Проблемы физики, математики и техники, № 2 (31), 2017

ФИЗИКА

УДК 535.42

ОБОБЩЕННЫЕ АСИММЕТРИЧНЫЕ ПУЧКИ БЕССЕЛЯ – ГАУССА НЕПРЕРЫВНОГО ПОРЯДКА

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

GENERALIZED ASYMMETRIC OF BESSEL – GAUSSIAN BEAMS OF THE CONTINUOUS ORDER

S.S. Girgel

F. Scorina Gomel State University

Предложены новые решения параболического уравнения, описывающие обобщенные асимметричные пучки Бесселя – Гаусса непрерывного порядка. Они характеризуются пятью свободными непрерывными параметрами и обладают спиральным волновым фронтом. Установлены ограничения на эти параметры, при которых исследуемые фракционные пучки переносят конечную мощность. Проведено графическое моделирование таких пучков, которое подтверждает основные аналитические расчеты.

***Ключевые слова**: асимметричные пучки, пучки Бесселя – Гаусса, квадратичная интегрируемость.*

The new solutions of the parabolic equation featuring the generalized asymmetric of Bessel – Gaussian beams of the continuous order are offered. They are characterized by five free continuous parametres and possess a spiral wavefront. Restrictions on these parametres at which explored fractional beams transfer terminating power are discovered. Pictorial modeling of such beams which confirms the main analytical calculations is fulfilled.

***Keywords**: asymmetric beams, beams of Bessel – Gaussian, a square intergrability.*

Введение

В последнее время производится поиск и исследования новых типов световых пучков [1]–[5]. Большой интерес привлекают пучки Бесселя и пучки Бесселя – Гаусса (ПБГ) [5]–[11]. Как хорошо известно [6], пучки Бесселя обладают уникальным свойством бездифракционности. Вместе с тем, они переносят бесконечную мощность и не могут быть реализованы практически. Использование гауссовой аподизации функций Бесселя позволяет перейти к скалярным ПБГ [7], которые переносят конечную мощность и могут быть реализованы практически, хотя свойство бездифракционности, строго говоря, при этом нарушается. Свойства векторных ПБГ исследовались нами в [12], [13]. Фракционные обобщенные ПБГ были введены нами в [14] и найдены условия их физической реализуемости.

Недавно, в 2014–2016 годах, в [15]–[18] были введены и экспериментально получены асимметричные ПБГ (aBG-моды). В [19] нами были предложены асимметричные пучки Бесселя – Гаусса непрерывного порядка. В настоящей работе производится обобщение результатов [14]–[16], [19]. Найден новый тип пучков – обобщенных асимметричных ПБГ непрерывного порядка, сформулированы условия их физической реализуемости и обсуждаются их физические свойства.

1 Новый тип обобщенных асимметричных ПБГ непрерывного порядка

Исходя из 3D параболического уравнения [1], описывающего скалярные параксиальные монохроматические световые пучки, распространяющиеся в направлении оси z, и перейдя к цилиндрической системе координат нами в [14] было получено выражение

$$f = \frac{1}{q}\exp\left[i\left(\frac{k}{2q}\left(\rho^2 - \left(\frac{Kz_0}{k}\right)^2\right)\right)\right]\times \\ \times\exp(i\nu\varphi)\,J_\nu\left(\frac{-iK\rho\, z_0}{q}\right), \tag{1.1}$$

описывающее обобщенные ПБГ непрерывного порядка ν. Здесь и далее фазовый множитель $\exp(i\,k\,z - i\omega t)$ опускается. Стандартные обозначения: $\rho^2 = x^2 + y^2$, азимутальный угол $\varphi = arctg\left(\dfrac{y}{x}\right)$; J_ν – функции Бесселя I рода [20]. Постоянные разделения переменных ν и K в (1.1) являются свободными параметрами. В случае классических ПБГ [7] $K = k_\perp$, где $k_\perp$ – вещественная поперечная составляющая волнового вектора $\mathbf{k} = \mathbf{k}_\perp + \mathbf{k}_z$ и, кроме того, порядок (индекс) ν является целочисленным. Амплитуда f ПБГ в (1.1) содержит гауссиан $G = \dfrac{1}{q}\exp\left[\dfrac{ik\rho^2}{2q}\right]$, комплексный параметр пучка $q = z - q_0$. Величины w_0 и $z_0 = \dfrac{kw_0^2}{2}$ – характерные размеры пучка вдоль осей OX и OZ соответственно.

Чтобы получить выражения, характеризующие асимметричные ПБГ непрерывного порядка ν, перейдем в (1.1) к новым поперечным переменным соотношениями

$$x_1 = x - x_0,\quad y_1 = y - y_0,\quad r_1^2 = x_1^2 + y_1^2, \tag{1.2}$$

где константы x_0, y_0 – произвольные комплексные параметры смещений поперечных координат x и y. Получаем [19]

$$f = \frac{1}{q}\exp\left[i\left(\frac{k}{2q}\left(r_1^2 - \left(\frac{Kz_0}{k}\right)^2\right)\right)\right]\times \left[\frac{x_1 + iy_1}{r_1}\right]^{\nu} J_\nu\left(\frac{-iKr_1 z_0}{q}\right). \tag{1.3}$$

Здесь набег комплексной фазы $\exp(i\nu\varphi)$ представлен в другой форме, чем в (1.1), использующей известную формулу

$$arctg(t) = \left(-\frac{i}{2}\right)\ln\left[\frac{1+it}{1-it}\right],$$

которая применялась недавно физиками в [11], [15]–[18] для описания асимметричных мод и ранее в работе [21] для описания 2-D волнового пакета X-волн Бесселя.

Асимметричные ПБГ (1.3) зависят от трех переменных (x, y, z) и семи параметров $(k, K, z_0, q_0, x_0, y_0, \nu)$. Число независимых свободных параметров можно уменьшить, если перейти к безразмерным величинам соотношениями:

$$X_1 = \frac{x_1}{w_0} = X - X_0,\ Y_1 = \frac{y_1}{w_0} = Y - Y_0,$$

$$Z = \frac{z}{z_0},\ K_1 = Kw_0,\ \ R_1 = \frac{r_1}{w_0} = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2}. \tag{1.4}$$

Введем также безразмерный параметр пучка $Q = \frac{q}{z_0} \equiv Z - Q_0$. Теперь асимметричные обобщенные ПБГ (1.3) зависят от трех безразмерных переменных (X, Y, Z), пяти безразмерных свободных параметров (X_0, Y_0, Q_0, K_1, ν) и описываются выражением [19]

$$f = \frac{1}{Q}\exp\left[\frac{i}{Q}\left(R_1^2 - \frac{K_1^2}{4}\right)\right]\times \left[\frac{X_1 + iY_1}{R_1}\right]^{\nu} J_\nu\left(\frac{-iK_1 R_1}{Q}\right). \tag{1.5}$$

2 Условия физической реализуемости новых асимметричных обобщенных ПБГ непрерывного порядка

Пучок будем считать физически реализуемым, если его комплексная амплитуда является конечной во всем пространстве, а переносимая им мощность через любое сечение, перпендикулярное оси пучка, также является конечной. Эти требования сводятся к непрерывности и квадратичной интегрируемости (КИ) комплексной амплитуды пучка.

Проанализируем условия физической реализуемости новых асимметричных обобщенных ПБГ непрерывного порядка (1.5). Основной вклад в КИ ПБГ (1.5) вносит гауссиан *G*. Для стандартного G условие КИ [1]: $\mathrm{Im}(Q_0) > 0$. Множитель $\exp\left(-\frac{iK_1^2}{4Q}\right)$ в (1.5) не зависит от поперечных координат и не влияет на КИ. Несложно показать, что комплексные смещения X_0 и Y_0 также не влияют на КИ гауссиана, а лишь приводят к его децентровке. При $Z \to \infty$ гауссиан $G \to 0$.

Стандартные ПБГ характеризуются вещественным параметром K_1. Комплексность масштабирующего параметра K_1 не нарушает КИ амплитуды пучка *f* из-за гауссиана, поэтому на параметр K_1 не накладываются никакие ограничения и он может быть произвольным комплексным числом. Поэтому пучки (1.5) с комплексным параметром K_1 являются обобщенными ПБГ.

При $|u| \to \infty$ функция

$$J_\nu(u) \to \sqrt{\frac{2}{\pi u}}\cos\left(u - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \dots$$

[20]. Поэтому функция $J_\nu(u)$ не нарушает достаточного условия $\mathrm{Im}(Q_0) > 0$ КИ гауссиана в (1.5).

Так как функция Бесселя имеет особенность при $u \to 0$, то отсюда следует необходимость $\mathrm{Re}(\nu) > 0$. Как показывают анализ и графическое моделирование, наличие мнимой части параметра порядка ν приводит к разрывам в графиках интенсивности для функции $f(X, Y, Z)$, что недопустимо. Отсюда следует, что индекс ν должен быть вещественным и неотрицательным, т. е. $\nu \geq 0$.

Итак, общие условия физической реализуемости новых обобщенных асимметричных ПБГ (1.5) непрерывного порядка [19] следующие**:**

$$Q_0'' > 0 \ \text{ и } \ \nu \geq 0. \tag{2.1}$$

Поскольку индекс ν может принимать непрерывные значения, то фаза при полном обороте вокруг оси пучка также является непрерывной и не обязана быть равной 2π. Пучки, обладающие таким свойством, называются фракционными [2]–[5], [22]. Поэтому обсуждаемые нами новые обобщенные асимметричные ПБГ являются также фракционными и имеют спиральный волновой фронт.

В давней работе Валдрона [23] использовалась неортогональная спиральная (цилиндрическая вращающаяся) система координат. Для уравнения Гельмгольца было получено решение в виде спиральных волновых полей Бесселя. В отличие от обычных световых полей Бесселя индекс (порядок) ν таких полей не обязан быть целым числом, а может пробегать непрерывный спектр значений: $\nu \geq 0$. Согласно интерпретации Оверфельт [24] в таких случаях непрерывный индекс ν связан не только с угловой фазой, но также является функцией шага спирали волнового фронта и продольной фазовой скорости волны Бесселя.

Основными результатами настоящей работы являются выражения (1.5) и (2.1). Непрерывный порядок ν дает основание полученные пучки (1.5) трактовать, как фракционные асимметричные обобщенные ПБГ, которые обладают спиральным волновым фронтом. В частных случаях, когда неотрицательный индекс (порядок) ν асимметричных обобщенных ПБГ (1.5) становится целым числом и $X_0 = Y_0 = 0,$ наши выражения (1.5) эквивалентны выражениям для обобщенных ПБГ, рассматриваемых в работах [8]–[10]. Заметим, однако, что наши более общие формулы (1.5) имеют в то же время более простую форму, чем соответствующие формулы в [8]–[10].

3 Обсуждение результатов

Известно [7], что для стандартных ПБГ картина интенсивности состоит из светлых колец, амплитуда которых постепенно убывает от оси пучка. Вещественные части параметров X_0 и Y_0 приводят лишь к смешению пучка параллельно оси OZ, без изменения его формы, поэтому нами не рассматриваются. Мнимые же части параметров X_0 и Y_0 приводят к сильному искажению пространственной формы ПБГ и их асимметрии. При непрерывном изменении индекса ν амплитуда пучков (1.5) и их интенсивности изменяются также непрерывно и плавно.

Нами проводилось компьютерное моделирование интенсивности в поперечных сечениях асимметричных обобщенных ПБГ непрерывного порядка в зависимости от нескольких свободных параметров. В качестве примеров на рисунках 3.1 и 3.2 изображены 3D графики интенсивности асимметричных обобщенных ПБГ непрерывного порядка в поперечном сечении с общими параметрами: $\nu = 1.5;$ $X_0 = 0;$ $Y_0 = 0.05i.$ Полагаем во всех случаях $Q_0 = i,$ что соответствует обычной нормировке гауссиана.

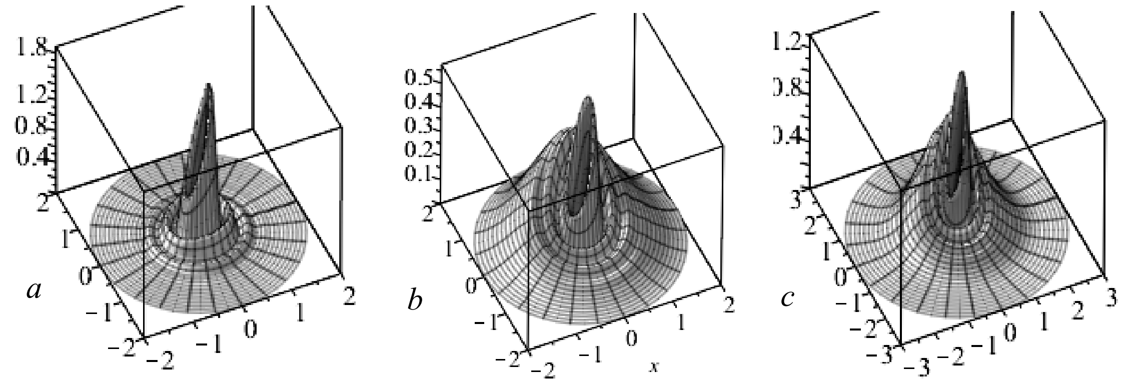

Рисунок 3.1 – 3D графики интенсивности асимметричных обобщенных пучков Бесселя – Гаусса непрерывного порядка с общими параметрами: $Q_0 = i;$ $\nu = 1.5,$ $X_0 = 0;$ $Y_0 = 0.05i.$
Варианты: *a*) $K_1 = 10;$ $Z = 0;$ *b*) $K_1 = 10 - 2i;$ $Z = 0;$ *c*) $K_1 = 10;.$ $Z = 0.2.$

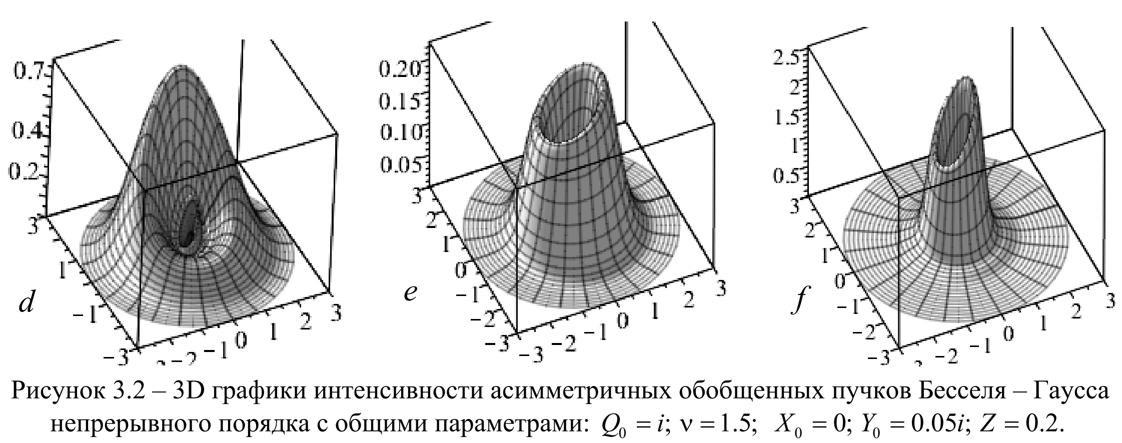

Рисунок 3.2 – 3D графики интенсивности асимметричных обобщенных пучков Бесселя – Гаусса непрерывного порядка с общими параметрами: $Q_0 = i;$ $\nu = 1.5;$ $X_0 = 0;$ $Y_0 = 0.05i;$ $Z = 0.2.$
Варианты: *d*) $K_1 = 10 - i;$ *e*) $K_1 = -i;$ *f*) $K_1 = -4$

Интенсивность пучка в каждой точке поперечного сечения пропорциональна ординате пространственной фигуры. Так как $\nu > 1$, то все изображенные пучки – полые. На рисунках 3.1 взято $\mathrm{Re}(K_1) = 10$, что соответствует преобладанию вклада функции Бесселя над вкладом функции Гаусса. На рисунке 3.1, *a* видно, что ПБГ с нецелым порядком ведет себя качественно, как обычный асимметричный ПБГ. На рисунке 3.1, *a* и 3.1, *b* видно, что изменение $\mathrm{Im}(K_1)$ приводит к существенному изменению 3D картины интенсивности. Рисунки 3.1, *a* и 3.1, *c* характеризуют влияние роста расстояния *Z*. Рисунки 3.2, *f*, 3.2, *e* и 3.1, *b*, 3.2, *d* иллюстрируют пригодность вещественных отрицательных, чисто мнимых и комплексных параметров K_1.

Как и следовало ожидать, при комплексных K_1, X_0 и Y_0 и нецелых ν картины интенсивности существенно усложняются. Например, с увеличением $\mathrm{Im}(K_1)$ и ростом расстояния Z кольца картины, обусловленные функцией Бесселя, постепенно исчезают; с ростом мнимого смещения $\mathrm{Im}(Y_0)$ пик интенсивности возрастает.

Заключение

Выведены выражения, описывающие новый тип пучков – обобщенные асимметричные ПБГ непрерывного порядка, обладающие спиральным волновым фронтом. Они характеризуются пятью свободными параметрами: одним вещественным непрерывным ν и четырьмя комплексными параметрами (X_0, Y_0, Q_0, K_1). Частными случаями введенных здесь пучков являются известные обобщенные ПБГ с дискретными целочисленными индексами ν, фракционные пучки Бесселя со спиральным волновым фронтом, а также асимметричные ПБГ Котляра и Ковалева.

Найдены условия физической реализуемости новых типов пучков во всем пространстве: $Q_0'' > 0$ и $\nu \geq 0$. Одновременный переход от дискретных значений ν к непрерывному спектру, а также от вещественных к комплексным значениям параметра K_1 сильно расширяет класс известных в настоящее время асимметричных ПБГ. Варьирование новых свободных параметров таких пучков, несомненно, расширяет и предоставляет новые дополнительные возможности создания и исследования пучков с заданными свойствами для последующих практических применений.

Проведено графическое моделирование интенсивности таких пучков, которое подтверждает основные аналитические результаты.

Для экспериментального получения спиральных обобщенных асимметричных ПБГ непрерывного порядка могут быть использованы некоторые методики получения асимметричных [15]–[18] и фракционных [5] пучков.

В настоящем сообщении обсуждались скалярные асимметричные обобщенные ПБГ непрерывного порядка. Несложно перейти к соответствующим векторным пучкам с произвольной поляризацией, используя, например, формализм, предложенный нами в [25], [26].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Киселев*, *А.П.* Локализованные световые волны: параксиальные и точные решения волнового уравнения (обзор) / А.П. Киселев // Оптика и спектроскопия. – 2007. – Т. 102, № 4. – С. 661–681.

2. *Gutierrez-Vega*, *J.C.* Fractionalization of optical beams: I. Planar Analysis / Julio C. Gutierrez-Vega // Optics Letters. – 2007. – Vol. 32, № 11. – P. 1521–1523.

3. *Gutierrez-Vega*, *J.C.* Fractionalization of optical beams: II. Elegant Laguerre-Gaussian modes / Julio C. Gutierrez-Vega // Optics Express. – 2007. – Vol. 15, № 10. – P. 6300–6313.

4. *Gutierrez-Vega*, *J.C.* Nondiffracting vortex beams with continuous orbital angular momentum order dependence / J.C. Gutierrez-Vega, C. Lopez-Mariscal // J. Opt. A. Pure Appl. Opt. – 2008. – 10015009 (8 pp).

5. *Tao*, *S.H.* Experimental study of holographic generation of fractional Bessel beams / Shao Hua Tao, Woei Ming Lee, Xiaocong Yuan // Applied Optics. – 2004. – Vol. 43, № 1. – P. 122–126.

6. *Durnin*, *J.* Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory / J. Durnin // JOSA A. – 1987. – Vol. 4, № 4. – P. 651–654.

7. *Gori*, *F.* Bessel – Gauss beams / F. Gori, G. Guattari, C. Padovani // Optics Communications. – 1987. – Vol. 64, № 6. – P. 491–495.

8. *Generalized Bessel – Gauss beams* / V. Bagini [et al.] // Journal of Modern Optics. – 1996. – Vol. 43, № 6. – P. 1155–1166.

9. *Imaging of generalized Bessel-Gauss beams* / C. Palma [et al.] // Journal of Modern Optics. – 1996. – Vol. 43, № 11. – P. 2269–2277.

10. *Santarsiero*, *M.* Propagation of general Bessel-Gauss beams throught ABCD optical systems / M. Santarsiero // Optics Communications. – 1996. – Vol. 132. – P. 1–7.

11. *Котляр*, *В.В.* Бездифракционные асимметричные элегантные пучки Бесселя с дробным орбитальным угловым моментом / В.В. Котляр, А.А. Ковалев, Сойфер В.А. // Компьютерная оптика. – 2014. – Т. 38, № 1. – С. 4–9.

12. *Гиргель*, *С.С.* Поляризационные свойства бессель-гауссовых пучков света / С.С. Гиргель // Известия Гомельского госуниверситета им. Ф. Скорины. – 2001. – № 6 (9). – С. 150–154.

13. *Гиргель*, С.С. Поляризационные и энергетические свойства векторных бессель-гауссовых световых пучков / С.С. Гиргель // Известия Гомельского госуниверситета им. Ф. Скорины. – 2006. – № 6 (39), Ч. 1. – С. 49–52.

14. *Гиргель*, *С.С.* Обобщенные пучки Бесселя – Гаусса непрерывного порядка / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 2 (25). – С. 10–15.

15. *Ковалев*, *А.А.* Вращающиеся элегантные пучки Бесселя – Гаусса / В.В. Котляр, А.А. Ковалев, Р.В. Скиданов, В.А. Сойфер // Компьютерная оптика. – 2014. – Т. 38, № 2. – С. 162–168.

16. *Kotlyar*, *V.V.* Asymmetric Bessel-Gauss beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, R.V. Skidanov, V.A. Soifer // Journ. Opt. Soc. Am. A. – 2014. – Vol. 31, № 9. – P. 1977–1983.

17. *Kotlyar*, *V.V.* Asymmetric Bessel – Gauss beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // Journ. Appl. Phys. – 2016. – Vol. 120. – P. 023101(5).

18. *Порфирьев*, *А.П.* Оптический захват и перемещение микрочастиц с помощью асимметричных пучков Бесселя – Гаусса / А.П. Порфирьев, А.А. Ковалев, В.В. Котляр // Компьютерная оптика. – 2016. – Т. 40, № 2. – С. 152–157.

19. *Гиргель С.С.* Асимметричные пучки Бесселя – Гаусса непрерывного порядка // Проблемы взаимодействия излучения с веществом. Материалы IV Международной научной конференции, посвященной 90-ю со дня рождения Б.В. Бокутя (Гомель, 9-10 ноября 2016 года). Ч. 1. Электронное издание. – Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины. – 2016. – С. 24–31.

20. *Бейтмен*, *Г.* Высшие трансцендентные функции. II / Г. Бейтмен, А. Эрдейи // М.: Наука, 1974. – 295 с.

21. *Christodoulides*, *D.N.* Bessel X waves in two- and three-dimensional bidispersive optical systems / D.N. Christodoulides, N.K. Efremidis, P.D. Trapani, B.A. Malomed // Opt. Lett. – 2004. – Vol. 29, № 13. – P. 1446–1448.

22. *Berry*, *M.V.* Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps / M.V. Berry // Journal of Optics. – 2003, № 6. – P. 259–268.

23. *Waldron*, *R.A.* A helical coordinate system and its applications in electromagnetic theory / R.A. Waldron // Quart. Journ. Mech. and Applied Math. – 1958. – Vol. XI, Pt. 4. – P.438–461.

24. *Overfelt*, *P.L.* Scalar optical beams with helical symmetry / P.L. Overfelt // Phys. Rev. A. – 1992. – Vol. 46, № 6. – P. 3516–3522.

25. *Гиргель*, *С.С.* Свойства векторных параксиальных световых пучков. II. Неоднородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 1 (10). – С. 11–14.

26. *Гиргель*, *С.С.* Свойства векторных параксиальных световых пучков. I. Однородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 1 (6). – С. 20–24.

Поступила в редакцию 21.02.17.