МАТЕМАТИКА

УДК 517.9 + 537.86

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ СЛОЖНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

С.П. Жогаль[1], С.И. Жогаль[2], А.В. Клименко[1]

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*
[2]*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель*

ON EXISTENCE AND UNIQUENESS OF SOLUTIONS OF ONE COMPLEX STOCHASTIC DIFFERENTIAL SYSTEM WITH DELAY

S.P. Zhogal[1], S.I. Zhogal[2], A.V. Klimenko[1]

[1]*F. Scorina Gomel State University*
[2]*Belarusian State University of Transport, Gomel*

Исследованы вопросы существования и единственности решений систем дифференциальных уравнений, содержащих стохастическое дифференциальное уравнение в частных производных гиперболического типа и обыкновенные стохастические дифференциальные уравнения с запаздыванием, связанные между собой запаздывающими связями.

Ключевые слова: *стохастические дифференциальные уравнения, запаздывание, стохастические дифференциальные уравнения в частных производных, звенья с сосредоточенными параметрами, звенья с распределенными параметрами.*

Problems of the existence and uniqueness of solutions of systems of differential equations containing a stochastic differential equation in partial derivatives of hyperbolic type and ordinary stochastic differential equations with delay connected with each other by retarded connections are investigated.

Keywords: *stochastic differential equations, delay, stochastic partial differential equations, units with lumped parameters, units with distributed parameters.*

Введение

При исследовании многих сложных систем радиотехники и электроники, а также целого ряда других областей современного естествознания, встает задача их наиболее адекватного математического описания. Во многих случаях такие системы трактуются как системы с сосредоточенными, либо как системы с распределенными параметрами. Однако такая трактовка носит зачастую довольно приближенный характер и приводит к существенным погрешностям при исследовании реальных процессов, протекающих в таких системах.

В современной науке и технике, особенно в таких отраслях, как теория управления, радиофизика, радиотехника и электроника необходимо исследовать динамические системы с учетом случайных возмущений. Повышение требований к точности и адекватности математических моделей, описывающих реальные исследуемые системы, привело к интенсивному развитию математического аппарата теории нелинейных случайных колебаний.

При исследовании случайных колебаний различных динамических систем основные результаты были получены для систем с сосредоточенными параметрами [1], [2]. В значительно меньшей степени разработаны методы исследования систем с распределенными параметрами, находящихся под действием различных типов случайных возмущений. Однако существует довольно большой класс реальных сложных систем, которые довольно точно могут быть описаны лишь системами стохастических дифференциальных уравнений, содержащими уравнения в частных производных и уравнения в обыкновенных производных с отклонением по времени, связанные между собой запаздывающими связями. Подобного рода сложные квазилинейные системы с запаздыванием, которые описываются системой уравнений, содержащей взаимосвязанные уравнения в частных производных и обыкновенные дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом, в детерминированном случае исследованы в монографии [3].

1 Постановка задачи

Сложные динамические системы обычно описываются системами дифференциальных уравнений, содержащими уравнения в частных производных и уравнения в обыкновенных производных с отклоняющимся аргументом, связанные между собой запаздывающими связями и краевыми условиями. При исследовании случайных процессов, протекающих в реальных сложных системах, довольно часто в качестве математических моделей могут быть выбраны системы стохастических дифференциально-функциональных уравнений следующего вида:

$$\frac{\partial^2 u(t,\bar{x})}{\partial t^2}=\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mathcal{L}_{ij}(\bar{x})\right)\frac{\partial u(t,\bar{x})}{\partial x_j}\right\}-$$
$$-\beta(\bar{x})u(t,\bar{x})+$$
$$+F\left[t,\bar{x},u(t-\Delta_r,\bar{x}),y_k(t-\Delta_r),\frac{\partial u(t-\Delta_r,\bar{x})}{\partial x_i},\right.$$
$$\left.\frac{\partial u(t-\Delta_r,\bar{x})}{\partial t},\frac{dy_k(t-\Delta_r)}{dt},\varepsilon\right]+ \qquad (1.1)$$
$$+\sum_{\mu=1}^{M}\Phi_{\mu}\left[t,\bar{x},u(t-\Delta_r,\bar{x}),y_k(t-\Delta_r),\frac{\partial u(t-\Delta_r,\bar{x})}{\partial x_i},\right.$$
$$\left.\frac{\partial u(t-\Delta_r,\bar{x})}{\partial t},\frac{dy_k(t-\Delta_r)}{dt},\varepsilon\right]\frac{dw_{\mu}(t)}{dt};$$
$$\frac{d^2 y_k(t)}{dt^2}=\sum_{p=1}^{K}\left\{\sum_{l=0}^{R}\left(\alpha_{kpl}y_p(t-\Delta_l)+b_{kpl}\frac{dy_p(t-\Delta_l)}{dt}\right)\right\}+$$
$$+f_k\left[t,u(t-\Delta_r,\bar{\zeta}),y_p(t-\Delta_r),\frac{\partial u(t-\Delta_r,\bar{\zeta})}{\partial x_i},\right.$$
$$\left.\frac{\partial u(t-\Delta_r,\bar{\zeta})}{\partial t},\frac{dy_p(t-\Delta_r)}{dt},\varepsilon\right]+ \qquad (1.2)$$
$$+\sum_{\eta=1}^{M'}g_{k\eta}\left[t,u(t-\Delta_r,\bar{\zeta}),y_p(t-\Delta_r),\frac{\partial u(t-\Delta_r,\bar{\zeta})}{\partial x_i},\right.$$
$$\left.\frac{\partial u(t-\Delta_r,\bar{\zeta})}{\partial t},\frac{dy_p(t-\Delta_r)}{dt},\varepsilon\right]\frac{d\xi_{k\eta}(t)}{dt}$$
$$(k,\ p=\overline{1,K},\ r=\overline{0,R},\ i=\overline{1,n})$$

с начальными условиями

$$u(t,\bar{x})_{|t\in E_0}=\varphi_0(t,\bar{x}), \qquad (1.3)$$
$$\frac{\partial u(t,\bar{x})}{\partial t}_{|t\in E_0}=\varphi_1(t,\bar{x}), \qquad (1.4)$$
$$y_k(t)_{|t\in E_0}=h_{k0}(t),\ k=\overline{1,K}, \qquad (1.5)$$
$$\frac{dy_k(t)}{dt}_{|t\in E_0}=h_{k1}(t),\ k=\overline{1,K}, \qquad (1.6)$$

и краевым условием

$$p_0u(t,\bar{x})+p_1\frac{\partial u(t,\bar{x})}{\partial v}_{|\bar{x}\in S}=\psi(t,\bar{x}), \qquad (1.7)$$

где $t\in[0,T]\subset R$, $T<\infty$, $\bar{x}$ – n-мерный вектор, принадлежащий ограниченной области $\bar{\Gamma}\subset E_n$, E_n – n-мерное евклидово пространство, S – замыкание области $\bar{\Gamma}$, $u(t,\bar{x})$ – случайная функция, определенная на множестве $[0,T]\times\bar{\Gamma}\times\Omega$, $y_k(t)$ – случайные функции, определяемые на $[0,\mathrm{T}]\times\Omega$, $w_{\mu}(t)$, $\xi_{k\eta}(t)$ – стохастически независимые между собой винеровские процессы единичной интенсивности, F, Φ_{μ}, f_k, $g_{k\eta}$ – нелинейные функционалы, $\mathcal{L}_{ij}(\bar{x})$, $\beta(\bar{x})$ – детерминирован-ные функции, определяемые в области $\bar{\Gamma}$, a_{kpl}, b_{kpl}, p_0, p_1 – вещественные постоянные, Δ_r, Δ_l, $r,l=0,1,...R$ – неотрицательные постоянные ($\Delta_0=0$), $\bar{\zeta}\in\bar{\Gamma}$ – некоторое фиксированное значение $\bar{x}$, E_0 – начальное множество вида $[-\Delta_{max},0]$, где $\Delta_{max}=\max\{\Delta_0,\Delta_1,...,\Delta_R\}$, $\varphi_0(t,\bar{x})$, $\varphi_1(t,\bar{x})$ – случайные функции, определенные на множестве $E_0\times\bar{\Gamma}\times\Omega$, $h_{k0}(t)$, $h_{k1}(t)$ – случайные функции, определенные на множестве $E_0\times\Omega$, $\psi(t,\bar{x})$ – детерминированная функция, определенная на множестве $[-\Delta_{max},\mathrm{T}]\times S$, выберем $\varepsilon>0$ – малый параметр, v – направление внешней нормали к поверхности S, $\{\Omega,\mathcal{F},P\}$ – вероятностное пространство с σ-алгеброй $\mathcal{F}$ и вероятностной мерой $P(A)$, в котором выделен некоторый поток (монотонно неубывающее семейство) σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)$. Все вводимые случайные функции, как функции аргумента t, предполагаются подчиненными потоку $(\mathcal{F}_t)$, т. е. для каждого t $\mathcal{F}_t$-измеримыми.

Как показано в [3], [4], многие сложные системы вида (1.1)–(1.7), содержащие одно звено с распределенными параметрами и K звеньев с сосредоточенными параметрами, могут быть описаны с высокой степенью точности следующей системой векторно-матричных уравнений:

$$\frac{dv^m(t,\varepsilon)}{dt}=\mathcal{L}_m v^m(t,\varepsilon)+$$
$$+F_m[t,v(t-\Delta_r,\varepsilon),z(t-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon]+ \qquad (1.8)$$
$$+\Phi_m[t,v(t-\Delta_r,\varepsilon),z(t-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon]\dot{w}(t),$$
$$m=1,2,...;$$
$$\frac{dz(t,\varepsilon)}{dt}=\sum_{l=0}^{R}A_l z(t-\Delta_l,\varepsilon)+$$
$$+f[t,v(t-\Delta_r,\varepsilon),z(t-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon]+ \qquad (1.9)$$
$$+g[t,v(t-\Delta_r,\varepsilon),z(t-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon]\dot{\xi}(t),$$

с начальными условиями

$$\left.\begin{array}{l} v^m(t,\varepsilon)_{|t\in E_0}=\psi_m(t),\ m=1,2,...\\ \mathrm{z}(t,\varepsilon)_{|t\in E_0}=H(t),\end{array}\right. \qquad (1.10)$$

где

$$z^k(t,\varepsilon)=\begin{bmatrix} z_1^k\\ z_2^k\end{bmatrix},\ v^m(t,\varepsilon)=\begin{bmatrix} v_1^m\\ v_2^m\end{bmatrix},$$
$$\mathcal{L}_m=\begin{bmatrix} 0 & 1\\ -\alpha_m & 0\end{bmatrix},\ F_m(t,v,z,\varepsilon)=\begin{bmatrix} 0\\ \tilde{F}_m\end{bmatrix},$$
$$\Phi_m(t,v,z,\varepsilon)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & ... & 0\\ \tilde{\Phi}_{1m} & \tilde{\Phi}_{2m} & ... & \tilde{\Phi}_{Mm}\end{bmatrix},$$
$$v(t,\varepsilon)=\begin{bmatrix} v^1\\ v^2\\ \vdots\\ v^m\\ \vdots\end{bmatrix},\ f[t,v,z,\varepsilon]=\begin{bmatrix} 0\\ f_1\\ \vdots\\ 0\\ f_K\end{bmatrix},$$

$$z(t,\varepsilon)=\begin{bmatrix} z^1\\ z^2\\ \vdots\\ z^K\end{bmatrix},\ \dot w(t)=\begin{bmatrix} 0 & \dot w_1\\ 0 & \dot w_2\\ \vdots & \vdots\\ 0 & \dot w_M\end{bmatrix},$$

$$g[t,v,z,\varepsilon]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0\\ g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1M'}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ g_{K1} & g_{K2} & \cdots & g_{KM'}\end{bmatrix},$$

$$A_0=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ a_{110} & b_{110} & a_{120} & \cdots & a_{1K0} & b_{1K0}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1\\ a_{K10} & b_{K10} & a_{K20} & \cdots & a_{KK0} & b_{KK0}\end{bmatrix},$$

$$H(t)=\begin{bmatrix} h_{10}\\ h_{11}\\ \vdots\\ h_{K0}\\ h_{K1}\end{bmatrix},\ \psi_m(t)=\begin{bmatrix}\varphi_{0m}\\ \varphi_{1m}\end{bmatrix},$$

$$A_i=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ a_{11i} & b_{11i} & \cdots & a_{1Ki} & b_{1Ki}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ a_{K1i} & b_{K1i} & \cdots & a_{KKi} & b_{KKi}\end{bmatrix},$$

$$\dot\xi(t)=\begin{bmatrix} 0 & \dot\xi_{11} & \cdots & \dot\xi_{K1}\\ 0 & \dot\xi_{12} & \cdots & \dot\xi_{K2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dot\xi_{1M'} & \cdots & \dot\xi_{KM'}\end{bmatrix}.$$

Для вектора $v(t,\varepsilon)$ положим, что

$$\left|v(t,\varepsilon)\right|^2=\max_m\left\{\max_i\left|v_i^m(t,\varepsilon)\right|^2,\ i=1,2,\ldots\right\},\quad m=1,2,\ldots \tag{1.11}$$

Таким образом, мы свели исследуемую систему (1.1)–(1.7) к системе стохастических обыкновенных дифференциально-функциональных уравнений первого порядка (1.8)–(1.10).

2 Основной результат

Для системы (1.8)–(1.10) справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть система* (1.8)–(1.10) *удовлетворяет следующим условиям:*

1) *вектор-функционалы* F_m, f, *матрицы* g, Φ_m *измеримы по совокупности своих переменных и непрерывны по* t, ε;

2) *существуют такие постоянные* K_{1m}, K_2, K_{3m}, *что справедливы неравенства*

$$\left|F_m(t,v_1,z_1,\varepsilon)-F_m(t,v_2,z_2,\varepsilon)\right|+$$
$$+\left|\Phi_m(t,v_1,z_1,\varepsilon)-\Phi_m(t,v_2,z_2,\varepsilon)\right|\le$$
$$\le K_{1m}\left\{\left|v_1-v_2\right|+\left|z_1-z_2\right|\right\},$$
$$\left|f(t,v_1,z_1,\varepsilon)-f(t,v_2,z_2,\varepsilon)\right|+$$
$$+\left|g(t,v_1,z_1,\varepsilon)-g(t,v_2,z_2,\varepsilon)\right|\le$$
$$\le K_2\left\{\left|v_1-v_2\right|+\left|z_1-z_2\right|\right\},$$
$$\left|\mathcal{L}_m\right|\le K_{3m},\ m=1,2,\ldots;$$

3) *существуют такие постоянные* K_{4m}, K_5, *что*

$$\left|F_m(t,v,z,\varepsilon)\right|^2+\left|\Phi_m(t,v,z,\varepsilon)\right|^2\le K_{4m}\left\{1+|v|^2+|z|^2\right\},$$
$$\left|f(t,v,z,\varepsilon)\right|^2+\left|g(t,v,z,\varepsilon)\right|^2\le K_5\left\{1+|v|^2+|z|^2\right\},$$
$$m=1,2,\ldots;$$

4) *компоненты вектор-функций* $H(t)$, $\psi_m(t)$, $m=1,2,\ldots$ *непрерывны и ограничены при* $t\in E_0$ *и некоррелированы между собой и с процессами* $\dot w(t)$ *и* $\dot\xi(t)$;

5) *характеристическое уравнение*

$$\mathrm{Det}\left\{\sum_{l=0}^{R}A_l e^{-\Delta_l\rho}-E\rho\right\}=0$$

имеет все корни с вещественной частью, удовлетворяющей неравенству $\operatorname{Re}\rho_j\le-\gamma<0$, *где* $\gamma>0$.

Тогда существует решение системы (1.8)–(1.10), *являющееся случайным процессом, измеримым при каждом* $t\in[0,T]$ *относительно δ-алгебры* $\mathcal{F}_t$, *для которого справедливы следующие утверждения*:

а) решение $\{v(t,\varepsilon),z(t,\varepsilon)\}$ *непрерывно с вероятностью единица*;

б) $M\left\{\left|v(t,\varepsilon)\right|^2\right\}<\infty,\ M\left\{\left|z(t,\varepsilon)\right|^2\right\}<\infty,\ t\in[0,T]$;

в) решение $\{v(t,\varepsilon),z(t,\varepsilon)\}$ *единственно с точностью до стохастической эквивалентности.*

Доказательство. Представим систему (1.8)–(1.9) с учетом (1.10) в интегральной форме

$$v^m(t,\varepsilon)=v^m(0,\varepsilon)+\int_0^t\Big[\mathcal{L}_m v^m(\tau,\varepsilon)+$$
$$+F_m(\tau,v(\tau-\Delta_r,\varepsilon),z(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)\Big]d\tau+$$
$$+\int_0^t\Phi_m(\tau,v(\tau-\Delta_r,\varepsilon),z(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)dw(\tau);$$

$$z(t,\varepsilon)=V(t)H(0)+$$
$$+\sum_{l=1}^{R}\int_{-\Delta_l}^{0}V(t-\Delta_l-\tau)A_lH(\tau)d\tau+$$
$$+\int_0^t V(t-\tau)f(\tau,v(\tau-,\varepsilon),z(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)d\tau+ \tag{2.1}$$
$$+\int_0^t V(t-\tau)\,\mathrm{g}(\tau,v(\tau-\Delta_r,\varepsilon),z(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)d\xi(\tau)$$

$$(m=1,2,\ldots;\ r=\overline{0,R}),$$

где $V(t)$ – матрица, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{dV(t)}{dt} = \sum_{l=0}^{R} A_l V(t-\Delta_l) \qquad (2.2)$$

с начальным условием

$$V(t) = \begin{cases} \mathbf{0}, & t<0; \\ E, & t=+0; \end{cases}$$

$\mathbf{0}$ – нулевая матрица, E – единичная матрица.

Введем в рассмотрение непрерывные процессы $z_1(t,\varepsilon)$, $z_2(t,\varepsilon)$, $v_1^m(t,\varepsilon)$, $v_2^m(t,\varepsilon)$, $m=1,2,...$, удовлетворяющие (2.1). Исходя из условий теоремы, применяя операцию математического ожидания и используя неравенство Колмогорова – Дуба [5], для квадрата разности процессов $v_1^m(t,\varepsilon)$ и $v_2^m(t,\varepsilon)$ получаем:

$$M\left\{\sup_{s\le t}\left|v_1^m(s,\varepsilon)-v_2^m(s,\varepsilon)\right|^2\right\}\le$$

$$\le 2M\left[\int_0^t\left|\mathcal{L}_m(v_1^m(\tau,\varepsilon)-v_2^m(\tau,\varepsilon))+\right.\right.$$

$$+F_m(\tau,v_1(\tau-\Delta_r,\varepsilon),z_1(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)-$$

$$\left.\left.-F_m(\tau,v_2(\tau-\Delta_r,\varepsilon),z_2(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)\right|d\tau\right]^2+$$

$$+8M\left[\int_0^t\left|\Phi_m(\tau,v_1(\tau-\Delta_r,\varepsilon),z_1(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\Phi_m(\tau,v_2(\tau-\Delta_r,\varepsilon),z_2(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)\right|dw(\tau)\right]^2$$

$$\le 2TM\left[\int_0^t\left|\mathcal{L}_m(v_1^m(\tau,\varepsilon)-v_2^m(\tau,\varepsilon))+\right.\right.$$

$$+F_m(\tau,v_1(\tau-\Delta_r,\varepsilon),z_1(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)-$$

$$\left.\left.-F_m(\tau,v_2(\tau-\Delta_r,\varepsilon),z_2(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)\right|^2d\tau\right]+$$

$$+8M\left[\int_0^t\left|\Phi_m(\tau,v_1(\tau-\Delta_r,\varepsilon),z_1(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\Phi_m(\tau,v_2(\tau-\Delta_r,\varepsilon),z_2(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)\right|^2\right]d\tau\le$$

$$\le L_{1m}\int_0^t M\left(\sup_{s\le\tau}\left[\left|v_1(s,\varepsilon)-v_2(s,\varepsilon)\right|^2+\right.\right.$$

$$\left.+\left|z_1(s,\varepsilon)-z_2(s,\varepsilon)\right|^2\right)d\tau.$$

Проводя аналогичные выкладки, для второго интегрального уравнения системы (2.1), будем иметь

$$M\left\{\sup_{s\le t}\left|z_1(s,\varepsilon)-z_2(s,\varepsilon)\right|^2\right\}\le$$

$$\le L_2\int_0^t M\left(\sup_{s\le\tau}\left[\left|v_1(s,\varepsilon)-v_2(s,\varepsilon)\right|^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left|z_1(s,\varepsilon)-z_2(s,\varepsilon)\right|^2\right]\right)d\tau.$$

Определим непрерывные с вероятностью единица случайные векторные процессы $\omega_i(t,\varepsilon)=\{z_i(t,\varepsilon), v_i^m(t,\varepsilon), m=1,2,...\}$, $i=1,2$ и положим, что

$$|\omega_i(t,\varepsilon)|=\max\{|z_i(t,\varepsilon)|,|v_i^m(t,\varepsilon)|\},\ i=1,2,$$

$$\lambda(t)=M\left\{\sup_{s\le t}\left|\omega_1(s,\varepsilon)-\omega_2(s,\varepsilon)\right|^2\right\}.$$

Исходя из полученных неравенств, для $\lambda(t)$ будем иметь

$$\lambda(t)\le L_3\int_0^t\lambda(\tau)d\tau, \qquad (2.4)$$

где константа $L_3=\max\left\{\max_m 2L_{1m}, 2L_2\right\}$.

Из неравенства (2.4) вытекает [6], что $\lambda(t)=0$ с вероятностью единица для всех $t\in[0,T]$.

Таким образом, мы доказали, что случайные процессы $\omega_1(t,\varepsilon)$ и $\omega_2(t,\varepsilon)$ стохастически эквивалентны, и, значит, исходя из того, что они непрерывны с вероятностью единица, можно утверждать, что система (1.8)–(1.10) имеет единственное решение с точностью до стохастической эквивалентности.

Докажем существование решения системы (1.8)–(1.10). Рассмотрим банахово пространство $\mathcal{B}$ непрерывных с вероятностью единица случайных процессов

$$\zeta(t,\varepsilon)=\{\eta(t,\varepsilon),\gamma^m(t,\varepsilon), m=1,2,...\},$$

измеримых при каждом t относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_t$ и таких, что $\sup_t M\left(\left|\zeta(t,\varepsilon)\right|^2\right)<\infty$.

Введем в пространстве $\mathcal{B}$ норму

$$\left\|\zeta(t,\varepsilon)\right\|=\sqrt{\sup_t M\left(\left|\zeta(t,\varepsilon)\right|^2\right)},$$

где

$$\left|\zeta(t,\varepsilon)\right|^2=\max\left\{\left|\eta(t,\varepsilon)\right|^2,\max_m\left|\gamma^m(t,\varepsilon)\right|^2, m=1,2,...\right\}.$$

Введем в рассмотрение операторы P_i, $i=0,1,2,...$

$$P_m\zeta(t,\varepsilon)=\gamma^m(0,\varepsilon)+$$

$$+\int_0^t\left[\mathcal{L}_m\gamma^m(\tau,\varepsilon)+F_m(\tau,\gamma(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\eta(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)\right]d\tau+$$

$$+\int_0^t\Phi_m(\tau,\gamma(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\eta(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)dw(\tau),$$

$$m=1,2,...;$$

$$P_0\zeta(t,\varepsilon)=V(t)H(0)+$$

$$+\sum_{l=1}^{R}\int_{-\Delta_l}^{0}V(t-\Delta_l-\tau)A_lH(\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^t V(t-\tau)f(\tau,\gamma(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\eta(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)d\tau+$$

$$+\int_0^t V(t-\tau)\,g(\tau,\gamma(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\eta(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)d\xi(\tau).$$

Используя условие 3) теоремы, получаем

$$M\left|P_m\zeta(t,\varepsilon)\right|^2 \le 4M\left|\gamma^m(0,\varepsilon)\right|^2 +$$

$$+4K_{3m}^2 TM\int_0^t \left|\gamma^m(\tau,\varepsilon)\right|^2 d\tau +$$

$$+4K_{4m}(T+1)M\int_0^t \left(1+\left|\gamma(\tau-\Delta_r,\varepsilon)\right|^2+\left|\eta(\tau-\Delta_r,\varepsilon)\right|^2\right)d\tau \le$$

$$\le 4M\left|\gamma^m(0,\varepsilon)\right|^2 + L_{4m}\left(1+\left\|\zeta(t,\varepsilon\right\|^2\right),\ m=1,2,....$$

Воспользовавшись условиями 3), 4), 5) теоремы, для оператора P_0 имеем

$$M\left|P_0\zeta(t,\varepsilon)\right|^2 \le L_5 + L_6\left(1+\left\|\zeta(t,\varepsilon\right\|^2\right).$$

Таким образом, операторы P_i, $i=0,1,2,...$ действуют из $\mathcal{B}$ в $\mathcal{B}$. Далее имеем

$$M\left|P_m\zeta_1(t,\varepsilon)-P_m\zeta_2(t,\varepsilon)\right|^2 \le$$

$$\le 2T\int_0^t M\left|F_m(\tau,\gamma_1(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\eta_1(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)-\right.$$

$$\left.-F_m(\tau,\gamma_2(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\eta_2(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)\right|^2 d\tau +$$

$$+2\int_0^t M\left|\Phi_m(\tau,\gamma_1(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\eta_1(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)-\right.$$

$$\left.-\Phi_m(\tau,\gamma_2(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\eta_2(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)\right|^2 d\tau \le$$

$$\le L_{7m}T\left\|\zeta_1(t,\varepsilon)-\zeta_2(t,\varepsilon)\right\|^2.$$

Для оператора P_0 получаем следующее неравенство

$$M\left|P_0\zeta_1(t,\varepsilon)-P_0\zeta_2(t,\varepsilon)\right|^2 \le$$

$$\le L_8 T\left\|\zeta_1(t,\varepsilon)-\zeta_2(t,\varepsilon)\right\|^2.$$

Следовательно, операторы P_0 и P_m непрерывны на $\mathcal{B}$. Введем понятие степени операторов P_0 и P_m следующим образом

$$P_i^2\zeta(t,\varepsilon) = P_i\left[P_i\zeta(t,\varepsilon)\right],\ i=1,2,....$$

Для операторов P_i, $i=0,1,2,...$ несложно получить следующие оценки

$$M\left|P_i^n\zeta_1(t,\varepsilon)-P_i^n\zeta_2(t,\varepsilon)\right|^2 \le$$

$$\le \frac{L_9^n T^n}{n!}\left\|\zeta_1(t,\varepsilon)-\zeta_2(t,\varepsilon)\right\|^2,$$

где $L_9 = \max\{L_8, \max_m L_{7m}\}$.

Следовательно, для каждого $\zeta(t,\varepsilon)$ из $\mathcal{B}$

$$\left\|P_i^{n+1}\zeta(t,\varepsilon)-P_i^n\zeta(t,\varepsilon)\right\|^2 \le$$

$$\le \frac{L_9^n T^n}{n!}\left\|P_i\zeta(t,\varepsilon)-\zeta(t,\varepsilon)\right\|^2.$$

Последнее неравенство означает сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\|P_i^{n+1}\zeta(t,\varepsilon)-P_i^n\zeta(t,\varepsilon)\right\|,\ i=0,1,2,...,$$

и, следовательно, с вероятностью единица существует предел $\omega(t,\varepsilon)$ процессов $P_i^n\zeta(t,\varepsilon)$, $i=0,1,2,...$ при $n\to\infty$. Из непрерывности P_i вытекает, что

$$P_i\left[P_i^n\zeta(t,\varepsilon)\right]\to P_i\omega(t,\varepsilon),\ i=0,1,2,....$$

С другой стороны

$$P_i\left[P_i^n\zeta(t,\varepsilon)\right]=P_i^n\zeta(t,\varepsilon)\to\omega(t,\varepsilon).$$

Таким образом, получаем

$$\left\|P_i\omega(t,\varepsilon)-\omega(t,\varepsilon)\right\|=0,$$

а это в свою очередь означает, что $\omega(t,\varepsilon)$ – решение системы (1.8)–(1.10).

Из условий

$$\sup_t M\left|\zeta(t,\varepsilon)\right|^2<\infty,$$

$$P_i^n\zeta(t,\varepsilon)\to\omega(t,\varepsilon)\ \text{при}\ n\to\infty$$

следует, что

$$\sup_t M\left|\omega(t,\varepsilon)\right|^2<\infty.$$

Следовательно, мы доказали, что при выполнении условий теоремы существует единственное непрерывное и ограниченное решение системы (1.8)–(1.10) с точностью до стохастической эквивалентности. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *To*, *C.W.S.* Nonlinear random vibration. Analytical techniques and applications / C.W.S. To. – CRC Press, 2012. – 292 p.

2. *Митропольский*, *Ю.А.* Нелинейные колебания в системах произвольного порядка / Ю.А. Митропольский, Нгуен Ван Дао, Нгуен Донг Ань. – Киев: Навукова думка, 1992. – 344 с.

3. *Рубаник*, *В.П.* Колебания сложных квазилинейных систем с запаздыванием / В.П. Рубаник. – Мн.: Изд-во «Университетское», 1985. – 143 с.

4. *Акири*, *И.К.* О существовании, единственности и непрерывной зависимости от параметра решений интегро-дифференциальных уравнений в частных производных / И.К. Акири, В.Г. Коломиец. – Киев: Ин-т математики АН УССР, препринт №86.3, 1986. – 19 с.

5. *Ватанабэ*, *С.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы / С. Ватанабэ, Н. Икэда. – М.: Наука, 1986. – 448 с.

6. *Гихман*, *И.И.* Теория случайных процессов. Т. 3 / И.И. Гихман, А.В. Скороход. – М.: Наука, 1975. – 496 с.

Поступила в редакцию 03.04.17.