УДК 621.373 : 535

АМПЛИТУДНЫЕ И ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОЛЬЦЕВОГО ЛАЗЕРА С НЕОДНОРОДНЫМ РЕЗОНАТОРОМ

А. Я. Бирман и *А. Ф. Савушкин*

Построена асимптотика частотной характеристики кольцевого лазера с неоднородным резонатором, а также получены соотношения для полосы синхронизации, постоянных составляющих и глубины модуляции интенсивностей встречных волн.

В работе [1] получены уравнения, описывающие возбуждение в слабонелинейном кольцевом лазере собственных колебаний резонатора, содержащего произвольное число неоднородных и анизотропных трансформирующих элементов, обладающих отражающими, фокусирующими и рассеивающими свойствами. В настоящей работе эти уравнения решены методом возмущений, и в приближении слабой связи между встречными волнами получены соотношения, описывающие амплитудные и частотные характеристики слабонелинейного кольцевого лазера с неоднородным резонатором.

При достаточно малом превышении усиления активной среды над порогом генерации в кольцевом лазере с резонатором, обладающим невырожденным спектром собственных колебаний, возбуждается по одному собственному колебанию линейной невозмущенной системы $\mathbf{a}_p(\mathbf{r}, z)$ [1] в каждом направлении ($p=1, 2$ — индекс направления распространения). Комплексные амплитуды этих собственных колебаний (встречных волн) E_p и их частоты ν_p описываются следующими уравнениями [1]:

$$i\frac{dE_p}{dt}=(\omega_p+n_p-\nu_p)E_p+iS_pE_{p'}\exp[i(\nu_p-\nu_{p'})t]-\sum_q W_p^q|E_q|^2E_p, \tag{1}$$

здесь и далее $p, p', q, q'=1, 2$; $p'\neq p$; $q'\neq q$.

Параметры нелинейного самовоздействия и взаимодействия волн W_p^q связаны с матричными элементами оператора нелинейного взаимодействия поля с активной средой в представлении круговых поляризаций W_{psr}^{qtu} и круговыми компонентами собственных состояний $a_p^{(r)}$ соотношением [1]

$$W_p^q=\left[\sum_r\langle\bar{a}_{p'}^{(r')}a_p^{(r)}\rangle\right]^{-1}\sum_{s,r,t,u}\langle\langle W_{psr}^{qtu}\bar{a}_{p'}^{(s')}a_p^{(r)}a_q^{(t)}a_q^{(u)*}\rangle\rangle, \tag{2}$$

где угловые скобки $\langle\ldots\rangle$ означают усреднение в поперечном сечении резонатора, а двойные скобки $\langle\langle\ldots\rangle\rangle$ — усреднение по всему объему резонатора.

Так как вся информация о неоднородности резонатора заключена в параметрах, описывающих нелинейное самовоздействие и взаимодействие волн W_p^q, линейную связь между встречными волнами S_p, собственные частоты невозмущенной системы ω_p и превышение усиления над потерями n_p

$$n_p=\langle\langle\bar{\mathbf{a}}_{p'}\mathbf{a}_p\rangle\rangle^{-1}\langle\langle\bar{\mathbf{a}}_{p'}(\hat{M}_p^{(0)}-\hat{M}_p)\mathbf{a}_p\rangle\rangle \tag{3}$$

(где оператор $\hat{M}_p$ характеризует линейные свойства активной среды, а $\hat{M}_p^{(0)}$ соответствует активной среде в невозмущенной системе [1]), уравнения (1) формально совпадают с уравнениями теории кольцевого лазера, построенной в приближении плоских волн [2–4]. Однако существенная для кольцевого лазера с неоднородным резонатором асимметрия параметров $W_p^q (W_p^q \neq W_{p'}^{q'})$ [5] не позволяет воспользоваться результатами теории [2–4], основанной на симметрии этих параметров. Метод решения уравнений (1) в приближении слабой связи между встречными волнами достаточно известен [4, 6], поэтому в настоящей работе приводятся лишь наиболее существенные результаты, полученные с его помощью.

При полном пренебрежении рассеивающими свойствами элементов резонатора интенсивности I_p и разность частот $\nu_{pp'}$ встречных волн даются следующими выражениями:

$$I_p = \langle |\mathbf{a}_p(\mathbf{r}, z)|^2 \rangle x_p, \tag{4}$$

$$\nu_{pp'} = \Omega_p - \Omega_{p'} + \sum_q \operatorname{Re}(W_{p'}^q - W_p^q) x_q, \tag{5}$$

$$\Omega_p = \omega_p + \operatorname{Re} n_p, \tag{6}$$

$$x_p = \sum_q \operatorname{Im} n_q \frac{\partial \ln \Delta}{\partial \operatorname{Im} W_p^q}. \tag{7}$$

$$\Delta = \det \operatorname{Im} W_p^q. \tag{8}$$

С учетом рассеяния в приближении слабой связи между встречными волнами [4] асимптотика среднего значения разности частот встречных волн

$$\nu_p - \nu_{p'} = \nu_{pp'} + \sum_{q_1, q_2} X_{pq_1q_2} |S_{q_1} S_{q_2}|, \tag{9}$$

постоянные составляющие интенсивностей встречных волн

$$\mathcal{I}_p = I_p + \langle |\mathbf{a}_p(\mathbf{r}, z)|^2 \rangle \sum_{q_1, q_2} Z_{pq_1q_2} |S_{q_1} S_{q_2}| \tag{10}$$

и глубина модуляции интенсивностей встречных волн на разностной частоте $\nu_p - \nu_{p'}$

$$m_p = 2D^{-1} \{x_{p'} x_p^{-1} |S_p|^2 [\nu_{pp'}^2 + 4x_{p'}^2 (\operatorname{Im} W_{p'}^{p'})^2] + 4x_p x_{p'} |S_{p'}|^2 (\operatorname{Im} W_p^{p'})^2 +$$
$$+ 4\nu_{pp'} x_{p'} |S_p S_{p'}| \sin\varphi \operatorname{Im} W_p^{p'} - 8x_{p'}^2 |S_p S_{p'}| \cos\varphi \operatorname{Im} W_p^{p'} \operatorname{Im} W_{p'}^{p'}\}^{1/2}, \tag{11}$$

где

$$D = \left\{\nu_{pp'}^4 + 4\nu_{pp'}^2 \left[\sum_q x_q^2 (\operatorname{Im} W_q^q)^2 + 2x_p x_{p'} \operatorname{Im} W_p^{p'} \operatorname{Im} W_{p'}^p\right] + 16\Delta^2 x_p^2 x_{p'}^2\right\}^{1/2}, \tag{12}$$

$$\varphi = \arg S_p + \arg S_{p'}, \tag{13}$$

содержат билинейные комбинации коэффициентов связи между встречными волнами, характеризующие рассеивающие свойства элементов резонатора.

Асимптотическое выражение (9) получено в пределе

$$|\nu_p - \nu_{p'}| \gg \Omega, \tag{14}$$

где Ω — полоса синхронизации встречных волн

$$\Omega = \left\{\sum_p x_{p'} x_p^{-1} |S_p|^2 \left[1 + \Delta^{-2} \left(\sum_q \operatorname{Im} W_{p'}^{q'} \operatorname{Re}(W_q^q - W_{q'}^q)\right)^2\right] + \right.$$
$$+ 2|S_p S_{p'}| \cos\varphi \left[1 - \Delta^{-2} \sum_{q_1, q_2} \operatorname{Im} W_{p'}^{q_1'} \operatorname{Im} W_p^{q_2'} \operatorname{Re}\left(W_{q_1}^{q_1} - W_{q_1'}^{q_1}\right) \operatorname{Re}\left(W_{q_2}^{q_2} - W_{q_2'}^{q_2}\right)\right] -$$
$$\left. - 2|S_p S_{p'}| \sin\varphi \Delta^{-1} \sum_p \operatorname{Re}(W_p^p - W_{p'}^p) \operatorname{Im}(W_{p'}^{p'} + W_p^{p'})\right\}^{1/2}. \tag{15}$$

Параметры билинейных комбинаций $X_{pq_1q_2}$, $Z_{pq_1q_2}$ зависят от характеристик активной среды и резонатора W_p^q, n_p, φ и от невозмущенной рассеянием разности частот встречных волн $\nu_{pp'}$. Главные члены асимптотики этих параметров при $|\nu_{pp'}| \gg \operatorname{Im} n_p$ имеют вид

$$X_{ppp'} = -2\nu_{pp'}^{-1} \cos\varphi, \tag{16}$$

$$X_{pp'p} = \Delta^{-1}\nu_{pp'}^{-1} \sin\varphi \sum_q (-1)^{q-p'} \operatorname{Re}(W_{p'}^q - W_p^q) \operatorname{Im}(W_p^{q'} + W_{p'}^{q'}), \tag{17}$$

$$Z_{pp'p} = -\Delta^{-1}\nu_{pp'}^{-1} \sin\varphi \sum_q \operatorname{Im} W_q^{p'}. \tag{18}$$

Выражения для $X_{pq_1q_2}$ при произвольном соотношении между $|\nu_{pp'}|$ и $\operatorname{Im} n_p$ приведены в Приложении.

Достаточным условием применимости полученных соотношений в дополнении к слабонелинейности лазера является малость глубины модуляции интенсивностей встречных волн (11).

Полученные результаты позволяют исследовать основные характеристики кольцевых лазеров с широким классом неоднородных резонаторов. Параметры W_p^q (2), фигурирующие в полученных соотношениях, являются достаточно сложными функционалами пространственно-поляризационной структуры поля и неоднородных характеристик активной среды. Однако они существенно упрощаются для резонаторов, в которых пространственная структура поля в активной среде $f_p(\mathbf{r}, z)$ отделена от поляризационной структуры $\boldsymbol{\tau}_p$

$$\mathbf{a}_p(\mathbf{r}, z) = \boldsymbol{\tau}_p f_p(\mathbf{r}, z), \quad |\boldsymbol{\tau}_p|^2 = 1, \tag{19}$$

а неоднородность нелинейных характеристик активной среды описывается единой функцией распределения $R(z)$, соответствующей распределению плотности возбужденных атомов в активной среде. В этом случае параметры W_p^q, несущие информацию как о свойствах активной среды, так и о неоднородности резонатора, можно представить в виде суперпозиции параметров трех классов, описывающих раздельно свойства активной среды (w_{pmn}^q, u_{pl}; $m, n, l = 1, 2$), поляризационную структуру собственного колебания ($\varkappa_{pmn}^q$, σ_{pl}; $m, n, l = 1, 2$) и его дифракционную структуру (μ_q)

$$W_p^q = \mu_q \sum_{m,n} w_{pmn}^q \varkappa_{pmn}^q + \delta_{qp'}\mu_{p'} \sum_l u_{pl}\sigma_{pl}. \tag{20}$$

Функционалы распределения поля собственного колебания линейной системы

$$\mu_q = \langle\!\langle \bar{f}_{p'} f_p \rangle\!\rangle^{-1} \langle\!\langle R \bar{f}_{p'} f_p f_q f_q^* \rangle\!\rangle \tag{21}$$

были введены в работе [5] при описании дифракционных эффектов в кольцевом лазере.

Элементы матрицы $\varkappa_{pmn}^q$ $(m, n = 1, 2)$

$$\varkappa_{pmn}^q = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_p \\ \beta_q & \alpha_p\beta_q \end{pmatrix} \tag{22}$$

и величины σ_{pl} $(l = 1, 2)$ связаны с поляризационными характеристиками собственного колебания — эллиптичностью ε_p и азимутом ψ_p — следующими соотношениями:

$$\alpha_p = \gamma_p^{-1}\left[(\varepsilon_p - \bar{\varepsilon}_{p'})(1 - \varepsilon_p\bar{\varepsilon}_{p'}) + \frac{1}{2} i (1 - \varepsilon_p^2)(1 - \bar{\varepsilon}_{p'}^2) \sin 2(\bar{\psi}_{p'} - \psi_p)\right], \tag{23}$$

$$\beta_p = 2\varepsilon_p (1 + \varepsilon_p^2)^{-1}, \tag{24}$$

$$\sigma_{p1} = \gamma_p^{-1} (1 + \varepsilon_{p'}^2)^{-1} (1 - \varepsilon_{p'}^2) \left\{ \frac{1}{2} (1 + \varepsilon_p^2)(1 - \bar{\varepsilon}_{p'}^2) \cos 2(\bar{\psi}_{p'} - \psi_{p'}) + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} (1 - \varepsilon_p^2)(1 + \bar{\varepsilon}_{p'}^2) \cos 2(\psi_{p'} - \psi_p) -$$

$$\left. - i\varepsilon_p (1 - \bar{\varepsilon}_{p'}^2) \sin 2(\bar{\psi}_{p'} - \psi_{p'}) + i\bar{\varepsilon}_{p'} (1 - \varepsilon_p^2) \sin 2(\psi_{p'} - \psi_p) \right\}, \tag{25}$$

$$\sigma_{p2} = \gamma_p^{-1} (1 + \varepsilon_{p'}^2)^{-1} (1 - \varepsilon_{p'}^2) \Big\{ -\varepsilon_p (1 - \bar{\varepsilon}_{p'}^2) \cos 2 (\bar{\psi}_{p'} - \psi_{p'}) -$$

$$- \bar{\varepsilon}_{p'} (1 - \varepsilon_p^2) \cos 2 (\psi_{p'} - \psi_p) +$$

$$+ \frac{1}{2} i (1 + \varepsilon_p^2) (1 - \bar{\varepsilon}_{p'}^2) \sin 2 (\bar{\psi}_{p'} - \psi_{p'}) - \frac{1}{2} i (1 - \varepsilon_p^2) (1 + \bar{\varepsilon}_{p'}^2) \sin 2 (\psi_{p'} - \psi_p) \Big\}, \quad (26)$$

$$\gamma_p = (1 - \varepsilon_p \bar{\varepsilon}_{p'})^2 \cos^2 (\bar{\psi}_{p'} - \psi_p) + (\varepsilon_p - \bar{\varepsilon}_{p'})^2 \sin^2 (\bar{\psi}_{p'} - \psi_p). \quad (27)$$

Черта сверху, как и в работе [1], означает изменение знака магнитного поля, воздействующего на чувствительные к полю элементы резонатора.

Параметры w_{pmn}^q $(m, n=1, 2)$ и u_{pl} $(l=1, 2)$ являются симметризованными характеристиками активной среды

$$\left.\begin{aligned} w_{pmn}^q &= \frac{1}{4} \{ W_{p11}^{q11} + (-1)^{m+1} W_{p11}^{q22} + (-1)^{n+1} W_{p22}^{q11} + (-1)^{m+n} W_{p22}^{q22} \}, \\ u_{pl} &= \frac{1}{4} \{ W_{p12}^{p'12} + (-1)^{l+1} W_{p21}^{p'21} \}. \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

и при $m \neq n$, $l=2$ пропорциональны воздействующему на активную среду аксиальному магнитному полю.

Построенная теория кольцевого лазера с неоднородным резонатором единым образом описывает эффекты, связанные с рассеянием волн во встречном направлении [2–4], дифракционные [5, 7] и нелинейные поляризационные эффекты [8, 9]. При описании скалярных дифракционных эффектов теория раздвигает границы приближений работы [5] и позволяет распространить полученные в [5] результаты для исследования дифракционных эффектов в кольцевом лазере, содержащем произвольное число корректирующих элементов, учесть влияние линейных фокусирующих свойств активной среды, а также амплитудную и частотную невзаимность резонатора для встречных волн. В области нелинейных поляризационных эффектов развитая теория обобщает результаты работы [9], демонстрируя существенное изменение дисперсионных характеристик лазера под воздействием магнитного поля, приложенного к невзаимным элементам резонатора или к активной среде. Магнитные нелинейные поляризационные эффекты характеризуются не только поляризационным состоянием встречных волн в активной среде, но и поляризационной структурой волн в системе с инверсией аксиального магнитного поля. При описании эффектов, связанных лишь с рассеянием волн во встречном направлении (в рамках скалярной модели плоских волн), построенная теория не содержит новых результатов.

Совместное рассмотрение перечисленных эффектов и построение единого аппарата для их описания, реализованное в [1] и в настоящей работе, естественно, так как все эффекты являются следствием той или иной неоднородности резонатора. Характер неоднородности в реальных системах, как правило, не является чисто дифракционным, чисто поляризационным или связанным лишь с обратным рассеянием. Эффекты интерферируют, и при достаточно сложной структуре неоднородности становится невозможным отделение одного эффекта от другого в дисперсионных характеристиках лазера. Развитая теория, таким образом, не только обобщает известные результаты, но и позволяет описать новые эффекты, связанные с распространением в активной среде волн, обладающих неоднородной пространственно-поляризационной структурой.

Авторы благодарны И. П. Мазанько и Э. Е. Фрадкину за полезные обсуждения вопросов, затронутых в настоящей работе.

Приложение

Во всех соотношениях, выписанных в Приложении, индекс i означает мнимую, а индекс r — действительную части соответствующей величины.

$$X_{ppp'} = (2\nu_{pp'} \Delta D^2)^{-1} \cos \varphi \Big\{ -4\nu_{pp'}^4 \Delta + 2\nu_{pp'} (\nu_{pp'}^2 + 4\Delta x_p x_{p'}) \times$$

$$
\times \sum_{q_1, q_2} (-1)^{q_2 - p} W^{q_1}_{q_1 i} (W^{q_2}_{pi} - W^{q_2}_{p'i}) (W^{q_2'}_{p'r} - W^{q_2'}_{pr}) x_{q_1} +
$$

$$
+ 32 x_p^2 x_{p'}^2 \Delta \left[-\Delta^2 + \sum_{q_1, q_2} (-1)^{q_1 + q_2} W^{q_1'}_{p'i} W^{q_2'}_{pi} (W^{q_1}_{pr} - W^{q_1}_{p'r}) (W^{q_2}_{pr} - W^{q_2}_{p'r}) \right] +
$$

$$
+ 4 \nu^2_{pp'} [(W^p_{pr} - W^p_{p'r}) (W^{p'}_{p'r} - W^{p'}_{pr}) \Big(\sum_q (W^q_{qi})^2 x_q^2 - 2 W^{p'}_{pi} W^p_{p'i} x_p x_{p'} \Big) +
$$

$$
+ \sum_q W^{q'}_{qi} (W^q_{qr} - W^q_{q'r}) (W^q_{qi} x_q - W^{q'}_{q'i} x_{q'}) x_q -
$$

$$
- \Delta \Big(\sum_q (W^q_{qi} + W^q_{q'i}) (W^q_{qi} x_q + W^{q'}_{qi} x_{q'} \Big) x_q +
$$

$$
+ 2 \sum_q (W^q_{qi})^2 x_q^2 + 4 W^{p'}_{pi} W^p_{p'i} x_p x_{p'} \Big) \Big] \Big\}, \qquad (\text{П. } 1)
$$

$$
X_{pp'p} = (2 \nu_{pp'} \Delta D^2)^{-1} \sin \varphi \Big\{ 2 \nu^4_{pp'} + 32 \Delta^2 x_p^2 x_{p'}^2) \times
$$

$$
\times \sum_q (-1)^{q - p'} (W^q_{p'r} - W^q_{pr}) (W^{q'}_{pi} + W^{q'}_{p'i}) + 2 \nu_{pp'} (\nu^2_{pp'} - 4 \Delta x_p x_{p'}) \times
$$

$$
\times \left[\sum_q (-1)^{q - p} (W^q_{pr} - W^q_{p'r})^2 W^{q'}_{qi} x_q + (W^p_{pr} - W^p_{p'r}) (W^{p'}_{p'r} - W^{p'}_{pr}) (W^p_{pi} x_p - W^{p'}_{p'i} x_{p'}) \right] +
$$

$$
+ 4 \nu^2_{pp'} \sum_q \Big[(W^q_{qr} - W^q_{q'r}) ((W^{q'}_{q'i} + W^{q'}_{qi}) (x_q^2 (W^q_{qi})^2 + x_{q'}^2 (W^{q'}_{q'i})^2 +
$$

$$
+ 4 W^{q'}_{qi} W^q_{q'i} x_q x_{q'}) + 2 W^{q'}_{q'i} (x_q^2 (W^q_{qi})^2 + x_{q'}^2 W^{q'}_{q'i} W^{q'}_{qi}) \Big) \Big] \Big\}, \qquad (\text{П. } 2)
$$

$$
X_{ppp} = (2 \nu_{pp'} \Delta D^2)^{-1} \Big\{ 2 \nu_{pp'} x_{p'} W^p_{p'i} (\nu^2_{pp'} - 4 \Delta x_p x_{p'}) \times
$$

$$
\times \sum_q (-1)^{q - p} (W^{q'}_{p'r} - W^{q'}_{pr}) (W^q_{pi} - W^q_{p'i}) + 4 \nu^2_{pp'} x_{p'} \times
$$

$$
\times \Big[\Delta \sum_q x_q W^p_{qi} (W^q_{p'i} - W^q_{pi}) + \sum_{q_1, q_2} (-1)^{q_1 - p'} W^{q_1}_{p'i} W^p_{q_2 i} \times
$$

$$
\times (W^{q_1'}_{pr} - W^{q_1'}_{p'r}) (W^{q_2}_{p'r} - W^{q_2}_{pr}) x_{q_2} \Big] - 16 \Delta x_p x^3_{p'} \times
$$

$$
\times \Big[\Delta^2 + \Big(\sum_q (-1)^{q - p} W^{q'}_{p'i} (W^q_{pr} - W^q_{p'r}) \Big)^2 \Big] \Big\}, \qquad (\text{П. } 3)
$$

$$
X_{pp'p'} = - X_{p'p'p'}. \qquad (\text{П. } 4)
$$

Литература

[1] А. Я. Бирман, А. Ф. Савушкин. Опт. и спектр., *38*, 615, 1975.
[2] Г. С. Круглик. Ж. прикл. спектр., *7*, 569, 1967.
[3] Б. В. Рыбаков, Ю. В. Демиденков, С. Г. Скроцкий, А. М. Хромых. ЖЭТФ, *57*, 1184, 1969.
[4] П. С. Ланда. Автореф. докт. дисс., М., 1972.
[5] А. Я. Бирман, А. Ф. Савушкин. Сб. «Теория дифракции и распространения волн», 483. Изд. ВНИИРИ, Ереван, 1973.
[6] Э. Г. Пестов, Г. М. Лапшин. Квантовая электроника. Воениздат, М., 1972.
[7] Э. Е. Фрадкин. Опт. и спектр., *31*, 952, 1971; *32*, 132, 1972.
[8] Э. Г. Пестов, Г. С. Круглик. Ж. прикл. спектр., *16*, 985, 1972.
[9] В. А. Зборовский, Э. Е. Фрадкин. ЖЭТФ, *66*, 1219, 1974.

Поступило в Редакцию 29 ноября 1973 г.