}}_\pi(G)$; всякий $\mathfrak{F}$-абнормально π'-полный подгрупповой m-функтор является и $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально π'-полным. Всякий $\mathfrak{F}$-абнормально полный подгрупповой m-функтор является $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально полным.

***Определение* 1.2.** Пусть $\mathfrak{F}$ − непустая радикальная формация. Подгрупповой m-функтор θ назовём радикально $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально π'-полным (радикально $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально полным) подгрупповым m-функтором, если $\theta(G)\supseteq\overline{\mathrm{M}}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G)$ ($\theta(G)\supseteq\overline{\mathrm{M}}^{\mathfrak{F}}_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G)$, соответственно) для любой группы G.

Пусть $\mathfrak{F}$ − непустая радикальная формация. Так как для любой группы G справедливы включения $\overline{\mathrm{M}}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G)\subseteq\overline{\mathrm{M}}^{\mathfrak{F}}_\pi(G)$ и $\overline{\mathrm{M}}^{\mathfrak{F}}_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G)\subseteq\overline{\mathrm{M}}^{\mathfrak{F}}(G)$, то $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально π'-полный подгрупповой m-функтор является и радикально $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально π'-полным подгрупповым m-функтором, а $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально полный подгрупповой m-функтор

является радикально $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально полным подгрупповым m-функтором.

Заметим, что ввиду леммы 4.2[1] локальная формация $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда содержит формацию всех нильпотентных групп (равносильно − всех нильпотентных π'-групп для локальной формации $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$), когда $\pi(\mathfrak{F}) = \mathrm{P}$ − множество всех простых чисел.

2 Пересечения максимальных подгрупп конечных групп в связи с локальной S_n-замкнутой формацией $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{N}$ ($\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{N}$) и $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально полным ($\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально π'-полным, соответственно) подгрупповым m-функтором

***Лемма* 2.1.** *Пусть G − группа, $\mathfrak{F}$ − непустая формация, θ − подгрупповой m_s-функтор. Тогда*:

(1) *если* $\overline{\Phi}_\theta^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$, *то* $\overline{\Phi}_\theta^{\mathfrak{F}}(G) = \Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G)$;

(2) *если* $\overline{\Phi}_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$, *то* $\overline{\Phi}_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G) = \Phi_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G)$.

Доказательство. (1) Предположим, что $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G) \subset \overline{\Phi}_\theta^{\mathfrak{F}}(G)$. Тогда в G существует хотя бы одна максимальная $\mathfrak{F}$-абнормальная θ-подгруппа H, принадлежащая формации $\mathfrak{F}$, такая, что $H\overline{\Phi}_\theta^{\mathfrak{F}}(G) = G$. Следовательно, $G/\overline{\Phi}_\theta^{\mathfrak{F}}(G) \cong$ $\cong H/H \cap \overline{\Phi}_\theta^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$, откуда $G^{\mathfrak{F}} \subseteq \overline{\Phi}_\theta^{\mathfrak{F}}(G)$, что невозможно. Значит, $\overline{\Phi}_\theta^{\mathfrak{F}}(G) = \Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G)$.

Так как для подгруппового m_s-функтора θ подгрупповой m-функтор θ_π является подгруппповым m_s-функтором, то утверждение (2) следует из (1). □

Утверждение (1) леммы 2.1 усиливает теорему 2 из [4] и теорему 1 из [10].

Полагая для подгруппового m_s-функтора θ и любой группы G $\theta(G) = \{G\} \cup \mathrm{M}(G)$, из леммы 2.1 получаем следующий результат.

***Следствие* 2.1.1** [2, теорема 3.4(1)]. *Пусть G − группа, $\mathfrak{F}$ − непустая формация. Тогда*:

(1) *если* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$, *то* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}(G)$;

(2) *если* $\overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$, *то* $\overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$.

***Следствие* 2.1.2.** *Пусть подгруппа $\Phi_\pi(G)$ группы G обладает свойством C_π. Если* $\overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{N}}(G) \neq G$, *то* $\overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{N}}(G) = \Delta_\pi(G) \in \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}$.

Следствие 2.1.2 леммы 2.1 вытекает из следствия 2.1.1 леммы 2.1 с применением утверждения (1) леммы 1.1, согласно которому $\Delta_\pi(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}}(G)$, и утверждения (2) леммы 1.1.

***Следствие* 2.1.3.** *Пусть G − группа, p − простое число. Если* $\overline{\Delta}_p^{\mathfrak{N}}(G) \neq G$, *то*

$$\overline{\Delta}_p^{\mathfrak{N}}(G) = \Delta_p(G) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_{p'}.$$

Следствие 2.1.3 леммы 2.1 включает следствие 5 из [11].

***Следствие* 2.1.4.** *Пусть $\mathfrak{F}$ − непустая радикальная формация, θ − подгрупповой m_s-функтор, G − группа. Тогда*:

(1) *если* $\overline{\Phi}_{\theta,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$, *то*

$$\overline{\Phi}_{\theta,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}}(G) = \Phi_{\theta,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}}(G);$$

(2) *если* $\overline{\Phi}_{\theta_\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$, *то*

$$\overline{\Phi}_{\theta_\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}}(G) = \Phi_{\theta_\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}}(G).$$

Доказательство. Рассмотрим подгрупповые m-функторы ψ и ψ_π, определяющие множества

$$\psi(G) = \{G\} \cup \mathrm{M}_{\theta,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \text{ и}$$

$$\psi_\pi(G) = \{G\} \cup \mathrm{M}_{\theta_\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G)$$

соответственно, состоящие из группы G и всех её максимальных θ-подгрупп (максимальных θ_π-подгрупп, соответственно), не содержащих $\mathfrak{F}$-радикал $G_{\mathfrak{F}}$. Очевидно, ψ и ψ_π − подгрупповые m_s-функторы. Поэтому утверждения следствия 2.1.4 вытекают из леммы 2.1. □

***Следствие* 2.1.5.** *Пусть G − группа, $\mathfrak{F}$ − непустая радикальная формация. Тогда*:

(1) *если* $\overline{\Delta}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$, *то*

$$\overline{\Delta}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}}(G);$$

(2) *если* $\overline{\Delta}_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$, *то* $\overline{\Delta}_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}}(G)$.

***Лемма* 2.2.** *Пусть G − группа, $\mathfrak{F}$ − непустая формация. Имеют место следующие утверждения*:

(1) *если θ − $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально π'-полный подгрупповой m-функтор и* $\overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$, *то*

$$\overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = \Phi_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G);$$

(2) *если θ − $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально полный подгрупповой m-функтор и* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$, *то*

$$\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G) = \Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}(G).$$

Доказательство. (1) По следствию 2.1.1 леммы 2.1 $\overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$. Понятно, что $\overline{\mathrm{M}}_\pi^{\mathfrak{F}}(G) =$ $= \overline{\mathrm{M}}_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G)$ для $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально π'-полного подгруппового m-функтора θ. Кроме того,

$$\overline{\mathrm{M}}_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq \mathrm{M}_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq \mathrm{M}_\pi^{\mathfrak{F}}(G),$$

откуда $\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq \Phi_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq \overline{\Phi}_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G) = \overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$. Значит, $\overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = \Phi_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$. Утверждение (2) вытекает из (1), если положить $\pi = \varnothing$. □

***Пример* 2.1.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *− непустая формация, содержащая некоторое множество групп* φ. *Тогда*:

(1) *если* $\overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$, *то*

$$\overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = (\Delta_\pi^{\mathfrak{F}})^{\overline{\varphi}}(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G);$$

(2) *если* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$, *то*

$$\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G) = (\Delta^{\mathfrak{F}})^{\overline{\varphi}}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}(G).$$

В самом деле, нетрудно заметить, что

$$\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq (\Delta_\pi^{\mathfrak{F}})^{\overline{\varphi}}(G) \subseteq \overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$$

для всякой группы G и множества групп φ, содержащегося в непустой формации $\mathfrak{F}$. Причём: *a*) если $\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = G$, то и $(\Delta_\pi^{\mathfrak{F}})^{\overline{\varphi}}(G) = \overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = G$; *b*) если $\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$, то $(\Delta_\pi^{\mathfrak{F}})^{\overline{\varphi}}(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$ в случае $\varphi = \varnothing$ и $(\Delta_\pi^{\mathfrak{F}})^{\overline{\varphi}}(G) = \overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$ в случае $\varphi = \mathfrak{F}$. На основании утверждения (2) следствия 2.1.1 леммы 2.1, $\overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = (\Delta_\pi^{\mathfrak{F}})^{\overline{\varphi}}(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$, если $\overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$. Аналогичная ситуация возникает для соответствующих пересечений максимальных подгрупп без ограничений на их индексы в группе.

Утверждения (1) и (2) могут быть обоснованы функторно. Действительно, пусть $\overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$. Определим подгрупповой *m*-функтор θ на каждой группе G следующим образом: $\theta(G) = \{G\} \cup (\mathrm{M}_\pi^{\mathfrak{F}})^{\overline{\varphi}}(G)$. Понятно, что

$$\overline{\mathrm{M}}_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq (\mathrm{M}_\pi^{\mathfrak{F}})^{\overline{\varphi}}(G),$$

т. е. функтор θ является $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально π'-полным. А так как, очевидно,

$$(\mathrm{M}_\pi^{\mathfrak{F}})^{\overline{\varphi}}(G) = \mathrm{M}_\theta(G) = \mathrm{M}_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G),$$

то утверждение (1) вытекает из утверждения (1) леммы 2.2. Утверждение (2) − частный случай утверждения (1).

***Теорема* 2.1.** *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$ *− локальная* S_n*-замкнутая формация,* $\pi(\mathfrak{F}) = \mathrm{P}$. *И пусть подгруппа* $\Phi_\pi(G)$ *группы* G *обладает свойством* C_π. *Если* $\overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$, *то справедливы следующие утверждения*:

(1) $\overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = \Phi_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$ *для всякого* $\overline{\mathfrak{F}}$*-абнормально* π'*-полного подгруппового m-функтора* θ;

(2) $\Phi_{\theta_\pi}(G) \in \mathfrak{F}$ *для всякого* $\overline{\mathfrak{F}}$*-абнормально* π' *полного подгруппового* m_s*-функтора* θ.

Доказательство. Утверждение (1) вытекает из утверждения (2) леммы 1.1 и утверждения (1) леммы 2.2. Утверждение (2) вытекает из утверждения (1) и S_n-замкнутости формации $\mathfrak{F}$, так как $\Phi_{\theta_\pi}(G)$ − нормальная в G подгруппа $\Phi_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G)$. □

***Пример* 2.2.** *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$ *− локальная* S_n*-замкнутая формация,* $\pi(\mathfrak{F}) = \mathrm{P}$. *И пусть подгруппа* $\Phi_\pi(G)$ *группы* G *обладает свойством* C_π. *Если* $\overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$, *то справедливы следующие утверждения.*

(1) *Для всякого множества групп* φ, *содержащегося в формации* $\mathfrak{F}$,

$$\overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = (\Delta_\pi^{\mathfrak{F}})^{\overline{\varphi}}(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}.$$

(2) $(\Delta_\pi^{\varphi})^{\overline{\mathfrak{F}}}(G) \in \mathfrak{F}$ *для всякой непустой подформации* φ *формации* $\mathfrak{F}$. *В частности*,

$$(\Delta_\pi)^{\overline{\mathfrak{F}}}(G) \in \mathfrak{F}.$$

Действительно, утверждение (1) вытекает из утверждения (1) теоремы 2.1 (из утверждения (1) примера 2.1 с учётом утверждения (2) леммы 1.2). Утверждение (2) можно обосновать, рассматривая подгрупповой *m*-функтор θ, определённый на каждой группе G следующим образом: $\theta(G) = \{G\} \cup (\mathrm{M}_\pi^{\varphi})^{\overline{\mathfrak{F}}}(G)$, φ − непустая подформация формации $\mathfrak{F}$. Так как

$$\theta(G) = \theta_\pi(G) \supseteq \overline{\mathrm{M}}_\pi^{\mathfrak{F}}(G),$$

то θ является $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально π'-полным подгрупповым m_s-функтором;

$$\Phi_{\theta_\pi}(G) = (\Delta_\pi^{\varphi})^{\overline{\mathfrak{F}}}(G) \subseteq \overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G).$$

Следовательно, ввиду утверждения (2) теоремы 2.1 для группы G и формации $\mathfrak{F}$, удовлетворяющих условию, $(\Delta_\pi^{\varphi})^{\overline{\mathfrak{F}}}(G) \in \mathfrak{F}$.

***Следствие* 2.2.1.** *Пусть подгруппа* $\Phi_\pi(G)$ *группы* G *обладает свойством* C_π. *Если* $(\Delta_\pi)^{\overline{\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}}}(G) \neq G$, *то*

$$(\Delta_\pi)^{\overline{\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}}}(G) = (\Delta_\pi)^{\overline{\varphi}}(G) =$$
$$= \overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{N}}(G) = \Delta_\pi(G) \subseteq \mathrm{F}_{\pi'}(G) \subset G$$

для любого множества групп φ, *содержащегося в формации всех* π'*-нильпотентных групп* $\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}$.

Доказательство. Согласно утверждению (1) леммы 1.1 $\Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}}(G) = \Delta_\pi(G)$, $(\Delta_\pi)^{\overline{\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}}}(G) = \overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}}(G)$. Так как $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}$, то, применяя утверждение (1) примера 2.2, получаем требуемое. □

***Следствие* 2.2.2.** *Пусть* G *− группа,* p *− простое число. Если* $(\Delta_p)^{\overline{\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_{p'}}}(G) \neq G$, *то*

$$(\Delta_p)^{\overline{\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_{p'}}}(G) = (\Delta_p)^{\overline{\varphi}}(G) =$$
$$= \overline{\Delta}_p^{\mathfrak{N}}(G) = \Delta_p(G) \subseteq \mathrm{F}_{p'}(G) \subset G$$

для любого множества групп φ, *содержащегося в формации всех* p'*-нильпотентных групп* $\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_{p'}$.

В случае $\pi = \varnothing$ из теоремы 2.1 вытекает следующий результат.

***Теорема* 2.2.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *− локальная* S_n*-замкнутая формация,* $\pi(\mathfrak{F}) = \mathrm{P}$. *И пусть* G *− группа,* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$. *Имеют место следующие утверждения.*

(1) $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G) = \Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$ *для всякого* $\overline{\mathfrak{F}}$*-абнормально полного подгруппового m-функтора* θ;

(2) $\Phi_\theta(G) \in \mathfrak{F}$ *для всякого* $\overline{\mathfrak{F}}$*-абнормально полного подгруппового* m_s*-функтора* θ.

***Пример* 2.3.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *− локальная* S_n*-замкнутая формация,* $\pi(\mathfrak{F}) = \mathrm{P}$. *И пусть* G *− группа,* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$. *Тогда имеют место следующие утверждения*:

(1) *Для всякого множества групп* φ, *содержащегося в формации* $\mathfrak{F}$,

$$\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G) = (\Delta^{\mathfrak{F}})^{\overline{\varphi}}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}.$$

(2) $(\Delta^{\varphi})^{\overline{\mathfrak{F}}}(G) \in \mathfrak{F}$ *для всякой непустой подформации* φ *формации* $\mathfrak{F}$. *В частности,* $(\Delta)^{\overline{\mathfrak{F}}}(G) \in \mathfrak{F}$.

Так как согласно результату Шлыка В.В. [1, теорема 8.11] $\overline{\Delta}^{\mathfrak{N}}(G) \neq G$, если G − неразрешимая группа, то следующее утверждение укладывается в рамки утверждения (1) примера 2.3.

***Следствие* 2.3.1.** *Для всякого множества групп* φ, *содержащегося в формации всех нильпотентных групп* $\mathfrak{N}$, *пересечение* $(\Delta)^{\overline{\varphi}}(G)$ *всех ненормальных, не принадлежащих* φ *максимальных подгрупп неразрешимой группы* G *совпадает с* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{N}}(G) = \Delta(G) \in \mathfrak{N}$.

3 Пересечения максимальных подгрупп конечной группы в связи с радикальной локальной формацией $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{N}$ ($\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{N}$) и радикально $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально полным (радикально $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально π'-полным, соответственно) подгрупповым *m*-функтором

***Теорема* 2.3.** *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$ *− радикальная локальная формация,* $\pi(\mathfrak{F}) = \mathrm{P}$, G *− группа. И пусть* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \neq G$. *Если подгруппа* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \cap \tilde{\mathrm{F}}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}}(G)$ π'*-разрешима (в частности, подгруппа* $\tilde{\mathrm{F}}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}}(G)$ π'*-разрешима, либо подгруппа* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G)$ π'*-разрешима), то имеют место следующие утверждения.*

I [2]. $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}} \subset G$.

II. (1) $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_\varphi}}(G) = \overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi,\overline{G_\varphi}}(G) = \overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) =$
$$= \Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) = \Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi}(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}} \subset G$$

для всякой радикальной формации φ, *содержащей формацию* $\mathfrak{F}$, *и радикально* $\overline{\mathfrak{F}}$*-абнормально* π'*-полного подгруппового m-функтора* θ;

(2) $\Phi_{\theta_\pi}(G)$ *− нормальная в* G *подгруппа из* $G_{\mathfrak{F}}$, *если* θ *− радикально* $\overline{\mathfrak{F}}$*-абнормально* π'*-полный подгрупповой* m_s*-функтор.*

Доказательство. I. Так как
$$\overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq \overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \neq G,$$
то по следствию 2.1.1 леммы 2.1 и ввиду утверждения (2) леммы 1.1 $\overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$. Так как
$$\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq (\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G))_{\mathfrak{F}} =$$
$$= \overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \cap G_{\mathfrak{F}} \subseteq \overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \cap \overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,G_{\mathfrak{F}}}(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G),$$
то $(\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G)_{\mathfrak{F}} = \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$. Следовательно, ввиду утверждения (3) леммы 1.1
$$(\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \big/ \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G))_{\mathfrak{F}} = (\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G))_{\mathfrak{F}} \big/ \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = 1.$$
А так как группа $A = \overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \cap \tilde{\mathrm{F}}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}}(G)$ π'-разрешима и формация $\mathfrak{F}$ содержит все π'-нильпотентные группы, то
$$A \big/ \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = \mathrm{F}_{\pi'}(A \big/ \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)) \subseteq (\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \big/ \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G))_{\mathfrak{F}} = 1.$$
Значит, в группе $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \big/ \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$ нет неединичных нормальных подгрупп группы $G \big/ \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$, следовательно, $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$. Утверждение I доказано.

II. (1). Пусть θ − радикально $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально π'-полный подгрупповой *m*-функтор. Тогда
$$\overline{\mathrm{M}}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) = \overline{\mathrm{M}}^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \subseteq$$
$$\subseteq \mathrm{M}^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \subseteq \mathrm{M}^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi}(G) \subseteq \mathrm{M}^{\mathfrak{F}}_{\pi}(G).$$
Следовательно,
$$\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq \Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi}(G) \subseteq \Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \subseteq \overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G).$$
А так как по утверждению I $\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = \overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G)$, то
$$\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = \Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi}(G) = \Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) = \overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G).$$

Согласно условию $\mathfrak{F} \subseteq \varphi$, поэтому $\overline{\mathrm{M}}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \subseteq \overline{\mathrm{M}}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\varphi}}}(G)$. А так как $\overline{\mathrm{M}}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \in \theta(G)$, то $\overline{\mathrm{M}}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) = \overline{\mathrm{M}}^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \subseteq \overline{\mathrm{M}}^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi,\overline{G_{\varphi}}}(G) \subseteq \overline{\mathrm{M}}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\varphi}}}(G)$. Отсюда

$$\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\varphi}}}(G) \subseteq \overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi,\overline{G_{\varphi}}}(G) \subseteq \overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) = \overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G).$$

Из $\Delta^{\mathfrak{F}}_{\pi}(G) \subseteq \overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\varphi}}}(G)$ и $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}_{\pi}(G)$ теперь следует $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\varphi}}}(G) = \overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi,\overline{G_{\varphi}}}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}_{\pi}(G)$. Утверждение II. (1) доказано.

II. (2). Так как функтор θ является подгрупповым m_s-функтором, то $\Phi_{\theta_\pi}(G)$ нормальна в G, а значит, и в $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi}(G)$, следовательно, $\Phi_{\theta_\pi}(G) \in \mathfrak{F}$. Утверждение II доказано. □

***Следствие* 2.3.1.** *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$ *− радикальная локальная формация,* $\pi(\mathfrak{F}) = \mathrm{P}$. *Если* G *−* π'*-разрешимая группа и* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \neq G$, *то имеют место следующие утверждения.*

I [2]. $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}_{\pi}(G) \subset G_{\mathfrak{F}} \subset G$.

II. (1) $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\phi}}}(G) = \overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi,\overline{G_{\phi}}}(G) = \overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) =$

$$= \Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) = \Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}_{\pi}(G) \subset G_{\mathfrak{F}} \subset G$$

для всякой радикальной формации φ, *содержащей формацию* $\mathfrak{F}$, *и радикально* $\overline{\mathfrak{F}}$*-абнормально* π'*-полного подгруппового m-функтора* θ;

(2) $\Phi_{\theta_\pi}(G)$ *− нормальная в* G *подгруппа из* $G_{\mathfrak{F}}$, *если* θ *− радикально* $\overline{\mathfrak{F}}$*-абнормально* π'*-полный подгрупповой* m_s*-функтор.*

***Следствие* 2.3.2.** *Пусть* θ *− радикально* $\overline{\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}}$*-абнормально* π'*-полный подгрупповой m-функтор,* G *− группа,* $(\Delta_{\pi,\overline{\mathrm{F}_{\pi'}(G)}})^{\overline{\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}}}(G) \neq G$. *Если подгруппа* $(\Delta_{\pi,\overline{\mathrm{F}_{\pi'}(G)}})^{\overline{\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}}}(G) \cap \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_\pi}(G)$ π'*-разрешима, то*

$$(\Delta_{\pi,\overline{G_{\phi}}})^{\overline{\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}}}(G) = (\Phi^{\mathfrak{N}}_{\theta_\pi,\overline{G_{\phi}}})^{\overline{\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}}}(G) =$$
$$= (\Delta_{\pi,\overline{\mathrm{F}_{\pi'}(G)}})^{\overline{\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}}}(G) = \Phi^{\mathfrak{N}}_{\theta_\pi,\overline{\mathrm{F}_{\pi'}(G)}}(G) =$$
$$= \Phi^{\mathfrak{N}}_{\theta_\pi}(G) = \Delta_{\pi}(G) \subset \mathrm{F}_{\pi'}(G) \subset G$$

для всякой радикальной формации φ, *содержащей формацию всех* π'*-нильпотентных групп* $\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}$.

В случае, когда радикально $\overline{\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}}$-абнормально π'-полный подгрупповой m-функтор θ выделяет в каждой группе G саму группу G и все её максимальные подгруппы, следствие 2.3.2 включает, с учётом утверждения (1) леммы 1.1, следствие 3.6.2 теоремы 3.6 из [2].

***Следствие* 2.3.3.** *Пусть* θ *− радикально* $\overline{\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}}$*-абнормально* π'*-полный подгрупповой m-функтор. И пусть группа* G π'*-разрешима. Если* $(\Delta_{\pi,\overline{\mathrm{F}_{\pi'}(G)}})^{\overline{\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}}}(G) \neq G$, *то*

$$(\Delta_{\pi,\overline{G_{\varphi}}})^{\overline{\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}}}(G) = (\Phi^{\mathfrak{N}}_{\theta_\pi,\overline{G_{\varphi}}})^{\overline{\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}}}(G) =$$
$$= (\Delta_{\pi,\overline{\mathrm{F}_{\pi'}(G)}})^{\overline{\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}}}(G) = \Phi^{\mathfrak{N}}_{\theta_\pi,\overline{\mathrm{F}_{\pi'}(G)}}(G) =$$
$$= \Phi^{\mathfrak{N}}_{\theta_\pi}(G) = \Delta_{\pi}(G) \subset \mathrm{F}_{\pi'}(G) \subset G$$

для всякой радикальной формации φ, *содержащей формацию всех* π'*-нильпотентных групп* $\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}$.

***Следствие* 2.3.4.** *Пусть* θ *−* $\overline{\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_{p'}}$*-абнормально* p'*-полный подгрупповой m-функтор,* p *− простое число. И пусть* $(\Delta_{p,\overline{\mathrm{F}_{p'}(G)}})^{\overline{\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_{p'}}}(G) \neq G$. *Если подгруппа* $(\Delta_{p,\overline{\mathrm{F}_{p'}(G)}})^{\overline{\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_{p'}}}(G) \cap \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_p}(G)$ *разрешима,* (*в частности, подгруппа* $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_p}(G)$ *разрешима, либо подгруппа* $(\Delta_{p,\overline{\mathrm{F}_{p'}(G)}})^{\overline{\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_{p'}}}(G)$ *разрешима*), *то*

$$(\Delta_{p,\overline{G_{\varphi}}})^{\overline{\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_{p'}}}(G) = (\Phi^{\mathfrak{N}}_{\theta_p,\overline{G_{\varphi}}})^{\overline{\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_{p'}}}(G) =$$
$$= (\Delta_{p,\overline{\mathrm{F}_{p'}(G)}})^{\overline{\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_{p'}}}(G) = \Phi^{\mathfrak{N}}_{\theta_p,\overline{\mathrm{F}_{p'}(G)}}(G) =$$
$$= \Phi^{\mathfrak{N}}_{\theta_p}(G) = \Delta_{p}(G) \subset \mathrm{F}_{p'}(G) \subset G$$

для всякой радикальной формации φ, *содержащей формацию всех* p'*-нильпотентных групп* $\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_{p'}$.

Следующая теорема 2.4 − также следствие теоремы 2.3.

***Теорема* 2.4.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *− радикальная локальная формация,* $\pi(\mathfrak{F}) = \mathrm{P}$, G *− группа,* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \neq G$. *Если группа* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \cap \tilde{\mathrm{F}}_{\Delta^{\mathfrak{F}}}(G)$ *разрешима* (*в частности, подгруппа* $\tilde{\mathrm{F}}_{\Delta^{\mathfrak{F}}}(G)$ *разрешима, либо подгруппа* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G)$ *разрешима*), *то имеют место следующие утверждения*:

I [2]. $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}} \subset G$.

II. (1) $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\overline{G_{\varphi}}}(G) = \overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta,\overline{G_{\varphi}}}(G) = \overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) =$

$$= \Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) = \Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}} \subset G$$

для всякой радикальной формации φ, *содержащей формацию* $\mathfrak{F}$, *и радикально* $\overline{\mathfrak{F}}$*-абнормально полного подгруппового m-функтора* θ;

(2) $\Phi_{\theta}(G)$ *− нормальная в* G *подгруппа из* $G_{\mathfrak{F}}$, *если* θ *− радикально* $\overline{\mathfrak{F}}$*-абнормально полный подгрупповой* m_s*-функтор.*

Заметим, что согласно утверждению (5) леммы 1.1 абнормально полный подгрупповой m-функтор является $\mathfrak{F}$-абнормально полным, а значит, и радикально $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально полным для всякой радикальной формации $\mathfrak{F}$, содержащей формацию всех нильпотентных групп $\mathfrak{N}$. Для абнормально полного подгруппового m-функтора θ, локальной формации $\mathfrak{F}$, удовлетворяющей условию $\pi(\mathfrak{F}) = \mathrm{P}$, и любой группы G справедливо равенство $\Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}(G)$ ввиду

$$\mathrm{M}^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq \mathrm{M}^{\mathfrak{N}}(G) \in \theta(G).$$

Если к тому же $\mathfrak{F}$ − радикальная формация, то $\overline{\Phi}_{\theta,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}}(G) = \overline{\Delta}_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}}(G)$ как для абнормально полного, так и для радикально $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально полного подгруппового m-функтора θ. Таким образом, следствие 5.1 теоремы 5 из [4] равносильно утверждению самой теоремы 5 [4] в условиях предъявляемых в ней требований к функтору θ, формации $\mathfrak{F}$ и к группе G, а утверждение II. (1) теоремы 2.4 обобщает и усиливает теорему 5 [4], доказанную для абнормально полного регулярного m_s-функтора и разрешимой группы G. Напомним: подгрупповой m_s-функтор θ называется регулярным [5], если для любой нормальной подгруппы N группы G выполняются следующие условия:

1) из $H \in \theta(G)$ всегда следует

$$HN/N \in \theta(G/N);$$

2) из $H/N \in \theta(G/N)$ всегда следует $H \in \theta(G)$.

Возможные приложения теоремы 2.3 и теоремы 2.4 могут быть проиллюстрированы следующим примером.

***Пример* 2.4.** *Справедливы следующие утверждения*:

I. *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\pi}\mathfrak{F}$ − *радикальная локальная формация*, $\pi(\mathfrak{F}) = \mathrm{P}$, G − *группа. И пусть* $\overline{\Delta}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$, *подгруппа* $\overline{\Delta}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}}(G) \cap \tilde{\mathrm{F}}_{\Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}}(G)$ π'*-разрешима. Тогда*:

(1) $\overline{\Delta}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}}(G) = (\Delta_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}})^{\overline{\varphi}}(G) = \Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}} \subset G$ *для всякого множества групп* φ, *содержащегося в формации* $\mathfrak{F}$;

(2) $(\Delta_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\varphi})^{\overline{\mathfrak{F}}}(G)$ − *нормальная в* G *подгруппа из* $G_{\mathfrak{F}}$ *для всякой непустой подформации* φ *формации* $\mathfrak{F}$; *в частности,* $(\Delta_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}})^{\overline{\mathfrak{F}}}(G)$ − *нормальная в* G *подгруппа из* $G_{\mathfrak{F}}$.

II. *Пусть* $\mathfrak{F}$ − *радикальная локальная формация*, $\pi(\mathfrak{F}) = \mathrm{P}$, G − *группа. И пусть* $\overline{\Delta}_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$, *подгруппа* $\overline{\Delta}_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}}(G) \cap \tilde{\mathrm{F}}_{\Delta^{\mathfrak{F}}}(G)$ *разрешима. Тогда:*

(1) $\overline{\Delta}_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}}(G) = (\Delta_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}})^{\overline{\varphi}}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}} \subset G$ *для всякого множества групп* φ, *содержащегося в формации* $\mathfrak{F}$;

(2) $(\Delta_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\varphi})^{\overline{\mathfrak{F}}}(G)$ − *нормальная в* G *подгруппа из* $G_{\mathfrak{F}}$ *для всякой непустой подформации* φ *формации* $\mathfrak{F}$; *в частности,* $(\Delta_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}})^{\overline{\mathfrak{F}}}(G)$ − *нормальная в* G *подгруппа из* $G_{\mathfrak{F}}$.

Доказательство. I. (1) Определим подгрупповой m-функтор θ на каждой группе G следующим образом: $\theta(G) = \{G\} \cup (\mathrm{M}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}})^{\overline{\varphi}}(G)$, φ − некоторое подмножество групп формации $\mathfrak{F}$. Так как $(\mathrm{M}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}})^{\overline{\varphi}}(G) \supseteq \overline{\mathrm{M}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}}(G)$, то θ − радикально $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально π'-полный подгрупповой m-функтор. А так как, очевидно,

$$(\mathrm{M}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}})^{\overline{\varphi}}(G) = \mathrm{M}_{\theta}(G) = \mathrm{M}_{\theta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G) = \mathrm{M}_{\theta_{\pi},\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}}(G),$$

то утверждение (1) вытекает из утверждения II. (1) теоремы 2.3.

I. (2) Рассмотрим подгрупповой m-функтор θ, определённый на каждой группе G следующим образом: $\theta(G) = \{G\} \cup (\mathrm{M}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\varphi})^{\overline{\mathfrak{F}}}(G)$, φ − непустая подформация формации $\mathfrak{F}$. Так как $\theta(G) = \theta_{\pi}(G) \supseteq \overline{\mathrm{M}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}}(G)$, то θ − радикально $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально π'-полный подгрупповой m_s-функтор; $\Phi_{\theta_{\pi}}(G) = (\Delta_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\varphi})^{\overline{\mathfrak{F}}}(G) \subseteq \overline{\Delta}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}}(G)$. Следовательно, $(\Delta_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\varphi})^{\overline{\mathfrak{F}}}(G) \in \mathfrak{F}$ по утверждению II.(2) теоремы 2.3. Утверждения I обоснованы, утверждения II − следствия утверждений I.

Из следствия 2.3.2 теоремы 2.3, с учётом утверждения (4) II леммы 1.1, вытекает следующий результат.

***Теорема* 2.5.** *Пусть* G − *группа*, θ − *радикально* $\overline{\mathfrak{N}}$*-абнормально полный подгрупповой m-функтор. И пусть* $\overline{\Delta}_{\overline{\mathrm{F}(G)}}^{\mathfrak{N}}(G) \neq G$, *причём подгруппа* $\overline{\Delta}_{\overline{\mathrm{F}(G)}}^{\mathfrak{N}}(G) \cap \tilde{\mathrm{F}}(G)$ *разрешима* (*в частности, подгруппа* $\tilde{\mathrm{F}}(G)$ *разрешима, либо подгруппа* $\overline{\Delta}_{\overline{\mathrm{F}(G)}}^{\mathfrak{N}}(G)$ *разрешима*). *Тогда* $\overline{\Delta}_{\overline{G_{\phi}}}^{\mathfrak{N}}(G) = \overline{\Phi}_{\theta,\overline{G_{\phi}}}^{\mathfrak{N}}(G) =$ $= \overline{\Delta}_{\overline{\mathrm{F}(G)}}^{\mathfrak{N}}(G) = \Phi_{\theta,\overline{\mathrm{F}(G)}}^{\mathfrak{N}}(G) = \Phi_{\theta}^{\mathfrak{N}}(G) = \Delta(G) \subset \mathrm{F}(G) \subset G$ *для всякой радикальной формации* φ, *содержащей формацию всех нильпотентных групп* $\mathfrak{N}$.

Полагая $\theta(G) = \{G\} \cup \mathrm{M}(G)$ для $\overline{\mathfrak{N}}$-абнормально полного подгруппового m-функтора θ и любой группы G, из теоремы 2.5 получаем

***Следствие* 2.5.1.** *Пусть* G − *группа,* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{N}}_{\overline{\mathrm{F}(G)}}(G) \neq G$. *Если подгруппа* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{N}}_{\overline{\mathrm{F}(G)}}(G) \cap \tilde{\mathrm{F}}(G)$ *разрешима* (*в частности*, *подгруппа* $\tilde{\mathrm{F}}(G)$ *разрешима*, *либо подгруппа* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{N}}_{\overline{\mathrm{F}(G)}}(G)$ *разрешима*), *то*

$$\overline{\Delta}^{\mathfrak{N}}_{\overline{G_\varphi}}(G) = \overline{\Delta}^{\mathfrak{N}}_{\overline{\mathrm{F}(G)}}(G) = \Delta_{\overline{\mathrm{F}(G)}}(G) = \Delta(G) \subset \mathrm{F}(G) \subset G$$

для всякой радикальной формации φ, *содержащей формацию всех нильпотентных групп* $\mathfrak{N}$.

Следствие 2.5.1 теоремы 2.5 усиливает следствие 5.2 работы [4] и включает следствие 3.6.3 теоремы 3.6 [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

2. *Белоконь*, *Л.М.* О пересечениях максимальных подгрупп конечных групп / Л.М. Белоконь // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4 (21). – С. 46–59.

3. *Каморников*, *С.Ф.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Мн.: Бел. навука, 2003. – 254 с.

4. *Селькин*, *М.В.* О пересечениях максимальных подгрупп конечных групп / М.В. Селькин, Р.В. Бородич // Вестник СамГУ − Естественнонаучная серия. – 2009. – № 8 (74). – С. 67–76.

5. *Бородич*, *Е.Н.* О пересечениях $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных θ-подгрупп / Е.Н. Бородич, Р.В. Бородич // Весці Нацыянальнай Акадэміі Навук Беларусі. – 2007. – № 3. – С. 47–52.

6. *Белоконь*, *Л.М.* К вопросу о пересечениях максимальных θ-подгрупп конечных групп / Л.М. Белоконь // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 3 (24). – С. 46–50.

7. *Белоконь*, *Л.М.* О пересечениях максимальных θ_π-подгрупп конечных групп и $\mathfrak{F}$-абнормально π'-полный подгрупповой *m*-функтор / Л.М. Белоконь // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 4 (25). – С. 50–58.

8. *Белоконь*, *Л.М.* Пересечения максимальных подгрупп конечных групп и радикальные формации / Л.М. Белоконь // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2013. – № 6 (81). – С. 3–10.

9. *Белоконь*, Л.М. Нормальная факторизуемость субнормальной в конечной группе подгруппы в связи с локальными формациями и обобщёнными подгруппами Фраттини. Формационные радикалы / Л.М. Белоконь // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1 (30). – С. 26–36.

10. *Бородич*, *Р.В.* О некоторых свойствах $\mathfrak{F}$-абнормальных подгрупп конечных групп / Р.В. Бородич, М.В. Селькин // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2010. – № 3 (60). – С. 197–201.

11. *Селькин*, *М.В.* Пересечение максимальных подгрупп в конечных группах / М.В. Селькин, В.Н. Семенчук // Вопросы алгебры. – 1985. – Вып. 1. – С. 67–72.

Поступила в редакцию 30.01.17.