С. Ф. Каморников, Об одной задаче Кегеля, *Матем. заметки*, 1992, том 51, выпуск 5, 51–56

Математические заметки

том 51 выпуск 5 май 1992

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ КЕГЕЛЯ

С. Ф. Каморников

Введение. Пусть $\mathfrak{C}$ — класс конечных групп, замкнутый относительно гомоморфных образов, подгрупп и расширений. Следуя [1], подгруппу H конечной группы G назовем $\mathfrak{C}$-достижимой в G, если существует такая цепь $G=G_0\supseteq G_1\supseteq \ldots \supseteq G_t=H$, что для любого $i=1, 2, \ldots, t$ подгруппа G_i либо нормальна в G_{i-1}, либо $G_{i-1}/(G_i)_{G_{i-1}}$ принадлежит $\mathfrak{C}$.

В связи с изучением свойства $\mathfrak{C}$-достижимых подгрупп Кегелем в 1978 г. [1] была предложена следующая задача: верно ли, что $\mathfrak{C}$-достижимые подгруппы H и K конечной группы G перестановочны, если $H=H'$ и $H=H^{\mathfrak{C}}$. История этой задачи восходит к классической теореме Виландта [2] о том, что в конечной группе субнормальная подгруппа, совпадающая с коммутантом, перестановочна с любой другой субнормальной подгруппой. Эта теорема дает решение задачи Кегеля в частном случае, когда $\mathfrak{C}$ — класс единичных групп.

Полное решение указанной задачи Кегеля приводится в настоящей работе. В основе решения лежит подход, примененный нами ранее в [3] при решении следующей проблемы Л. А. Шеметкова (см. [4, 5]): верно ли, что $H^{\mathfrak{F}}K = KH^{\mathfrak{F}}$ для любых субнормальных подгрупп H и K конечной группы G и для любой разрешимой локальной формации $\mathfrak{F}$, содержащей формацию $\mathfrak{N}$ всех конечных нильпотентных групп. В [3] для формации $\mathfrak{F}$ всех p-нильпотентных групп мы показываем, что $\mathfrak{F}$-корадикал порождения двух субнормальных подгрупп равен порождению $\mathfrak{F}$-корадикалов этих подгрупп, а затем редуцируем общий случай к формации p-нильпотентных групп. Подобным образом мы поступаем и здесь: в основе перестановочности $\mathfrak{C}$-достижимых подгрупп H и K в задаче Кегеля лежит тот факт, что $\mathfrak{C}$-корадикал порождения $\langle H, K\rangle$ равен порождению $\mathfrak{C}$-корадикалов подгрупп H и K.

Терминология. В работе рассматриваются только конечные группы. Если $\mathfrak{X}$ — класс простых групп, то через $C(\mathfrak{X})$ обозначается класс всех тех групп, у которых каждый композиционный фактор содержится в $\mathfrak{X}$. По определению класс групп — это абстрактный класс, т. е. содержащий с каждой своей группой и все ей изоморфные. Нетрудно заметить, что $C(\mathfrak{X})$ является радикальной формацией (к числу простых групп мы причисляем и группы простого порядка; кроме того, мы придерживаемся соглашения, что множество композиционных факторов единичной группы пусто).

Если H — субнормальная подгруппа группы G и $G=G_0\supset G_1\supset \ldots$ $\ldots \supset G_t=H$ — субнормальная цепь с простыми факторами, то через $\mathscr{K}(G-H)$ обозначается класс всех тех групп, которые изоморфны факторам этой цепи. Если $\mathfrak{X}$ — некоторый класс конечных групп, то через $\mathrm{Sim}\,\mathfrak{X}$ мы обозначим класс всех простых групп из $\mathfrak{X}$.

В дальнейшем через $\mathfrak{C}$ обозначается класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов, подгрупп и расширений. Простая проверка показывает, что $\mathfrak{C}=C(\mathrm{Sim}\,\mathfrak{C})$. Поэтому $\mathfrak{C}$ — радикальная локальная формация. Значит, в каждой конечной группе G имеются две характеристические подгруппы: $\mathfrak{C}$-корадикал $G^{\mathfrak{C}}$ (наименьшая нормальная подгруппа группы G, факторгруппа по которой принадлежит $\mathfrak{C}$) и $\mathfrak{C}$-радикал $G_{\mathfrak{C}}$ (наибольшая нормальная $\mathfrak{C}$-подгруппа группы G).

Все другие используемые определения и обозначения общеприняты. Их можно найти в [4].

Решение задачи Кегеля. Приведем некоторые свойства $\mathfrak{C}$-достижимых подгрупп конечной группы.

ЛЕММА 1. *Если подгруппа H $\mathfrak{C}$-достижима в G, то подгруппа $H^{\mathfrak{C}}$ субнормальна в G.*

Доказательство. Так как подгруппа H $\mathfrak{C}$-достижима в G, то существует цепь подгрупп $G=G_0\supseteq G_1\supseteq \ldots \supseteq G_t=H$ такая, что для любого $i=1, 2, \ldots, t$ подгруппа G_i либо нормальна в G_{i-1}, либо $G_{i-1}/(G_i)_{G_{i-1}}\in\mathfrak{C}$.

Пусть G_i нормальна в G_{i-1}. Так как формация $\mathfrak{C}$ наследственна, то $G_iG_{i-1}^{\mathfrak{C}}/G_{i-1}^{\mathfrak{C}}\in\mathfrak{C}$. Теперь из $G_iG_{i-1}^{\mathfrak{C}}/G_{i-1}^{\mathfrak{C}}\simeq G_i/G_i\cap G_{i-1}^{\mathfrak{C}}$ следует, что $G_i^{\mathfrak{C}}\subseteq G_{i-1}^{\mathfrak{C}}$. Подгруппа $G_i^{\mathfrak{C}}$ характеристична в G_i. Поэтому из нормальности G_i в G_{i-1} следует, что $G_i^{\mathfrak{C}}$ нормальна в G_{i-1}. Но тогда $G_i^{\mathfrak{C}}$ — нормальная подгруппа $G_{i-1}^{\mathfrak{C}}$.

Пусть $G_{i-1}/(G_i)_{G_{i-1}}\in\mathfrak{C}$. Это означает, что $G_{i-1}^{\mathfrak{C}}\subseteq G_i$. Как и выше, показывается, что $G_i^{\mathfrak{C}}\subseteq G_{i-1}^{\mathfrak{C}}$. Поэтому $G_i^{\mathfrak{C}}$ — нормальная подгруппа $G_{i-1}^{\mathfrak{C}}$.

Рассмотрим теперь цепь подгрупп

$$G=G_0\supseteq G_0^{\mathfrak{C}}\supseteq G_1^{\mathfrak{C}}\supseteq\ldots\supseteq G_t^{\mathfrak{C}}=H^{\mathfrak{C}}.$$

В этой цепи подгруппа $G_i^{\mathfrak{C}}$ нормальна в $G_{i-1}^{\mathfrak{C}}$ для любого $i=1, 2, \ldots, t$. А так как $G_0^{\mathfrak{C}}=G^{\mathfrak{C}}$ нормальна в G, то $H^{\mathfrak{C}}$ — субнормальная подгруппа группы G. Лемма доказана.

Следствие. *Если $\mathfrak{C}$-достижимая подгруппа H группы G совпадает со своим $\mathfrak{C}$-корадикалом, то H субнормальна в G.*

ЛЕММА 2. *Пусть H — $\mathfrak{C}$-достижимая подгруппа группы G. Если K — нормальная подгруппа группы G, то $(HK)^{\mathfrak{C}}=H^{\mathfrak{C}}K^{\mathfrak{C}}$.*

Доказательство. Применим индукцию по порядку группы G. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой лемма не верна. Ввиду леммы 1 из [1] подгруппы H и K $\mathfrak{C}$-достижимы в HK. Поэтому из выбора группы G следует, что $HK=G$.

Пусть $K^{\mathfrak{C}}\neq 1$. Возьмем в этом случае в $K^{\mathfrak{C}}$ минимальную нормальную подгруппу L группы G. По лемме 2 из [1] HL/L $\mathfrak{C}$-достижима в G/L. Так как $|G/L|<|G|$, то ввиду предположения индукции имеем

$$(HL/L)^{\mathfrak{C}}(K/L)^{\mathfrak{C}}=(HK/L)^{\mathfrak{C}}.$$

Отсюда ввиду леммы 1.2 из [4] получаем, что $H^{\mathfrak{C}}K^{\mathfrak{C}}L=(HK)^{\mathfrak{C}}L$. Так как формация $\mathfrak{C}$ замкнута относительно подгрупп, то $K^{\mathfrak{C}}\subseteq\subseteq(HK)^{\mathfrak{C}}$, поэтому $H^{\mathfrak{C}}K^{\mathfrak{C}}=(HK)^{\mathfrak{C}}$.

Пусть теперь $K^{\mathfrak{C}}=1$. Заметим, что $K\neq 1$. По теореме 3 из [1] $K\subseteq(HK)_{\mathfrak{C}}=G_{\mathfrak{C}}$. Значит, $G_{\mathfrak{C}}\neq 1$. Пусть L – минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в $G_{\mathfrak{C}}$. Ввиду соображений индукции получаем в этом случае, что $H^{\mathfrak{C}}L=(HK)^{\mathfrak{C}}L$. Рассмотрим цепь $H^{\mathfrak{C}}\subseteq H^{\mathfrak{C}}L=(HK)^{\mathfrak{C}}L\subseteq G$. Так как $L\subseteq(HK)_{\mathfrak{C}}$, то $\mathcal{K}(L-1)\subseteq\subseteq\mathrm{Sim}\,\mathfrak{C}$. Ввиду следствия из леммы 1 подгруппа $H^{\mathfrak{C}}$ субнормальна в G. Поэтому ввиду [6] L нормализует $H^{\mathfrak{C}}$ и, следовательно, $H^{\mathfrak{C}}$ нормальна в $H^{\mathfrak{C}}L$. Так как $H^{\mathfrak{C}}L/H^{\mathfrak{C}}\simeq L/L\cap H^{\mathfrak{C}}$, то $\mathcal{K}(H^{\mathfrak{C}}L-H^{\mathfrak{C}})\subseteq\subseteq\mathcal{K}(L-1)\subseteq\mathrm{Sim}\,\mathfrak{C}$. Так как $G/G^{\mathfrak{C}}\in\mathfrak{C}$, то $G/(HK)^{\mathfrak{C}}L\in\mathfrak{C}$. Отсюда следует, что $\mathcal{K}(G-(HK)^{\mathfrak{C}}L)\subseteq\mathrm{Sim}\,\mathfrak{C}$.

Итак, $\mathcal{K}(G-H^{\mathfrak{C}})\subseteq\mathrm{Sim}\,\mathfrak{C}$. По лемме 2 из [3] $H^{\mathfrak{C}}\supseteq G^{C(\mathrm{Sim}\,\mathfrak{C})}==G^{\mathfrak{C}}=(HK)^{\mathfrak{C}}$. Обратное включение $H^{\mathfrak{C}}\subseteq(HK)^{\mathfrak{C}}$ вытекает из наследственности формации $\mathfrak{C}$. Значит, $H^{\mathfrak{C}}=(HK)^{\mathfrak{C}}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. *Если H, K – $\mathfrak{C}$-достижимые подгруппы группы G, то* $\langle H,K\rangle^{\mathfrak{C}}=\langle H^{\mathfrak{C}},K^{\mathfrak{C}}\rangle$.

Доказательство. Пусть G – группа наименьшего порядка, для которой лемма не выполняется. Ввиду леммы 1 из [1] подгруппы H и K $\mathfrak{C}$-достижимы в $\langle H, K\rangle$. Отсюда ввиду выбора группы G следует, что $G=\langle H, K\rangle$.

Среди пар $\mathfrak{C}$-достижимых подгрупп группы G, для которых лемма не выполняется, выберем пару H, K с наименьшей суммой индексов в группе G. Таким образом, для $\mathfrak{C}$-достижимых подгрупп H и K группы G лемма не верна. Но если подгруппы H_1, K_1 $\mathfrak{C}$-достижимы в G и $|G\colon H_1|+|G\colon K_1|<|G\colon H|+|G\colon K|$, то $\langle H_1,K_1\rangle^{\mathfrak{C}}=\langle H_1^{\mathfrak{C}},K_1^{\mathfrak{C}}\rangle$.

Пусть L – минимальная нормальная подгруппа группы G. Возможны два случая: либо $L\subseteq H\cap K$, либо L не содержится хотя бы в одной из подгрупп H и K.

Пусть $L\subseteq H\cap K$. Не ограничивая общности рассуждений, можем считать, что $L\subseteq G^{\mathfrak{C}}$. Перейдем к фактор-группе G/L. По лемме 2 из [1] подгруппы HL/L и KL/L $\mathfrak{C}$-достижимы в G/L. Ввиду выбора группы G имеем теперь, что $\langle HL/L, KL/L\rangle^{\mathfrak{C}}=\langle(HL/L)^{\mathfrak{C}},(KL/L)^{\mathfrak{C}}\rangle$. Применяя лемму 1.2 из [4], получаем отсюда, что $\langle H, K\rangle^{\mathfrak{C}}==\langle H^{\mathfrak{C}},K^{\mathfrak{C}}\rangle L$.

Пусть $L^{\mathfrak{C}}=L$. Так как $L\subseteq H$, то $LH^{\mathfrak{C}}/H^{\mathfrak{C}}\in\mathfrak{C}$, т. е. $L/L\cap$

$\cap H^{\mathfrak{C}} \in \mathfrak{C}$. Если $L \not\subseteq H^{\mathfrak{C}}$, то получаем $L^{\mathfrak{C}} \subset L$, противоречие, значит, $L \subseteq H^{\mathfrak{C}}$. Но тогда $\langle H, K\rangle^{\mathfrak{C}} = \langle H^{\mathfrak{C}}, K^{\mathfrak{C}}\rangle L = \langle H^{\mathfrak{C}}, K^{\mathfrak{C}}\rangle$.

Пусть $L^{\mathfrak{C}} = 1$, т. е. $L \in \mathfrak{C}$. По лемме 1 $H^{\mathfrak{C}}$ и $K^{\mathfrak{C}}$ — субнормальные подгруппы группы G. В силу [2] $\langle H^{\mathfrak{C}}, K^{\mathfrak{C}}\rangle$ — субнормальная подгруппа G. Поэтому на основании [6] L нормализует $\langle H^{\mathfrak{C}}, K^{\mathfrak{C}}\rangle$, т. е. $\langle H^{\mathfrak{C}}, K^{\mathfrak{C}}\rangle$ — нормальная подгруппа группы $G^{\mathfrak{C}} = \langle H, K\rangle^{\mathfrak{C}}$. Рассмотрим цепь $\langle H^{\mathfrak{C}}, K^{\mathfrak{C}}\rangle \subseteq G^{\mathfrak{C}} \subseteq G$. Так как $G/G^{\mathfrak{C}} \in \mathfrak{C}$, то $\mathcal{K}(G - G^{\mathfrak{C}}) \subseteq \mathrm{Sim}\,\mathfrak{C}$. Так как $L \in \mathfrak{C}$, то из $G^{\mathfrak{C}}/\langle H^{\mathfrak{C}}, K^{\mathfrak{C}}\rangle \simeq L/L \cap \langle H^{\mathfrak{C}}, K^{\mathfrak{C}}\rangle$ следует, что $\mathcal{K}(G^{\mathfrak{C}} - \langle H^{\mathfrak{C}}, K^{\mathfrak{C}}\rangle) \subseteq \mathrm{Sim}\,\mathfrak{C}$. Но тогда $\mathcal{K}(G - \langle H^{\mathfrak{C}}, K^{\mathfrak{C}}\rangle) \subseteq \mathrm{Sim}\,\mathfrak{C}$ и по лемме 2 из [3] $G^{C(\mathrm{Sim}\,\mathfrak{C})} = G^{\mathfrak{C}} \subseteq \langle H^{\mathfrak{C}}, K^{\mathfrak{C}}\rangle$. Противоречие.

Пусть теперь либо $L \not\subseteq H$, либо $L \not\subseteq K$. Ввиду теоремы 5 из [1] подгруппы HL и KL $\mathfrak{C}$-достижимы в G. При этом $|G: HL| + |G: KL| < |G: H| + |G: K|$. Значит, по индукции $\langle HL, KL\rangle^{\mathfrak{C}} = \langle (HL)^{\mathfrak{C}}, (KL)^{\mathfrak{C}}\rangle$. Так как $G = \langle H, K\rangle = \langle HL, KL\rangle$, то $\langle H, K\rangle^{\mathfrak{C}} = \langle (HL)^{\mathfrak{C}}, (KL)^{\mathfrak{C}}\rangle$. По лемме 2 $\langle H, K\rangle^{\mathfrak{C}} = \langle H^{\mathfrak{C}}, K^{\mathfrak{C}}\rangle L^{\mathfrak{C}}$.

Если $L \in \mathfrak{C}$, то $\langle H, K\rangle^{\mathfrak{C}} = \langle H^{\mathfrak{C}}, K^{\mathfrak{C}}\rangle$. Противоречие. Значит, $L \notin \mathfrak{C}$. В силу леммы 1 подгруппы $H^{\mathfrak{C}}$ и $K^{\mathfrak{C}}$ субнормальны в G, и подгруппа $\langle H^{\mathfrak{C}}, K^{\mathfrak{C}}\rangle$ субнормальна в G [2]. Поэтому из [6] следует, что L нормализует $\langle H^{\mathfrak{C}}, K^{\mathfrak{C}}\rangle$, т. е. подгруппа $\langle H^{\mathfrak{C}}, K^{\mathfrak{C}}\rangle$ нормальна в $\langle H^{\mathfrak{C}}, K^{\mathfrak{C}}\rangle L = \langle H, K\rangle^{\mathfrak{C}} = G^{\mathfrak{C}}$.

Пусть T — минимальная нормальная подгруппа группы L. Обозначим $\mathfrak{H} = \mathrm{form}\ T$. Тогда $G^{\mathfrak{C}}/\langle H^{\mathfrak{C}}, K^{\mathfrak{C}}\rangle \simeq L/L \cap \langle H^{\mathfrak{C}}, K^{\mathfrak{C}}\rangle \in \mathrm{form}\,T$. Значит, $(G^{\mathfrak{C}})^{\mathfrak{H}} \subseteq \langle H^{\mathfrak{C}}, K^{\mathfrak{C}}\rangle$. Если, $(G^{\mathfrak{C}})^{\mathfrak{H}} \neq 1$, то, взяв L из $(G^{\mathfrak{C}})^{\mathfrak{H}}$, получим $\langle H, K\rangle^{\mathfrak{C}} = \langle H^{\mathfrak{C}}, K^{\mathfrak{C}}\rangle$, что противоречит выбору подгрупп H и K. Значит, $(G^{\mathfrak{C}})^{\mathfrak{H}} = 1$. Это означает, что, $G^{\mathfrak{C}} \in \mathfrak{H}$, т. е. $G^{\mathfrak{C}}$ — элементарная группа. Допустим, что $H_2 = \langle H, K^{\mathfrak{C}}\rangle = G$. По лемме 1 подгруппа $H^{\mathfrak{C}}$ субнормальна в $G^{\mathfrak{C}}$. Поэтому из элементарности подгруппы $G^{\mathfrak{C}}$ следует, что $H^{\mathfrak{C}}$ — нормальная подгруппа группы $G^{\mathfrak{C}}$. А так как $H^{\mathfrak{C}}$ нормальна в H и $G = HG^{\mathfrak{C}}$, то $H^{\mathfrak{C}}$ — нормальная подгруппа группы G. Если $H^{\mathfrak{C}} \neq 1$, то, выбрав L в $H^{\mathfrak{C}}$, придем к противоречию. Если же $H^{\mathfrak{C}} = 1$, то $H \in \mathfrak{C}$ и по теореме 3 из [1] $H \subseteq G_{\mathfrak{C}}$. Отсюда следует, что $G_{\mathfrak{C}} G^{\mathfrak{C}} = G$. Теперь из $\mathcal{K}(G_{\mathfrak{C}} - 1) \cap \mathcal{K}(G^{\mathfrak{C}} - 1) = \varnothing$ имеем $G = G_{\mathfrak{C}} \times G^{\mathfrak{C}}$. Если $G_{\mathfrak{C}} \neq 1$, то, выбрав, L в $G_{\mathfrak{C}}$, получим из соображений индукции, что $G^{\mathfrak{C}} \times L = \langle H^{\mathfrak{C}}, K^{\mathfrak{C}}\rangle \times L$. Сравнивая порядки подгрупп $G^{\mathfrak{C}}$ и $\langle H^{\mathfrak{C}}, K^{\mathfrak{C}}\rangle$ и учитывая, что $\langle H^{\mathfrak{C}}, K^{\mathfrak{C}}\rangle \subseteq G^{\mathfrak{C}}$, получаем $\langle H^{\mathfrak{C}}, K^{\mathfrak{C}}\rangle = G^{\mathfrak{C}}$. Противоречие. Значит, $G_{\mathfrak{C}}=1$ и $G=G^{\mathfrak{C}}$. Но тогда по теореме 3 из [1] $H=1$. Это приводит к тому, что $K=G$ и $G^{\mathfrak{C}}=K^{\mathfrak{C}}=\langle H^{\mathfrak{C}}, K^{\mathfrak{C}}\rangle$. Значит, $H_2\neq G$. Тогда в силу выбора группы G получаем $H_2{}^{\mathfrak{C}}=$ $=\langle H^{\mathfrak{C}}, (K^{\mathfrak{C}})^{\mathfrak{C}}\rangle=\langle H^{\mathfrak{C}}, K^{\mathfrak{C}}\rangle$. Аналогично показывается, что $K_2=$ $=\langle H^{\mathfrak{C}}, K\rangle\neq G$ и $K_2{}^{\mathfrak{C}}=\langle H^{\mathfrak{C}}, K^{\mathfrak{C}}\rangle$. Допустим, что $H_2=H$ и $K_2=K$. Так как класс $\mathfrak{C}$ замкнут относительно подгрупп, то $H\cap G^{\mathfrak{C}}/H^{\mathfrak{C}}\in$ $\in\mathfrak{C}$. Если $H\cap G^{\mathfrak{C}}/H^{\mathfrak{C}}\neq 1$, то $G^{\mathfrak{C}}\in\mathfrak{C}$. Противоречие. Значит, $H^{\mathfrak{C}}=$ $=H\cap G^{\mathfrak{C}}$. Аналогично показывается, что $K^{\mathfrak{C}}=K\cap G^{\mathfrak{C}}$. Так как $H=H_2$ и $K=K_2$, то $K^{\mathfrak{C}}\subseteq H$, $H^{\mathfrak{C}}\subseteq K$. Но тогда $H^{\mathfrak{C}}=K^{\mathfrak{C}}$. Это приводит к тому, что $H^{\mathfrak{C}}\lhd G$ и $H^{\mathfrak{C}}\subseteq H\cap K$. Противоречие.

Итак, либо $H\subset H_2$, либо $K\subset K_2$. Отсюда следует, что $|G\colon H_2|+$ $+|G\colon K_2|<|G\colon H|+|G\colon K|$. По индукции тогда $\langle H_2, K_2\rangle^{\mathfrak{C}}=\langle H_2{}^{\mathfrak{C}}, K_2{}^{\mathfrak{C}}\rangle$. Отсюда $\langle H, K\rangle^{\mathfrak{C}}=\langle H^{\mathfrak{C}}, K^{\mathfrak{C}}\rangle$. Противоречие. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. *Пусть H, K — $\mathfrak{C}$-достижимые подгруппы группы G. Если $H^{\mathfrak{C}}K^{\mathfrak{C}}=K^{\mathfrak{C}}H^{\mathfrak{C}}$, то $H^{\mathfrak{C}}K=KH^{\mathfrak{C}}$.*

Доказательство. Так как $H^{\mathfrak{C}}K^{\mathfrak{C}}=K^{\mathfrak{C}}H^{\mathfrak{C}}$, то $H^{\mathfrak{C}}K=$ $=H^{\mathfrak{C}}K^{\mathfrak{C}}K=\langle H^{\mathfrak{C}}, K^{\mathfrak{C}}\rangle K$. По лемме 3 имеем $\langle H, K\rangle^{\mathfrak{C}}=\langle H^{\mathfrak{C}}, K^{\mathfrak{C}}\rangle$. Так как K нормализует $\langle H, K\rangle^{\mathfrak{C}}$, то $\langle H, K\rangle^{\mathfrak{C}}K=K\langle H, K\rangle^{\mathfrak{C}}$. Снова применяя лемму 3, окончательно получаем $H^{\mathfrak{C}}K=K\langle H, K\rangle^{\mathfrak{C}}=$ $=K\langle H^{\mathfrak{C}}, K^{\mathfrak{C}}\rangle=KK^{\mathfrak{C}}H^{\mathfrak{C}}=KH^{\mathfrak{C}}$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА. *Пусть H, K — $\mathfrak{C}$-достижимые подгруппы группы G. Если $H=H'$ и $H=H^{\mathfrak{C}}$, то $HK=KH$.*

Доказательство. По лемме 1 подгруппы H и $K^{\mathfrak{C}}$ субнормальны в G. Так как $H=H'$, то ввиду [2] $HK^{\mathfrak{C}}=K^{\mathfrak{C}}H$. Но тогда по лемме 4 $HK=KH$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть H, K — $\mathfrak{C}$-достижимые подгруппы группы G. Если $\Pi(H)\subseteq\Pi(\mathfrak{C})$, то $H^{\mathfrak{C}}K=KH^{\mathfrak{C}}$.*

Доказательство. Так как класс $\mathfrak{C}$ замкнут относительно расширений, то $(H^{\mathfrak{C}})^{\mathfrak{C}}=H^{\mathfrak{C}}$. Так как $\Pi(H)\subseteq\Pi(\mathfrak{C})$, то $(H^{\mathfrak{C}})'=H^{\mathfrak{C}}$. Теперь по теореме $H^{\mathfrak{C}}K=KH^{\mathfrak{C}}$.

Следствие 2. *Если класс $\mathfrak{C}$ содержит все разрешимые конечные группы, то для любых двух $\mathfrak{C}$-достижимых подгрупп H и K группы G справедливо равенство $H^{\mathfrak{C}}K=KH^{\mathfrak{C}}$.*

Следующие два примера показывают, что условия $H=H'$ и $H=$ $=H^{\mathfrak{C}}$ в теореме существенны и их полностью отбросить нельзя.

Пример 1. Пусть P — немодулярная p-группа, H и K — ее неперестановочные подгруппы. Если $\mathfrak{C}$ — класс всех p'-групп, то подгруппы H и K $\mathfrak{C}$-достижимы в P, $H=H^{\mathfrak{C}}$, но $HK\neq KH$.

Пример 2. Пусть H — простая неабелева группа, P — p-группа. Пусть $G=P\,\mathrm{wr}\,H$ — регулярное сплетение групп P и H. Очевидно, в G существует p-подгруппа K, которая не перестановочна с H. Если $\mathfrak{C}$ — класс всех конечных групп, то подгруппы H и K $\mathfrak{C}$-достижимы в G, $H=H'$, но $HK\neq KH$.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило
05.04.91

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Kegel O. H. Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den Subnormalteilerverband echt enthalten // Arch. Math. 1978. Bd 30, N 3. S. 225–228.
[2] Wielandt H. Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen // Math. Z. 1939. Bd 45. S. 209–244.
[3] Каморников С. Ф. Перестановочные субнормальные подгруппы конечных групп // ДАН БССР. 1989. Т. 33, № 5. С. 396–399.
[4] Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
[5] Коуровская тетрадь (Нерешенные вопросы теории групп). Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1984.
[6] Wielandt H. Über den Normalisator subnormaler Untergruppen // Math. Z. 1958. Bd 69, N 8. S. 463–465.