

## ВОЗБУЖДЕНИЕ ВРМБ ИЗЛУЧЕНИЕМ С ДИСКРЕТНЫМ СПЕКТРОМ. II

Ф. А. Королев, З. А. Баскакова и В. И. Одинцов

Теоретически рассмотрено обратное вынужденное рассеяние Мандельштама—Бриллюэна (ВРМБ) при наличии в возбуждающем излучении двух дискретных спектральных компонент. Установлено, что после превышения некоторой «критической» интенсивности накачки происходит возрастание коэффициента усиления ВРМБ, обусловленное эффективным параметрическим взаимодействием компонент.

В [1] были найдены интенсивности компонент обратного вынужденного рассеяния Мандельштама—Бриллюэна (ВРМБ), возбуждаемого излучением с дискретным спектром, для случая малой длины рассеивающей среды. Данная работа является продолжением [1] и посвящена теоретическому рассмотрению случая произвольной длины рассеивающей среды. Во избежание значительных математических трудностей предполагается, что возбуждающее излучение состоит всего из двух монохроматических компонент, а рассеяние является слабым. Расстояние между компонентами считается существенно превышающим ширину спектральной линии теплового рассеяния Мандельштама—Бриллюэна. Детальное рассмотрение проводится для двух частных случаев, когда интенсивности возбуждающих компонент одинаковы и когда интенсивность одной из них много больше, чем другой.

### Случай равных интенсивностей возбуждающих компонент

При наличии в спектре возбуждающего излучения только двух монохроматических компонент уравнения для медленно меняющихся комплексных амплитуд поля рассеянного излучения в среде могут быть записаны в виде [1].

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}_{S1}(r, z)}{dz} &= -\frac{c\mu}{16\pi} b(r) (1 - ir) \mathcal{E}_{L1} [\mathcal{E}_{L1}^* \mathcal{E}_{S1}(r, z) + \mathcal{E}_{L2}^* \mathcal{E}_{S2}(r, z) e^{-i\beta z}], \\ \frac{d\mathcal{E}_{S2}(r, z)}{dz} &= -\frac{c\mu}{16\pi} b(r) (1 - ir) \mathcal{E}_{L2} [\mathcal{E}_{L1}^* \mathcal{E}_{S1}(r, z) e^{i\beta z} + \mathcal{E}_{L2}^* \mathcal{E}_{S2}(r, z)]. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь индекс  $L$  означает возбуждающее поле, распространяющееся в положительном направлении оси  $z$ , индекс  $S$  — поле обратного ВРМБ;  $\mathcal{E}_{L1}$ ,  $\mathcal{E}_{L2}$  — комплексные амплитуды монохроматических компонент возбуждающего излучения, которые в рассматриваемом случае слабого рассеяния не зависят от  $z$ ,  $\beta = 4\pi(\nu_{L1} - \nu_{L2})/u$ , где  $\nu_{L1}$ ,  $\nu_{L2}$  — частоты возбуждающего излучения,  $u$  — групповая скорость света в среде;  $\mathcal{E}_{Sj}(r, z) = \mathcal{E}_S [\nu_{Sj}^0 + r(\Delta\nu/2)]$ , где  $\Delta\nu$  — ширина спектральной линии теплового рассеяния Мандельштама—Бриллюэна,  $\nu_{Sj}^0 = \nu_{Lj} [1 - 2(\hat{v}/v)]$  — частота, соответствующая нулевой расстройке волновых векторов [2],  $v$ ,  $\hat{v}$  — фазовые скорости света и гиперзвука в среде,  $j=1, 2$ ;  $c$  — скорость света в вакууме;  $\mu$  — показатель преломления среды;  $b(r) = b/(1+r^2)$ ,  $b=b(0)$  —



коэффициент усиления для центральной частоты линии ВРМБ при возбуждении одной монохроматической компонентой, рассчитанный на единичную интенсивность накачки. Поскольку в (1) не учтены волны давления, распространяющиеся в отрицательном направлении оси  $z$ , то в соответствии с [1] будем считать, что разность частот  $|\Delta\nu_L| = |\nu_{L1} - \nu_{L2}|$  не совпадает с удвоенной величиной частотного сдвига обратного ВРМБ. Кроме того, предполагается, что  $|\Delta\nu_L| \ll (1/4)(v/\partial)\Delta\nu$  [1].

Будем рассматривать систему уравнений (1) в области  $z \leq 0$ , задавая граничные значения  $\mathcal{E}_{S1}(r, 0) = \mathcal{E}_{S1}^0(r)$ ,  $\mathcal{E}_{S2}(r, 0) = \mathcal{E}_{S2}^0(r)$  и считая, что в указанной области тепловым рассеянием можно пренебречь. При заданных  $\mathcal{E}_{L1}$ ,  $\mathcal{E}_{L2}$  будем рассматривать только такие значения  $z$ , при которых рассеяние остается слабым.

Далее перейдем к рассмотрению случая, когда интенсивности компонент возбуждающего излучения одинаковы  $I_{L1} = I_{L2} = I'_L$ . Поскольку учет

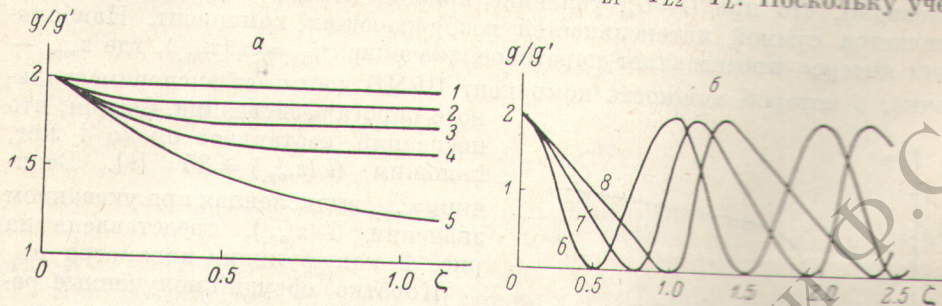


Рис. 1. Зависимость отношения  $g/g' = 1 + \cos \chi$  от  $\zeta$  для различных значений  $a$ . Значения  $a$ : 1 - 4, 2 - 2, 3 - 3/2, 4 - 5/4, 5 - 1, 6 - 0, 7 - 1 - 23.

фазового сдвига между  $\mathcal{E}_{L1}$  и  $\mathcal{E}_{L2}$  не вносит принципиальных изменений, положим  $\mathcal{E}_{L1} = \mathcal{E}_{L2}$ . Пусть выходное окно кюветы расположено в точке  $z_F > 0$ . Если  $I'_L$  достаточно велико, то точку  $z=0$  можно выбрать достаточно близко к выходному окну,<sup>1</sup> так что окажется  $z_F \ll l_c = u/2|\Delta\nu_L|$ , где  $l_c$  — длина когерентности, введенная в [1]. В этом случае, согласно [1], можно положить  $\mathcal{E}_{S1}^0(r) = \mathcal{E}_{S2}^0(r)$ . В дальнейшем будем использовать это граничное условие при любых  $I'_L$ , имея в виду, что в случае малых  $I'_L$ , когда  $z_F \geq l_c$ , оно носит сугубо частный характер.

Для упрощения расчета ограничимся рассмотрением случая  $r=0$ . Положим

$$\mathcal{E}_{S1}(0, z) = |\mathcal{E}_{S1}(0, z)| e^{i\varphi_{S1}}, \quad \mathcal{E}_{S2}(0, z) = |\mathcal{E}_{S2}(0, z)| e^{i\varphi_{S2}}.$$

Тогда из (1), в соответствии с принятым граничным условием, следует

$$|\mathcal{E}_{S1}(0, z)| = |\mathcal{E}_{S2}(0, z)| = |\mathcal{E}'_S(0, z)| \quad \text{и} \quad \varphi_{S1} + \varphi_{S2} = \text{const}.$$

Обозначая  $\varphi_{S1} - \varphi_{S2} = \psi$ ,  $\psi + \beta z = \chi$ , получим уравнения

$$\frac{d|\mathcal{E}'_S|}{dz} = -\frac{1}{2}g'|\mathcal{E}'_S|(1 + \cos \chi) = -\frac{1}{2}g|\mathcal{E}'_S|, \quad (2)$$

$$\frac{d\chi}{dz} = g' \sin \chi + \beta. \quad (3)$$

где  $g' = bI'_L$  — коэффициент усиления при возбуждении одной компонентой с интенсивностью  $I'_L$ ;  $g = g'(1 + \cos \chi)$ .

Уравнение (3) с граничным условием  $\chi(0) = 0$  интегрируется в элементарных функциях, причем вид решения существенно зависит от характерного параметра  $a = g'/|\beta|$ . На рис. 1 для различных значений  $a$  дано отношение  $g/g' = 1 + \cos \chi$ , представленное как функция безразмерной координаты  $\zeta = -z/l_c$ .

<sup>1</sup> В соответствии со сказанным выше этот выбор определяется требованием, чтобы при  $z=0$  вкладом теплового рассеяния можно было пренебречь.



Для спектральной плотности интенсивности компонент ВРМБ при  $r=0$   $J_{S1}(0, z) = J_{S2}(0, z) = J'_S(0, z)$  из (2) следует выражение

$$J'_S(0, z) = J'_S(0, 0) e^{G(z)}, \quad (4)$$

где

$$G(z) = \int_z^0 g(z') dz'. \quad (5)$$

Обозначим  $\eta(z) = G(z)/G_m(z)$ , где  $G_m(z) = -2g'z$  — максимальное (предельное) значение  $G$ , достигаемое при  $a \rightarrow \infty$ , когда  $\cos \chi(z) = 1$  (рис. 1). Очевидно, что при  $G = G_m$  усиление каждой компоненты ВРМБ осуществляется суммой интенсивностей возбуждающих компонент. Наибольший интерес представляет пороговое значение  $\eta_{\text{пор.}} = \eta(z_{\text{пор.}})$ , где  $z_{\text{пор.}}$  — точка, в которой мощность компонент ВРМБ достигает экспериментального порога регистрации. Считая, что последний составляет около 1 квт, положим  $G(z_{\text{пор.}}) = 25$  [1]. Величина  $\eta_{\text{пор.}}$ , вычисленная при указанном значении  $G(z_{\text{пор.}})$ , представлена на рис. 2 как функция параметра  $a$ .

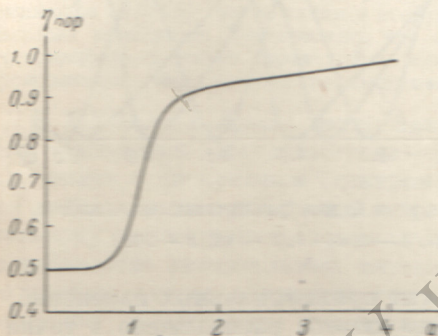


Рис. 2. Зависимость  $\eta_{\text{пор.}}$  от  $a$ .

Коротко обсудим полученные результаты. При  $a \ll 1$  фазы  $\varphi_{S1}$ ,  $\varphi_{S2}$ , согласно (3), мало изменяются на длине когерентности  $l_c = 2\pi/|\beta|$ . Волны давления, возбуждаемые отдельными парами спектральных компонент  $\mathcal{E}_{Lj}$ ,  $\mathcal{E}_{Sj}$  ( $j=1, 2$ ), при изменении  $z$  периодически «выходят из синхронизма» и начинают гасить друг друга.

В соответствии с рис. 2 при  $a \ll 1$ ,  $\eta_{\text{пор.}} \approx 0.5$ , что эквивалентно усилению каждой компоненты ВРМБ только «своей» возбуждающей компонентой. Вклад параметрического взаимодействия в усиление в среднем по  $z$  оказывается близок к нулю. При увеличении интенсивности возбуждающего излучения изменение фаз  $\varphi_{S1}$ ,  $\varphi_{S2}$  на длине  $l_c$  становится значительным, однако до тех пор, пока  $a$  остается меньше единицы, оно осуществляется так, что сохраняется периодический характер изменения  $\cos \chi$  с  $z$  (рис. 1, а). В результате параметрическое взаимодействие по-прежнему не вносит существенного вклада в усиление и значение  $\eta_{\text{пор.}}$  остается близким к 0.5. Наконец, в области  $a > 1$  происходящая при усилении «подстройка» фаз стоксовых компонент эффективно противодействует выходу пар  $\mathcal{E}_{Lj}$ ,  $\mathcal{E}_{Sj}$  ( $j=1, 2$ ) из синхронизма в отношении возбуждения волн давления. Периодическое изменение  $\cos \chi$  сменяется монотонным (рис. 1, б) и параметрическое взаимодействие во всей области изменения  $z$  вносит положительный вклад в усиление компонент ВРМБ. Из рис. 2 видно, что уже при сравнительно небольшом превышении «критического» значения  $a=1$   $\eta_{\text{пор.}}$  становится близко к единице. При этом усиление каждой компоненты ВРМБ определяется суммой интенсивностей возбуждающих компонент и процесс рассеяния развивается так же, как и в случае малой длины среды  $l \ll l_c$ , рассмотренном в [1]. Очевидно, что при изменении интенсивности накачки вблизи «критического» значения интенсивность ВРМБ должна изменяться особенно резко ввиду быстрого изменения  $\eta$ .

Анализ решений (3) при других граничных условиях  $\chi(0) \neq 0$  показывает, что приведенные выше результаты существенно не изменяются. Отметим, что условие  $z_F \ll l_c$ , при котором  $\chi(0) = 0$ , заведомо выполняется для  $a > 1$ .



В заключение приведем численную оценку «критической» интенсивности  $I'_{L \text{ кр.}}$ , соответствующей значению  $a=1$ . При

$$\frac{|\Delta\nu_L|}{c} = 1 \text{ см}^{-1}, \quad u = 2 \cdot 10^{10} \text{ см/сек.}, \quad b = 0.15 \text{ Мвт}^{-1} \text{ см (CS}_2\text{)},$$

$$I'_{L \text{ кр.}} = \frac{4\pi |\Delta\nu_L|}{bu} = 125 \text{ Мвт/см}^2.$$

Случай  $I_{L2} \ll I_{L1}$

Будем исходить из приближенных уравнений, которые следуют из (1) при  $|\mathcal{E}_{L2}| \ll |\mathcal{E}_{L1}|$

$$\frac{d\mathcal{E}_{S1}(r, z)}{dz} = -\frac{1}{2} b(r) (1 - ir) I_{L1} \mathcal{E}_{S1}(r, z), \quad (6)$$

$$\frac{d\mathcal{E}_{S2}(r, z)}{dz} = -\frac{1}{2} b(r) (1 - ir) I_{L1} \frac{\mathcal{E}_{L2}}{\mathcal{E}_{L1}} \mathcal{E}_{S1}(r, z) e^{i\beta z}. \quad (7)$$

Их решение имеет вид

$$\mathcal{E}_{S1}(r, z) = \mathcal{E}_{S1}^0(r) e^{-Kz}, \quad (8)$$

$$\mathcal{E}_{S2}(r, z) = \mathcal{E}_{S2}^0(r) + \mathcal{E}_{S1}^0(r) \frac{\mathcal{E}_{L2} K}{\mathcal{E}_{L1} (K - i\beta)} [e^{(i\beta - K)z} - 1], \quad (9)$$

где  $K = b(r) I_{L1} (1 - ir)/2$ .

При достаточном удалении от точки  $z=0$ , когда  $\mathcal{E}_{S2}(r, z) \gg \mathcal{E}_{S2}^0(r)$ , соотношения (8) и (9) дают

$$\mathcal{E}_{S2}(r, z) = \mathcal{E}_{S1}(r, z) \frac{\mathcal{E}_{L2}}{\mathcal{E}_{L1}} \frac{1 - ir}{1 - i \left[ r + \frac{1}{h(r)} \right]} e^{i\beta z}, \quad (10)$$

где <sup>2</sup>

$$h(r) = b(r) I_{L1}/23.$$

Из (10) следует соотношение для спектральных плотностей интенсивности

$$\frac{J_{S2}(r, z)}{J_{S1}(r, z)} = \frac{I_{L2}}{I_{L1}} \xi(r, h), \quad (11)$$

где

$$\xi(r, h) = \frac{1 + r^2}{1 + \left[ r + \frac{1}{h(r)} \right]^2} \quad (12)$$

Из (8), (9) легко видеть, что коэффициент усиления второй компоненты ВРМБ равен коэффициенту усиления первой компоненты и определяется величиной  $b(r) I_{L1}$ . Относительная интенсивность этих компонент не изменяется с  $z$ , но в соответствии с (11) зависит от  $\xi$ . Поскольку ширина спектральных компонент ВРМБ приблизительно в 5 раз меньше ширины линии теплового рассеяния  $\Delta\nu$  [1, 2], то  $r$  значительно меньше единицы и, согласно (12), не оказывает существенного влияния на величину  $\xi$ . Поэтому рассмотрим  $\xi$  при  $r=0$ . Обозначим  $h(0) = h$ . Если интенсивность излучения накачки мала, то  $|h| \ll 1$  и  $\xi$  близко к нулю. При достаточно большой интенсивности накачки, когда  $|h|$  существенно превышает единицу,  $\xi$  становится близко к единице и, согласно (11), интенсивности компонент ВРМБ оказываются пропорциональными интенсивностям соответствующих возбуждающих компонент. Это значит, что при достаточно большой интенсивности накачки рассеяние протекает так же, как и в случае малой длины среды [1].

<sup>2</sup> Отметим, что поскольку в рассматриваемом здесь случае  $I_{L2} \ll I_{L1}$ , то  $|h(0)|$  и введенный выше параметр  $a$  одинаковым образом выражаются через сумму интенсивностей  $I_L = I_{L1} + I_{L2}$ .



Вследствие зависимости  $\xi$  от  $r$  спектральное распределение  $J_{S2}(r, z)$  несколько отличается от спектрального распределения  $J_{S1}(r, z)$ . Последнее имеет вид гауссовой кривой с максимумом при  $r=0$  и с шириной

$$\delta\nu = \Delta\nu \sqrt{\frac{\ln 2}{G}},$$

где  $G = bI_{L1}(z_F - z)$  определяет усиление на длине среды от выходного окна кюветы до рассматриваемой точки  $z$  [1]. Максимум спектрального распределения  $J_{S2}(r, z)$  соответствует значению

$$r_{\max} \approx - \frac{1}{hG + \frac{1}{h}(G + \ln 2 - 1)}. \quad (13)$$

Смещение максимума относительно  $\nu_{S2}$  достигает наибольшей величины при  $h = \pm 1$ . В этом случае, согласно (13),  $r_{\max} \approx 1/2G$ , что при  $G \sim 25$  дает величину смещения  $\sim 0.06 \delta\nu$ .

### Заключительные замечания

1. В настоящей работе, как и в [1], спектральные компоненты возбуждающего излучения считались монохроматическими, что позволило провести законченное рассмотрение вынужденного рассеяния в рамках спектрального метода. Однако основные выводы этих работ могут быть, по-видимому, использованы и в том случае, когда отдельные спектральные компоненты возбуждающего излучения имеют конечную, но достаточно малую ширину  $\delta\nu_L \ll \Delta\nu$ . Рассмотрим этот вопрос несколько подробнее.

Начнем со случая, когда возбуждающее излучение состоит из одной спектральной компоненты, ширина  $\delta\nu_L$ , и по своим статистическим свойствам представляет собой стационарный гауссов случайный процесс (тепловое излучение) [3, 4]. Поскольку  $\Delta\nu/c \sim 10^{-3} \text{ см}^{-1}$ , то при  $\delta\nu_L \ll \Delta\nu$  длина когерентности, соответствующая спектральной ширине  $\delta\nu_L$ , оказывается много больше, чем обычно используемые длины рассеивающей среды. Это означает, что в пределах последней можно пренебречь изменением комплексной огибающей поля накачки, обусловленным его статистическими свойствами. Вследствие того же условия  $\delta\nu_L \ll \Delta\nu$  характерное время изменения огибающей оказывается значительно больше, чем время релаксации среды, определяемое временем затухания гиперзвуковых волн [2]. В этих условиях приближенно можно считать, что в каждый момент времени рассеяние во всех точках среды происходит так же, как при монохроматической накачке с амплитудой, определяемой огибающей реального поля в рассматриваемый момент времени. При этом мгновенная мощность рассеянного излучения определяется мгновенной интенсивностью накачки. Если регистрируемой величиной является средняя мощность рассеянного излучения  $P_S$ , то вследствие флуктуаций мгновенной мощности накачки пороговая средняя мощность последней  $P_{L \text{ пор.}}$  оказывается значительно ниже, чем пороговая мощность при монохроматической накачке  $\tilde{P}_{L \text{ пор.}}$ . В типичных экспериментальных условиях для приближенной оценки можно использовать соотношение

$$P_{L \text{ пор.}} = \frac{P_L^*}{\ln \frac{P_L^*}{P_{S \text{ пор.}}}}; \quad \tilde{P}_{L \text{ пор.}} = \left(1 - \frac{1}{G^* \ln \frac{P_L^*}{P_{S \text{ пор.}}}}\right) \ln \frac{P_L^*}{P_{S \text{ пор.}}}, \quad (14)$$

где  $G^*$ ,  $P_L^*$  — показатель экспоненциального усиления и мощность накачки, соответствующие началу области сильного рассеяния;  $P_{S \text{ пор.}}$  — средняя мощность ВРМБ, равная экспериментальному порогу регистрации.<sup>3</sup>

<sup>3</sup> В рассматриваемом случае теплового излучения накачки основной вклад в  $P_S$  при  $P_S \ll P_L^*$  вносит сильное рассеяние в максимумах мгновенной мощности накачки.



При  $P_{\text{пор.}} = 1$  квт,  $P_L^* = 1$  Мвт,  $G^* = 30$  (14) дает  $\tilde{P}_{L\text{пор.}}/P_{L\text{пор.}} = 5.3$ . В случае нескольких возбуждающих компонент с ширинами  $\delta\nu_{Lj} \ll \ll \Delta\nu$ , ( $j=1, 2, \dots, n$ ) изложенные выше соображения относительно характера пространственного и временного изменения огибающей применимы к полю каждой из этих компонент. Поэтому можно полагать, что результаты настоящей работы и работы [1] приближенно останутся справедливыми применительно к мгновенным интенсивностям возбуждающих и рассеянных компонент. Если число спектральных компонент накачки  $n \gg 1$

и приближенно можно положить  $\sum_{j=1}^n P_{Lj}(t) \approx P_L$ , где  $P_{Lj}(t)$  — мгновенная мощность  $j$ -й компоненты,  $P_L$  — средняя мощность накачки в целом, то результаты [1] будут справедливыми также и для средних мощностей компонент возбуждающего и рассеянного излучения.

2. Вследствие аналогичного вида исходных уравнений для ВРМБ и вынужденного комбинационного рассеяния (ВКР) результаты, полученные в настоящей работе и в [1], во многом применимы и к явлению ВКР. При этом для ВКР, распространяющегося в направлении возбуждающего пучка, характерная длина  $l_c$  будет определяться дисперсией групповых скоростей.

3. В [5] для шумового спектра накачки было найдено «критическое» значение спектральной плотности интенсивности  $J_{\text{кр.}}(\nu) = 8/bu$ , при подходе к которому коэффициент усиления ВРМБ резко возрастает и далее определяется всей средней интенсивностью накачки. В настоящей работе при «критическом» значении  $a = 1$ ,  $J_{\text{кр.}}(\nu) = V_{\text{кр.}}/|\Delta\nu_L| = 4\pi/bu$ , что близко к значению, полученному в [5].

Основываясь на результатах [5], можно полагать, что и при наличии в спектре накачки многих дискретных компонент после превышения некоторой «критической» мощности усиление компонент ВРМБ будет определяться средней интенсивностью накачки независимо от длины рассеивающей среды. В этом случае интенсивности отдельных компонент ВРМБ, по-видимому, должны быть пропорциональны интенсивностям соответствующих возбуждающих компонент, подобно тому, как это имеет место при малой длине среды [1]. Такое предположение согласуется с результатами эксперимента [1], в котором спектральная плотность возбуждающего излучения значительно превосходила приведенное выше «критическое» значение.

## Литература

- [1] Ф. А. Королев, З. А. Баскакова, В. И. Одинцов. Опт. и спектр., 39, 60, 1975.
- [2] В. С. Старунов, И. Л. Фабелинский. Усп. физ. наук, 98, 441, 1969.
- [3] С. М. Рытов. Введение в статистическую радиофизику. Изд. «Наука», М., 1966.
- [4] С. А. Ахманов, А. С. Чиркин. Статистические явления в нелинейной оптике. Изд. МГУ. М., 1971.
- [5] С. А. Ахманов, Ю. Е. Дьяков, А. С. Чиркин. Письма в ЖЭТФ, 13, 724, 1971.

Поступило в Редакцию 19 июля 1973 г.